

## فصل دوم

# طراحی هندسی به کمک رایانه

*Computer Aided Geometric Design (CAGD)*



## ۱-۲ مفاهیم پایه

## ۱-۱-۲ نقطه و بردار

نقطه، المانی از فضای سه بعدی اقلیدسی (یا نقطه‌ای)  $E^3$  است که با حروف کوچک ضخیم نشان داده می‌شود. بردار، المانی از فضای سه بعدی خطی (یا برداری)  $R^3$  است که با حروفی مشابه حروف مربوط به نقطه نشان داده می‌شود. برای هر دو نقطه  $a$  و  $b$ ، یک بردار منحصر به فرد  $v$  وجود دارد که از  $a$  به سمت  $b$  می‌باشد و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^3, \quad \mathbf{v} \in R^3. \quad (1-2)$$

برای هر بردار معین  $v$ ، بی‌نهایت زوج نقطه مثل  $a$  و  $b$  وجود دارند بطوریکه  $v = b - a$ . اگر  $a$  و  $b$  یکی از این زوج نقاط و  $w$  یک بردار دلخواه باشند  $a+w$  و  $b+w$  زوج دیگری از این نقاط هستند (شکل ۱-۲) زیرا  $v = (b+w) - (a+w)$ . اختصاص نقطه جدید  $a+w$  به هر نقطه  $a \in E^3$ ، یک انتقال (*translation*) نامیده می‌شود و تساوی بالا نشان می‌دهد که بردارها بر خلاف نقاط نسبت به انتقال پایا هستند.

نقاط را فقط می‌توان از هم کم کرد (حاصل، یک بردار است). جمع دو نقطه در  $E^3$  امکان‌ناپذیر است (شکل ۲-۲). اما یک عملیات شبه جمع، معروف به ترکیب «باری سنتریک» (*Barycentric combination*) روی نقاط تعریف شده است. حاصل ترکیب باری سنتریک چند نقطه، یک نقطه جدید است.

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbf{b}_j; \quad \mathbf{b}_j \in E^3, \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1 \quad (2-2)$$

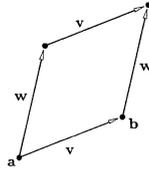
شاید عملیات بالا در نگاه اول همان جمع چند نقطه به نظر برسد؛ ولی عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_0); \quad \mathbf{a}_0, \mathbf{b} \in E^3, \quad \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1 \quad (3-2)$$

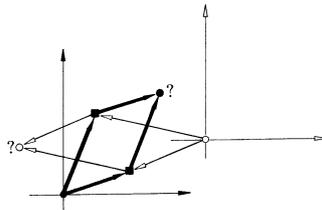
که عبارت اخیر جمع یک نقطه با یک بردار است. اصطلاح «باری سنتر» به معنی «مرکز ثقل» است.

$$\mathbf{b} = \sum m_j \mathbf{b}_j / \sum m_j \quad \sum m_j = 1. \quad (4-2)$$

اگر ضرایب ترکیب باری سنتریک علاوه بر اینکه مجموعشان یک می‌شود همگی غیر منفی هم باشند به ترکیب باری سنتریک، «ترکیب محدب» (*convex combination*) می‌گویند. حاصل ترکیب محدب نقاط، نقطه‌ای داخل این نقاط خواهد بود. این مساله باعث تعریف اصطلاح «پوسته محدب» (*convex hull*) نقاط می‌شود (شکل ۲-۳).



شکل ۱-۲ نقاط و بردارها: بردارها از انتقال متناظر نمی‌شوند.



شکل ۲-۲ جمع نقاط در سامانه‌های مختصات مختلف جواب‌های متفاوتی تولید می‌کند.

**۲-۱-۲ نگاشت آفینی (Affine map)**

به نگاشت  $\Phi$  که  $E^3$  را به خودش می‌انگارد در صورتی یک نگاشت آفینی می‌گویند که ترکیبات باری سنتریک را پایا نگهدارد. پس اگر

$$\mathbf{x} = \sum \alpha_j \mathbf{a}_j; \quad \sum \alpha_j = 1, \quad \mathbf{x}, \mathbf{a}_j \in \mathbb{E}^3 \quad (5-2)$$

و  $\Phi$  یک نگاشت آفینی باشد، آنگاه

$$\Phi \mathbf{x} = \sum \alpha_j \Phi \mathbf{a}_j; \quad \Phi \mathbf{x}, \Phi \mathbf{a}_j \in \mathbb{E}^3. \quad (6-2)$$

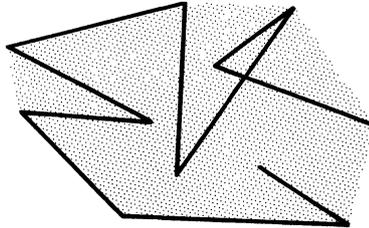
مثلا وسط یک پاره‌خط را می‌توان به وسط تصویر آفینی آن نگاشت. برای اثبات معمولا نگاشت آفینی را به شکل  $\Phi \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$  هم می‌نویسند؛ بطوریکه  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  و  $\mathbf{v}$  یک بردار است. در این حالت:

$$\begin{aligned} \Phi \left( \sum \alpha_j \mathbf{a}_j \right) &= \mathbf{A} \left( \sum \alpha_j \mathbf{a}_j \right) + \mathbf{v} \\ &= \sum \alpha_j \mathbf{A} \mathbf{a}_j + \sum \alpha_j \mathbf{v} \\ &= \sum \alpha_j (\mathbf{A} \mathbf{a}_j + \mathbf{v}) \\ &= \sum \alpha_j \Phi \mathbf{a}_j, \end{aligned} \quad (7-2)$$

نگاشت آفینی همانی:  $\mathbf{v} = 0, \mathbf{A} = I$

نگاشت آفینی انتقال:  $\mathbf{v} \neq 0, \mathbf{A} = I$

نگاشت آفینی مقیاس: ماتریس قطری  $\mathbf{v} = 0, \mathbf{A} =$



شکل ۲-۲ مجموعه‌ای از نقاط (یک کثیرالاضلاع) و پوسته محدب آن که سایه خورده نشان داده شده است.

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{نگاشت آفینی دوران حول محور } z \text{ ها:}$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{نگاشت آفینی برش (Shear):}$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نگاشت آفینی تصویرنمایی موازی:}$$

نگاشت‌های اقلیدسی، معروف به حرکت جسم صلب، از ماتریس‌های متعامد ( $A^T A = A A^T = I$ ) ایجاد می‌شوند. مهمترین نگاشت‌های اقلیدسی، نگاشت‌های دوران، انعکاس و انتقال هستند. در این نگاشت‌ها طول و زوایای بین بردارها ثابت می‌مانند. این نوع نگاشت‌ها حالت خاصی از نگاشت‌های آفینی است.

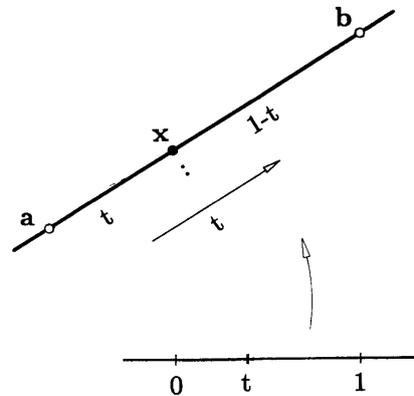
### ۲-۱-۳ میانمایی خطی (Linear interpolation)

نقطه  $x$  بصورت ترکیب باری سنتریک از نقاط  $a$  و  $b$  عبارت است از:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}; \quad t \in \mathbb{R} \quad (۸-۲)$$

$t$  هم حاصل ترکیب باری سنتریک از ۰ و ۱ شبیه  $x$  نسبت به  $a$  و  $b$  است؛ یعنی  $t = (1-t) \times 0 + t \times 1$ . در این حالت نقطه  $t$  ترکیب باری سنتریک از نقاط ۰ و ۱ در  $E^1$  است و سه نقطه  $a$  و  $b$  در  $E^3$  یک نگاشت آفینی از سه نقطه ۰،  $t$  و ۱ در  $E^1$  هستند. میانمایی خطی، پایای آفینی است؛ یعنی

$$\Phi \mathbf{x} = \Phi((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = (1-t)\Phi \mathbf{a} + t\Phi \mathbf{b}. \quad (۹-۲)$$



شکل ۴-۲ میانبایی خطی.

**۴-۱-۲ مختصات باری سنتریک**

$\alpha$  و  $\beta$  مختصات باری سنتریک  $x$  نسبت به  $a$  و  $b$  نامیده می‌شوند هرگاه

$$x = \alpha a + \beta b; \quad \alpha + \beta = 1$$

پس  $\alpha = (1-t)$  و  $\beta = t$ . اگر  $t \in [0,1]$ ، مختصات باری سنتریک می‌توانند منفی هم باشند. اگر  $a, b, c$  سه نقطه روی یک خط باشند مختصات باری سنتریک  $b$  نسبت به  $a$  و  $c$  مطابق شکل ۴-۲ می‌باشد.

$$\alpha = \frac{\text{vol}_1(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{\text{vol}_1(\mathbf{a}, \mathbf{c})},$$

$$\beta = \frac{\text{vol}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\text{vol}_1(\mathbf{a}, \mathbf{c})},$$

(۱۰-۲)

$\text{vol}_1$  حجم یک بعدی، یعنی فاصله بین دو نقطه است. برای سه نقطه هم خط  $a, b$  و  $x$

$$\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\text{vol}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\text{vol}_1(\mathbf{b}, \mathbf{c})} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

(۱۱-۲)

مختصات باری سنتریک یک نقطه نسبت به نگاشت‌های آفینی پایا هستند. لذا نسبت سه نقطه هم خط از تبدیلات آفینی متاثر نمی‌شود.

$$\text{ratio}(\Phi \mathbf{a}, \Phi \mathbf{b}, \Phi \mathbf{c}) = \frac{\beta}{\alpha},$$

(۱۲-۲)

از این خاصیت می‌توان برای محاسبه نسبت‌ها استفاده کرد. به این ترتیب به جای محاسبه فاصله بین نقاط می‌توان برای تصویر آنها روی محورها استفاده کرد. نگاشت‌های آفینی دارای خاصیت ثبوت نسبت‌ها هستند.

$$\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \text{ratio}(\Phi\mathbf{a}, \Phi\mathbf{b}, \Phi\mathbf{c})$$

یعنی می‌توان گفت: هر نگاشتی که خطوط مستقیم را به خطوط مستقیم می‌انگارد و ثبوت نسبت هم دارد یک نگاشت آفینی است. با همین استدلال اگر پاره خط  $a$  و  $b$  تصویر آفینی بازه یکه  $[0,1]$  باشد، می‌توان به این پاره خط بعنوان تصویر آفینی هر بازه‌ای مثل  $[a,b]$  نگاه کرد. یعنی

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad t \in [0, 1] \quad (13-2)$$

یا

$$\mathbf{x}(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{a} + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{b}, \quad u \in [a, b].$$

گاهی اوقات به  $t$  پارامتر محلی بازه  $[a,b]$  گفته می‌شود.

### ۵-۱-۲ میانبایی خطی تکه‌ای

مجموعه نقاط  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in E^3$  طبق شکل ۵-۲، یک کثیرالاضلاع  $B$  را تشکیل می‌دهند. این کثیرالاضلاع بطور خطی و تکه‌ای منحنی را میانبایی می‌کند. نماد این نوع میانبایی

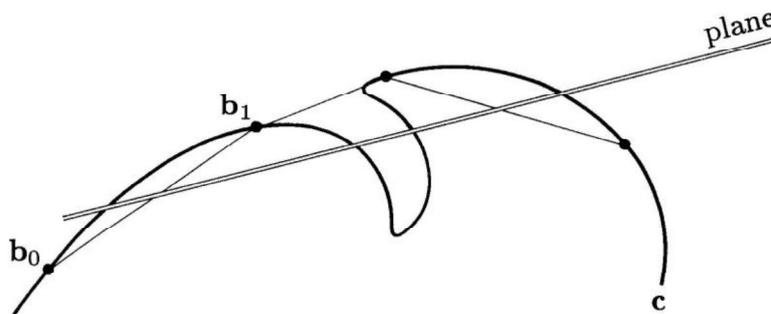
$$\mathbf{B} = \mathcal{PL}\mathbf{c}. \quad (14-2)$$

است. یکی از خواص مهم میانبایی خطی تکه‌ای پایایی آفینی است؛ یعنی

$$\mathcal{PL}\Phi\mathbf{c} = \Phi\mathcal{PL}\mathbf{c}. \quad (15-2)$$

یعنی اگر  $c$  توسط نگاشت  $\Phi$  به  $\Phi\mathbf{c}$  نگاشته شود، میانبایی خطی تکه‌ای  $\Phi\mathbf{c}$  نگاشت آفینی میانبایی خطی تکه‌ای اصلی خواهد بود. خاصیت محو تغییر (*variation diminishing*) نیز از جمله خواص دیگر این میانبایی است.

$$\text{cross } \mathcal{PL}\mathbf{c} \leq \text{cross } \mathbf{c}. \quad (16-2)$$



شکل ۵-۲ تقاطع یک میانبایی خطی تکه‌ای از منحنی با هر صفحه بیشتر از نقاط تقاطع با خود منحنی با صفحه نیست.

## ۶-۱-۲ تئوری منلائوس (Menelaos)

$$\mathbf{a}_t = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{a}_s = (1-s)\mathbf{p}_1 + s\mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{b}_t = (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3,$$

$$\mathbf{b}_s = (1-s)\mathbf{p}_2 + s\mathbf{p}_3. \quad (17-2)$$

$c$  نقطه تقاطع  $a_s b_t$  و  $a_t b_s$  است لذا:

$$\text{ratio}(\mathbf{a}_t, \mathbf{c}, \mathbf{b}_t) = \frac{s}{1-s} \quad \text{and} \quad \text{ratio}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s) = \frac{t}{1-t}. \quad (18-2)$$

برای اثبات می‌توان نوشت:

$$\mathbf{c} = (1-s)\mathbf{a}_t + s\mathbf{b}_t \quad \text{and} \quad \mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a}_s + t\mathbf{b}_s, \quad (19-2)$$

یعنی نقطه  $c$  را می‌شود از میانمایی خطی تحت  $t$  یا  $s$  بدست آورد. مختصات باری سنتریک علاوه بر نقاط روی یک خط، برای نقاط روی یک صفحه هم قابل تعریفند:

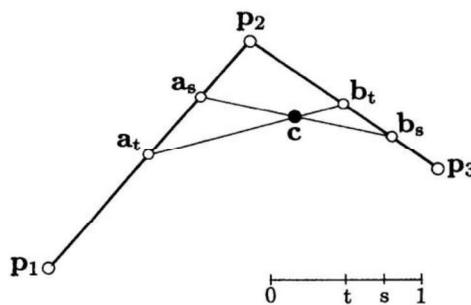
$$\mathbf{p} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}, \quad u + v + w = 1. \quad (20-2)$$

روابط بالا سه معادله با سه مجهول  $w, v, u$  تشکیل می‌دهند و طبق قانون کرامر می‌توان نوشت:

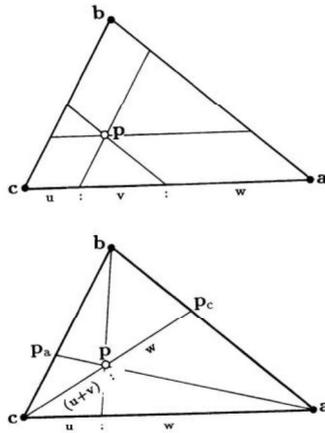
$$u = \frac{\text{area}(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad v = \frac{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad w = \frac{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}. \quad (21-2)$$

که

$$\text{area}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (22-2)$$



شکل ۶-۲ نقطه  $c$  را می‌توان از میانمایی خطی تحت  $t$  یا  $s$  بدست آورد.



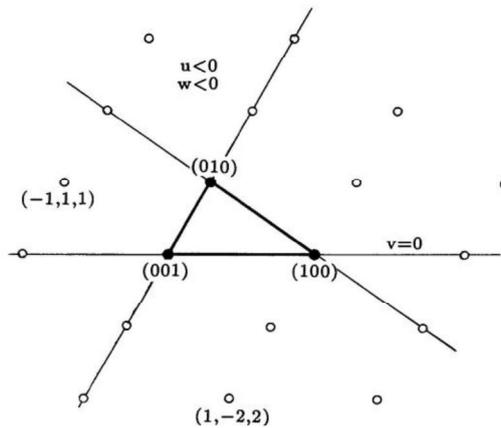
شکل ۷-۲ دو حالت از نسبت‌های ایجاد شده توسط خطوط مستقیم عبوری از  $P$

### ۷-۱-۲ میانمایی خطی دو متغیری (Bivariate linear interpolation)

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(u, v, w) = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3 \quad u + v + w = 1 \quad (23-2)$$

به این نگاشت که از  $E^2$  به  $E^3$  صورت می‌گیرد میانمایی خطی می‌گویند و  $w, v, u$  مختصات باری سنتریک  $p$  نسبت به  $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1$  هستند. مختصات باری سنتریک برای فضاهای بیش از دو بعدی عبارتند از:

$$\mathbf{p} = u_1\mathbf{p}_1 + u_2\mathbf{p}_2 + u_3\mathbf{p}_3 + u_4\mathbf{p}_4. \quad (24-2)$$



شکل ۸-۲ یک مثلث نوعی سامانه مختصات در صفحه تعریف می‌کند.

## ۲-۱-۸ نمایش منحنی‌ها و سطوح

دو روش از متداولترین روش‌های نمایش منحنی‌ها و سطوح در مدل‌سازی هندسی، معادلات ضمنی و توابع پارامتری هستند. معادلهٔ ضمنی یک منحنی در صفحهٔ  $xy$  به شکل  $f(x, y) = 0$  است. بعنوان مثال دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدا مختصات با معادلهٔ  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  مشخص می‌شود. به شکل پارامتری، هر یک از مختصات نقاط روی منحنی به صورت تابع صریحی از یک پارامتر مستقل نشان داده می‌شوند.  $C(u) = (x(u), y(u))$  و  $a \leq u \leq b$ ؛ بنابراین یک تابع بردار-مقدار از متغیر مستقل  $u$  است. گرچه بازهٔ  $[a, b]$  دلخواه است معمولاً بصورت واحد  $[0, 1]$  بکار می‌رود. نمایش پارامتری یک منحنی، منحصر به فرد نیست. به عنوان مثال یک چهارم دایرهٔ فوق‌الذکر را می‌توان با معادلات

$$\begin{aligned} x(u) &= \cos(u) \\ y(u) &= \sin(u) \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2-25)$$

و یا با معادلات

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{2t}{1+t^2} \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (2-26)$$

توصیف کرد. این تشبیه می‌تواند آموزنده باشد که  $C(u) = (x(u), y(u))$  مسیری است که توسط ذره‌ای بصورت تابعی از زمان طی می‌شود.  $u$  و  $[a, b]$  به ترتیب متغیر زمان و بازهٔ زمانی هستند. مشتقات اول و دوم  $C(u)$  نیز به ترتیب سرعت و شتاب ذره خواهند بود. در مورد  $|C'(u)| = 1: C(u)$  است. یعنی، به رغم تغییر جهت سرعت ذره، مقدارش ثابت است. این نوع پارامتری کردن، پارامتری کردن یکنواخت است. در حالیکه برای  $C'(t)$ ،  $C'(1) = (-1, 0)$ ،  $C'(0) = (0, 2)$  یعنی سرعت شروع ذره دو برابر سرعت انتهای آن می‌باشد.

سطوح را هم می‌توان با معادلات ضمنی و پارامتری توصیف کرد. بعنوان نمونه یک سطح کروی به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات بصورت ضمنی عبارت است از  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . یکی از حالات بیان پارامتری همین کره عبارت است از:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \sin(u) \cos(v) \\ y(u, v) &= \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) &= \cos(u) \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \end{aligned} \quad (2-27)$$

برای بیان پارامتری سطوح به دو پارامتر  $u$  و  $v$  نیاز است. با ثابت نگهداشتن  $u$  و تغییر  $v$  خطوط عرضی روی کره و با ثابت نگهداشتن  $v$  و تغییر  $u$  خطوط طولی روی آن توصیف می‌شوند. مشتقات جزئی سطح  $S(u, v)$ ، با  $S_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$  و  $S_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$  نشان داده می‌شوند و در واقع همان سرعت‌ها در امتداد خطوط به ترتیب عرضی و طولی هستند. در هر نقطه از سطح که ضرب برداری  $S_u \times S_v$  صفر نباشد، بردار یکه نرمال  $n$  به صورت

$$n = \frac{S_u \times S_v}{|S_u \times S_v|} \quad (2-28)$$

بیان می‌شود. وجود  $n$  و صفحه مماس متناظر آن یک خاصیت سطح، مستقل از نحوه پارامتری کردن آن است. بیان‌های پارامتری مختلف مشتقات جزئی متفاوتی در اختیار می‌گذارند اما  $n$  به شرط صفر نبودن مخرج یکسان است.

هر یک از دو روش توصیف ضمنی یا پارامتری منحنی‌ها و سطوح دارای معایب و مزایایی هستند. مدل‌سازی هندسی موفق با استفاده از هر دو روش انجام می‌گیرد. گرچه در سراسر این متن به روش پارامتری پرداخته شده است در مراجع تکمیلی می‌توان به مطالعه ابعاد مختلف توصیف ضمنی پرداخت.

بدیهی است که اگر توابع مختصات  $x(u)$  و  $y(u)$  و  $z(u)$  بطور دلخواه انتخاب شده باشند طیف وسیعی از منحنی‌ها قابل توصیف خواهند بود؛ اما این حالت برای طراحی و تدوین یک سامانه مدل‌سازی هندسی مناسب نخواهد بود. حالت آرمانی این است که توابع مختصات به کلاسی از توابع منحصر باشند که:

- قادر به نمایش دقیق تمام منحنی‌های مورد نیاز کاربر باشند؛
- پردازش رایانه‌ای آنها ساده، کارآمد و دقیق باشند؛ بویژه
  - محاسبه نقاط و مشتقات روی منحنی‌ها و سطوح کارآمد باشد؛
  - پردازش عددی این توابع نسبتاً به خطای گرد کردن نقاط اعشار غیرحساس باشد؛
  - این توابع حافظه کمی برای ذخیره نیاز داشته باشند؛
- از نظر ریاضیاتی خوش فهم و ساده باشند.

برای این منظور از توابع چند جمله‌ای بطور وسیعی استفاده شده است. اگرچه چندجمله‌ای‌ها، دو معیار آخر از معیارهای بالا را دارا هستند، تعدادی از منحنی‌ها (و سطوح) را نمی‌توانند به دقت نشان دهند و باید آنها را با این توابع تقریب زد. دو روش متداول بیان توابع چندجمله‌ای، پایه توانی و بزییر هستند که البته روش بهتر روش بزییر است و در بخش‌های بعد به آن پرداخته می‌شود.

یک منحنی پایه‌توانی درجه  $n$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i u^i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2-29)$$

که  $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$  بردار هستند. بنابراین

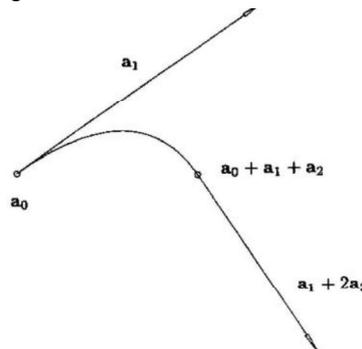
$$x(u) = \sum_{i=0}^n x_i u^i \quad y(u) = \sum_{i=0}^n y_i u^i \quad z(u) = \sum_{i=0}^n z_i u^i \quad (2-30)$$

مثال:

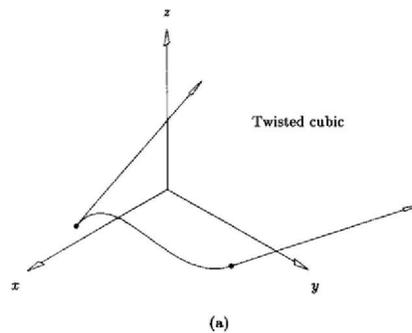
$C(u) = a_0 + a_1 u, 0 \leq u \leq 1 : n = 1$  یک پاره خط مستقیم بین دو نقطه  $a_0 + a_1$  و  $a_0$  است.  $C'(u) = a_1$  جهت ثابت خط را می‌دهد.

$C(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2, 0 \leq u \leq 1 : n = 2$  یک کمان سهمی بین نقاط  $a_0$  و  $a_0 + a_1 + a_2$  است (شکل ۹-۲).

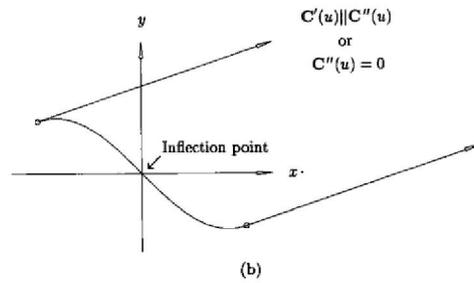
$C(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 : n = 3$  یک منحنی عمومی است که می‌تواند یک منحنی سه بعدی پیچ خورده (*twisted*) بوده و روی یک صفحه واقع نباشد (شکل ۱۰-۲).



شکل ۹-۲ کمان سهمی.



شکل ۱۰-۲



شکل ۱۰-۲ منحنی‌های مکعبی (a) پیچ خورده سه بعدی (b) نقطه عطف.

## ۲-۲ سهمی‌ها با بیان پارامتری

اگر  $b_2, b_1, b_0$  سه نقطه در  $E^3$  و  $t \in R$  باشند:

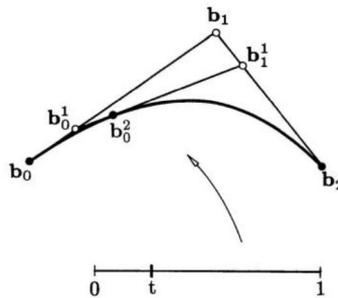
$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1,$$

$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2,$$

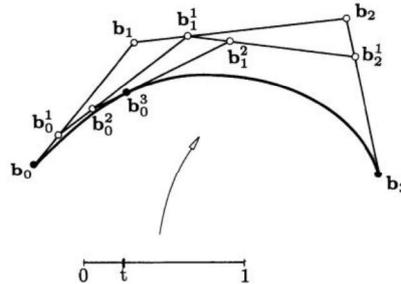
$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t).$$

(۲-۳۱)

با جایگذاری دو رابطه اول در سومی خواهیم داشت.



شکل ۱۱-۲ سهمی شکل گرفته با میانبایی‌های خطی مکرر.



شکل ۱۲-۲ نقطه  $b_0^3(t)$  از میانبایی‌های خطی مکرر بدست می‌آید ( $t=0.25$ ).

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2 \mathbf{b}_0 + 2t(1-t) \mathbf{b}_1 + t^2 \mathbf{b}_2. \quad (۳۲-۲)$$

اگر  $t \in [0,1]$ ، سهمی درون پوسته محدب قرار خواهد گرفت.

$$\text{ratio}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) = \text{ratio}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2) = \text{ratio}(\mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_0^2, \mathbf{b}_1^1) = t/(1-t). \quad (۳۳-۲)$$

چون ساختار سهمی فوق‌الذکر ناشی از میانبایی خطی تکه‌ای است پس پایای آفینی خواهد بود.

### ۳-۲ تابع کاستلژو (De Casteljau)

سهمی‌ها، منحنی‌های صفحه‌ای هستند. برای منظوره‌های عملی که به منحنی‌های فضایی نیاز است باید تابع فوق را تعمیم داد تا به یک منحنی چند جمله‌ای درجه  $n$  برسیم.

$$t \in R \text{ و } \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in E^3 \text{ اگر}$$

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i. \quad (۳۴-۲)$$

با تابع کاستلژوی بالا،  $\mathbf{b}_0^n(t)$  نقطه‌ای روی منحنی بزیر  $\mathbf{b}^n(t)$  با پارامتر  $t$  می‌باشد. عبارت

$$\mathbf{b}^n(t) = \mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n; t] = \mathcal{B}[\mathbf{P}; t] = \mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n] = \mathcal{BP}.$$

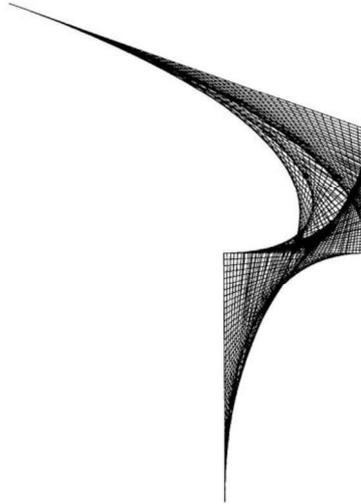
اپراتور(خطی)  $B$  منحنی بزیر را با چند ضلعی کنترل آن مرتبط می‌کند. ضرایب میانی  $\mathbf{b}_i^r(t)$  بطور قراردادی بصورت آرایه مثلثی از نقاط نوشته می‌شوند. مثلاً برای حالت درجه سوم:

$$\begin{array}{l} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^1 \\ \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^1 \quad \mathbf{b}_0^2 \\ \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2^1 \quad \mathbf{b}_1^2 \quad \mathbf{b}_0^3 \end{array}$$

به نظر می‌رسد که این آرایه مثلثی از نقاط باید در یک آرایه دوبعدی ذخیره شود اما چون حافظه زیادی اشغال خواهد کرد می‌تواند در یک آرایه یک بعدی پُر شده و در هر مرحله عناصر آن تغییر داده شوند. برای مثال، یک نقطه از منحنی بزیر مکعبی با پارامتر  $t = \frac{1}{2}$  دارای نقاط کنترل و میانی زیر با تابع کاستلژو می‌باشد.

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

در شکل ۲-۱۳ پنجاه نقطه روی یک منحنی درجه چهار نشان داده شده است.



شکل ۲-۱۳ پنجاه نقطه محاسبه شده روی یک منحنی درجه چهار و نقاط میانی  $\mathbf{b}_i^r$  بهم وصل شده‌اند.

خواص منحنی بزیر عبارتند از:

**پایایی آفینی:** در نرم افزارهای CAD به دفعات به نگاشت‌های آفینی مانند انتقال، دوران، انعکاس و مقیاس و غیره نیاز می‌شود. خاصیت پایایی آفینی منحنی‌های بزیر که ناشی از میانبازی خطی تکه‌ای آنهاست موجب می‌شود که به جای اعمال نگاشت‌های آفینی به نقاط روی منحنی، بتوان این نگاشت‌ها را به نقاط کنترل منحنی اعمال نمود.

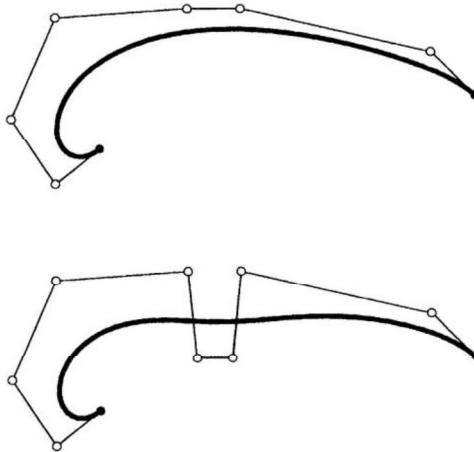
**پایایی منحنی‌های بزیر در برابر تبدیلات پارامتری آفینی:** تعریف منحنی بزیر روی بازه پارامتری  $t \in [0,1]$  الزامی نیست بلکه ساده‌تر است. بواسطه خاصیت پایایی میانبازی خطی

نسبت به تبدیل پارامتری، با تعریف پارامتر محلی  $t = \frac{u-a}{b-a}$  می‌توان نوشت:

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u), \quad a \leq u \leq b \quad (2-25)$$

نگاشت 1.  $t = \frac{b-u}{b-a} \cdot 0 + \frac{u-a}{b-a} \cdot 1$  یک نگاشت آفینی است.

**خاصیت پوسته محدب منحنی‌های بزیر:** برای  $\mathbf{b}^n(t), t \in [0,1]$  درون پوسته محدب چند ضلعی کنترل قرار می‌گیرد. این امر بخاطر این است که نقاط میانی  $\mathbf{b}_i^r$  بصورت ترکیب محدب از نقاط قبلی  $\mathbf{b}_j^{r-1}$  بدست می‌آیند. از این خاصیت می‌توان برای کنترل تقاطع دو منحنی بزیر استفاده کرد؛ مثل کنترل تصادف بازوی دو ربات حین کار. برای این‌کار کافی است پوسته محدب دو منحنی بصورت جعبه‌های مین-ماکس آنها از نظر تداخل با هم چک شوند.



شکل ۲-۱۴ نمونه‌ای از منحنی‌های بزیر.

میانمایی نقاط انتهایی و طراحی با منحنی‌های بزیر: بواسطه خاصیت ذاتی میانمایی، منحنی از نقاط انتهایی می‌گذرد که تاثیر مثبت زیادی در قابل پیش بینی بودن شکل منحنی خواهد داشت. از طرف دیگر با توجه به تغییر شکل منحنی با تغییر محل نقاط کنترل، می‌توان شکل مورد نظر از منحنی را با چندبار تغییر مکان نقاط بزیر بدست آورد (شکل ۲-۱۴).

#### ۲-۴ شکوفه دادن (Blossoming)

در ستون  $n$ ، به جای استفاده از مقدار تکراری  $t$ ، از یک مقدار جدید مثل  $t_r$  استفاده می‌شود. مثلاً برای حالت درجه سوم، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0^1[t_1]$$

$$\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1^1[t_1] \quad \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2]$$

$$\mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2^1[t_1] \quad \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] \quad \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3].$$

چون  $\mathbf{b}_0^3$  تابعی از سه متغیر مستقل  $t_1, t_2, t_3$  خواهد بود، منحنی منتهی به ازای مقادیر مختلف، منحصر به فرد نخواهد بود. به تابع سه متغیره  $b[\dots]$  شکوفه منحنی  $\mathbf{b}^3(t)$  می‌گویند. ملاحظه می‌شود  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0,0,0]$ ،  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}[1,1,1]$ . به ازای  $[0,0,1]$  داریم:

$$\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0,0,1].$$

پس نقاط بزیر اصلی را می‌توان با ارزیابی شکوفه منحنی در آرگومان‌های مرکب از صفر و یک‌ها پیدا کرد. اما باقی نقاط میانی را هم می‌توان بصورت مقادیری از شکوفه به ازای آرگومان‌های خاص نوشت؛ مثلاً با  $[0, 0, t] = [t_1, t_2, t_3]$  داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0^1 = \mathbf{b}[0, 0, t]. \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{b}[0, 0, 0] \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}[0, 0, 1] \quad \mathbf{b}[0, 0, t] \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}[0, 1, 1] \quad \mathbf{b}[0, t, 1] \quad \mathbf{b}[0, t, t] \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}[1, 1, 1] \quad \mathbf{b}[t, 1, 1] \quad \mathbf{b}[t, t, 1] \quad \mathbf{b}[t, t, t]. \end{aligned}$$

پس نقاط بزیر عبارتند از:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[0^{(n-i)}, 1^{(i)}], \quad (2-26)$$

$$\mathbf{b}[0^{(1)}, t^{(2)}, 1^{(0)}] = \mathbf{b}[0, t, t]. \quad \text{که}$$

تابع کاستلژو بر حسب شکوفه  $b//$  بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[0^{(n-r-i)}, t^{(r)}, 1^{(i)}] &= (1-t)\mathbf{b}[0^{(n-r-i+1)}, t^{(r-1)}, 1^{(i)}] \\ &+ t\mathbf{b}[0^{(n-r-i)}, t^{(r-1)}, 1^{(i+1)}]. \end{aligned} \quad (2-27)$$

نقطه روی منحنی  $\mathbf{b}[t^{<n>}]$  می‌باشد. شکوفه یک منحنی بزیر را می‌توان روی بازه  $[a, b]$  هم بصورت

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a^{(n-i)}, b^{(i)}].$$

در نظر گرفت. در تعریف بالا نیز به جای  $(1-t)$  و  $t$  به ترتیب  $\frac{b-u}{b-a}$  و  $\frac{u-a}{b-a}$  استفاده خواهد شد  $u \in [a, b]$ .

## ۵-۲ شکل برنشتاینی (Bernstein form) منحنی بزیر

چون در هر دو روش بزیر و پایه توانی از چند جمله‌ایها برای توابع مختصات استفاده شده است از نظر ریاضیاتی معادل هم هستند. یعنی هر منحنی که با یک روش قابل نمایش باشد با دیگری هم قابل نمایش خواهد بود؛ اما روش بزیر از نظر مدل‌سازی هندسی ارجح است. منحنی بزیر درجه  $n$  بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i, \quad 0 \leq t, u \leq 1 \quad (2-28)$$

که در آن  $B_i^n(t)$ ، توابع پایه برنشتاین بوده و از روابط زیر محاسبه می‌شوند (شکل ۲-۱۵):

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad (2-39)$$

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{if } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (2-40)$$

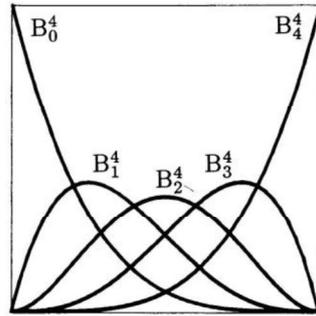
مثال:  $C(u) = (1-u)P_0 + uP_1$  :  $n=1$

یعنی منحنی یک پاره خط مستقیم بین  $P_0$  و  $P_1$  است.

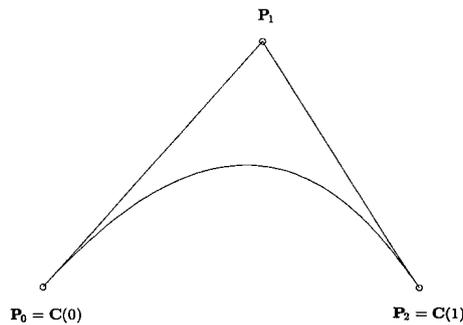
$$C(u) = (1-u)^2 P_0 + 2u(1-u)P_1 + u^2 P_2 : n=2$$

یک کمان سهمی از  $P_0$  تا  $P_2$  (شکل ۲-۱۶) است که از  $P_0$  و  $P_2$  گذشته و بردارهای مماس در  $P_0$  و  $P_2$  موازی به ترتیب  $P_1 - P_0$  و  $P_2 - P_1$  هستند.

$$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u)P_2 + u^3 P_3 : n=3$$

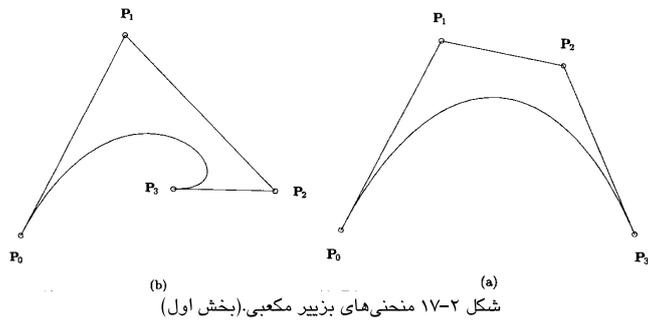


شکل ۲-۱۵ چند جمله‌ای‌های درجه چهار برنشتاین.

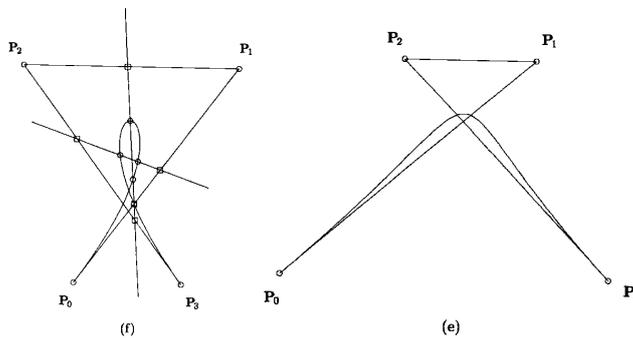
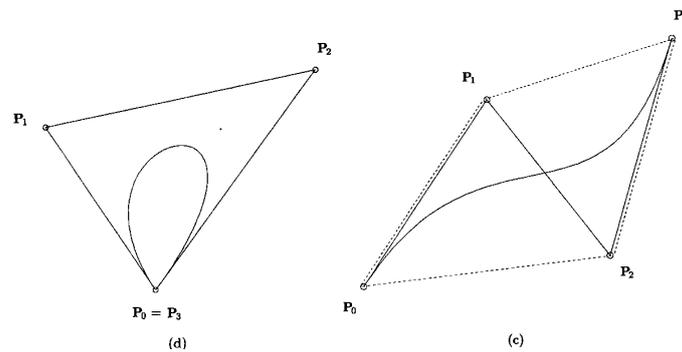


شکل ۲-۱۶ یک منحنی بزیر درجه دو.

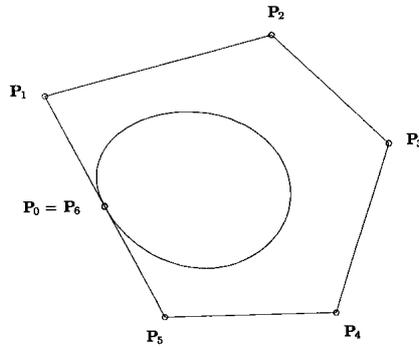
خاصیت محوتغییر (*variation diminishing*) در مورد این منحنی‌ها صادق بوده و به این معنی است که تعداد نقاط تقاطع بین هر خط مستقیم با منحنی از تعداد نقاط تقاطع آن خط با چند ضلعی کنترل منحنی بیشتر نمی‌شود. در مورد منحنی‌های سه بعدی عبارت «خط مستقیم» بالا با «صفحه» جایگزین می‌شود. یعنی منحنی بزیر با فاصله کمی، چند ضلعی کنترل خودش را تعقیب می‌کند. در شکل‌های ۱۷e-۲ و ۱۷f-۲ نشان می‌دهند که وجود حلقه (*loop*) در چند ضلعی کنترل ممکن است باعث ایجاد حلقه در منحنی بشود یا نشود.



شکل ۱۷-۲ منحنی‌های بزیر مکعبی. (بخش اول)



شکل ۱۷-۲ منحنی‌های بزیر مکعبی. (بخش دوم)



شکل ۲-۱۸ یک منحنی هموار و بسته درجه شش بزییر.

شکل ۲-۱۸ یک منحنی درجه شش بزییر بسته را نشان می‌دهد.  $n=6$ .

تابع ۲-۱: این تابع  $n+1$  چندجمله‌ای برنشتاین درجه  $n$  که در  $u$  ثابت و غیرصفرند را محاسبه می‌کند.

AllBernstein(n,u,B)

```
{ /* Compute all nth-degree Bernstein polynomials. */
  /* Input: n,u */
  /* Output: B (an array, B[0],...,B[n]) */
  B[0] = 1.0;
  u1 = 1.0-u;
  for (j=1; j<=n; j++)
  {
    saved = 0.0;
    for (k=0; k<j; k++)
    {
      temp = B[k];
      B[k] = saved+u1*temp;
      saved = u*temp;
    }
    B[j] = saved;
  }
}
```

تابع ۲-۲: این تابع نیز با استفاده از تابع ۲-۱ و روابط بالا، نقطه‌ای را روی منحنی بزییر درجه  $n$  به ازای  $u$  ثابت محاسبه می‌کند.

PointOnBezierCurve(P,n,u,C)

```
{ /* Compute point on Bezier curve. */
  /* Input: P,n,u */
  /* Output: C (a point) */
  AllBernstein(n,u,B) /* B is a local array */
  C = 0.0;
  for (k=0; k<=n; k++) C = C + B[k]*P[k];
}
```

خواص چند جمله‌ای‌های برنشتاین عبارتند از:

(۱) ترکیب باری سنتریک از درجات کمتر هستند:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (40-2)$$

که

$$B_0^0(t) \equiv 1 \quad B_j^n(t) \equiv 0 \quad \text{for } j \notin \{0, \dots, n\}.$$

و

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1. \quad (41-2)$$

خواص منحنی‌های بزییر متاثر از خواص توابع برنشتاین عبارتند از:

(۱) پایایی آفینی: ناشی از ترکیب باری سنتریک:

(۲) پایایی تحت تبدیلات پارامتری آفینی:

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right). \quad (42-2)$$

(۳) خاصیت پوسته محدب: در بازه  $t \in [0,1]$ ، چند جمله‌های برنشتاین غیرمنفی هستند:

(۴) میانبایی نقاط انتهایی:

(۵) تقارن: اگر نقاط بزییر بصورت  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  یا  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  شماره‌گذاری شوند در هر حال منحنی شکل گرفته از هر دو دسته نقاط یکی است و فقط جهت آن فرق خواهد کرد. عبارت دیگر

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(1-t). \quad (43-2)$$

یعنی چند جمله‌ای‌های برنشتاین نسبت به  $t$  و  $(1-t)$  متقارن هستند:

(۶) پایایی تحت ترکیبات باری سنتریک:

$$\sum_{j=0}^n (\alpha \mathbf{b}_j + \beta \mathbf{c}_j) B_j^n(t) = \alpha \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) + \beta \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j^n(t). \quad (44-2)$$

یعنی می‌توان متوسط وزنی (weighted average) دو منحنی بزییر را به دو روش ساخت:

الف) با گرفتن متوسط وزنی از نقاط روی منحنی‌ها:

ب) با گرفتن متوسط وزنی از رئوس کنترلی آنها و بعد محاسبه منحنی.

این خطی‌بودن برای خیلی از اهداف نظری مهم است. مهمترین آنها هم تعریف سطوح

حاصلضرب تانسوری است:

(۷) دقتی خطی: اتحاد زیر مفید است:

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) = t, \quad (45-2)$$

اگر فرض شود که رئوس  $\mathbf{b}_j$  طبق رابطه زیر بطور یکنواخت روی خط راست واصل  $p$  به  $q$  قرار می‌گیرند و

$$\mathbf{b}_j = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{p} + \frac{j}{n} \mathbf{q}; \quad j = 0, \dots, n. \quad (46-2)$$

منحنی تولید شده با این چند ضلعی، یک خط راست مابین  $p$  و  $q$  خواهد بود. به این خاصیت «دقیقی خطی» می‌گویند:

۸) کنترل *pseudo-local*: چند جمله‌ای برنشتاین  $B_i^n$  فقط یک ماکزیمم در  $t = \frac{i}{n}$  دارد. این اصل یک کاربرد طراحی دارد. اگر فقط یکی از رئوس چندضلعی کنترل مثلا  $b_i$  را جابجا کنیم، منحنی بیشترین تاثیر را در منطقه‌ای از این منحنی می‌پذیرد که اطراف مقدار پارامتر  $\frac{i}{n}$  است. گرچه این تغییر کلی، شکل منحنی را تغییر می‌دهد تغییرات آن قابل پیش بینی می‌شود. بعنوان یک قانون کلی (که بزیر آن را ارائه کرده)، حداکثر مقدار هر  $B_i^n$  بطور سرانگشتی  $\frac{1}{3}$  است؛ بنابراین تغییر  $b_i$  به اندازه ۳ واحد منحنی را به اندازه یک واحد تغییر خواهد داد.

## ۲-۶ مشتقات منحنی بزیر

چون

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \frac{i n!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]. \end{aligned} \quad (47-2)$$

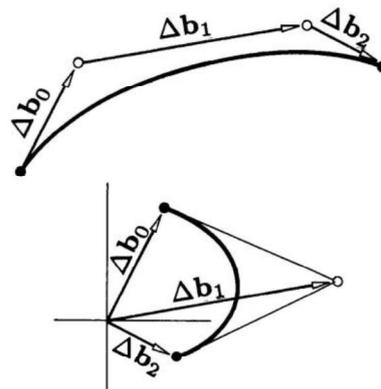
پس

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]. \quad (48-2)$$

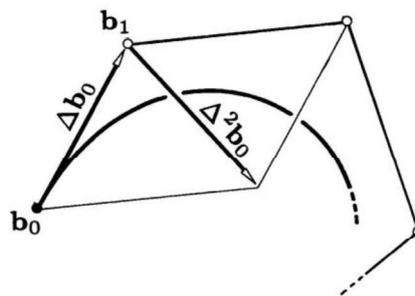
و

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) &= n \sum_{j=0}^n [B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)] \mathbf{b}_j \\
 &= n \sum_{j=1}^n B_{j-1}^{n-1}(t) \mathbf{b}_j - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_j \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_{j+1} - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \mathbf{b}_j \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t) \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t); \quad \Delta \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^3.
 \end{aligned}
 \tag{۴۹-۲}$$

یعنی مشتق یک منحنی بزیر، منحنی بزیر دیگری است که گاهی به آن «هدوگراف» (Hodograph) می‌گویند. در عین حال هدوگراف در  $E^3$  زندگی نمی‌کند بلکه بخاطر ماهیت برداری  $\Delta \mathbf{b}_j$ ، در  $R^3$  است.



شکل ۱۹-۲ یک منحنی بزیر و منحنی مشتق اول آن:



شکل ۲۰-۲ بردارهای مشتق اول و دوم در  $t=0$  ضرایبی از بردارهای تفاضل اول و دوم در  $\mathbf{b}_0$ .

با جابه جایی منحنی اصلی منحنی مشتق تغییر نخواهد کرد.  
مشتقات مرتبه بالاتر منحنی بزیر را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t). \quad (50-2)$$

و

$$\Delta^r \mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbf{b}_{i+j}. \quad (51-2)$$

دو حالت خاص و مهم، مشتقات در نقاط انتهایی هستند. از آنجائیکه

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0 \quad (52-2)$$

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_{n-r}. \quad (53-2)$$

$r$  امین مشتق یک منحنی بزیر در هر نقطه انتهایی فقط به  $r+1$  نقطه بزیر نزدیک به آن نقطه انتهایی (مشمول بر خود نقطه) وابسته خواهد بود (شکل ۲-۲۰).

در بعضی از کاربردها (مثل تقاطع منحنی با صفحه)، نه تنها به نقطه تقاطع روی منحنی، بلکه به مشتقات اول و دوم آن هم نیاز خواهد بود. تابع کاستلژو یک راه حل سریع برای این مسئله پیشنهاد می‌کند.

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}(t). \quad (54-2)$$

#### Subdivision ۷-۲

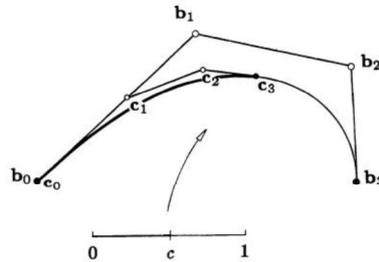
یک منحنی بزیر  $b^n$  معمولاً روی بازه  $[0,1]$  تعریف می‌شود اما می‌توان آن را روی هر بازه‌ای مثل  $[0,c]$  تعریف کرد. آن قسمت از این منحنی که نظیر  $[0,c]$  است را هم می‌توان با چند ضلعی بزیر (شکل ۲-۲۱) تعریف کرد. یافتن نقاط بزیر مربوطه را، *subdivision* منحنی بزیر می‌گویند. برای یافتن نقاط بزیر مجهول از اصل شکوفه دادن استفاده می‌شود.

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[0^{(n-i)}, c^{(i)}]. \quad (55-2)$$

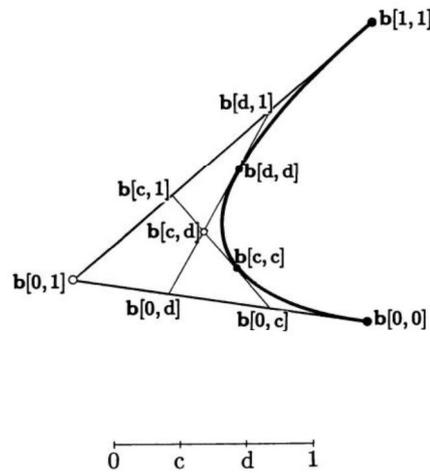
یا بصورت غیر شکوفه‌ای

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{b}_0^j(c). \quad (56-2)$$

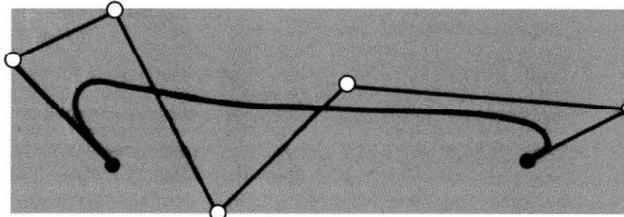
بخاطر تقارن منحنی‌های بزیر، نقاط کنترل بازه  $[c,1]$  از رابطه  $c_j = b_j^{n-j}(c)$  قابل محاسبه‌اند. شکل ۲-۲۲ *subdivision* در دو نقطه  $c$  و  $d$  را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲۱ دو چندضلعی بزییر توصیف کننده یک منحنی:  
یکی  $(b)$  مربوط به بازه پارامتری  $[0,1]$  و دیگری  $(c)$  مربوط به  $[0,c]$



شکل ۲-۲۲ ارزیابی یک منحنی درجه دو در دو پارامتر و آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نقاط بزییر آن بصورت شکوفه‌ای نشان داده شده‌اند.

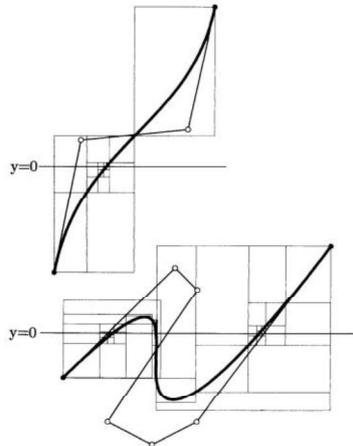


شکل ۲-۲۳ جعبه مین-ماکس یک منحنی نمونه.

مثال- دستورات *divide trim extend* تقاطع خط و منحنی و یافتن و یا انتخاب یک منحنی با استفاده از تابع *subdivision* می‌توان دستورات فوق را بخوبی انجام داد. برای امتداد دادن منحنی می‌توان از تابع *subdivision* با بازه‌ای فراتر از  $[0,1]$  مثلا بازه  $[1,d]$  عمل کرد.

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{b}[1^{(n-j)}, d^{(j)}] = \mathbf{b}_{n-j}^j(d). \quad (57-2)$$

این تابع پایداری خوبی ندارد و برای مقادیر بزرگ  $d$  باید از آن پرهیز شود.



شکل ۲-۲۴ یافتن نقاط تقاطع یک منحنی بزیر با خطوط مستقیم.

برای یافتن تقاطع خط با منحنی، می‌توان اول عملیات *trivial reject* را انجام داد؛ یعنی جعبه مین-ماکس (شکل ۲-۲۳) منحنی را تشکیل داده و در صورت تقاطع خط با آن، منحنی را در  $t = \frac{1}{2}$  تقسیم نمود و تست تقاطع را با هر دو جعبه‌ی منتجه امتحان کرد تا جعبه متقاطع را پیدا کرد. با تکرار این عملیات و علم به اینکه با تقسیم منحنی بطور متوالی منحنی به سمت خط میل می‌کند پس از چندبار تکرار و تست تقاطع دو خط با هم، نقطه تقاطع پیدا می‌شود. همین روال را با اصلاحاتی می‌توان برای انتخاب یک منحنی استفاده کرد (شکل ۲-۲۴).

## ۲-۸ شکل ماتریسی منحنی بزیر

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j C_j(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58-2)$$

که  $C_0, \dots, C_n$  نقاط کنترل بوده و ماتریس  $[M]$  ماتریس تبدیل و  $t^0, \dots, t^n$  توابع پایه تک جمله‌ای هستند. مولفه‌های ماتریس ضرایب در حالت  $C_i = B_i^n$  عبارتند از:

$$m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} \quad (59-2)$$

فرم ماتریسی از نظر عددی ناپایدار بوده و جاییکه دقت در محاسبات حائز اهمیت است باید پرهیز شود.

## ۹-۲ افزایش درجه (Degree elevation) منحنی بزیر

موقع طراحی یک منحنی بزیر گاهی معلوم می‌شود که منحنی با نقاط کنترل موجود انعطاف-پذیری کافی را ندارد و بهتر است نقطه کنترل دیگری به آن اضافه شود. برای این کار باید نقاط کنترل جدید  $\mathbf{b}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{n+1}^{(1)}$  را طوری تعیین کرد که همان منحنی قبلی با نقاط کنترل قدیم  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  را تولید کنند. فرض می‌شود:

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{x}(t) + t\mathbf{x}(t) \quad (۶۰-۲)$$

و یا

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}_i B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \frac{i+1}{n+1} \mathbf{b}_{i+1} B_{i+1}^{n+1}(t). \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}_i B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} B_i^{n+1}(t). \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{b}_i^{(1)} B_i^{n+1}(t) \end{aligned} \quad (۶۱-۲)$$

درحالی‌که نقاط کنترل جدید  $\mathbf{b}_i^{(1)}$  از میانبایی خطی تکه‌ای چند ضلعی کنترل قدیمی با پارامتر  $\frac{i}{n+1}$  بدست می‌آیند (شکل ۲-۲۵):

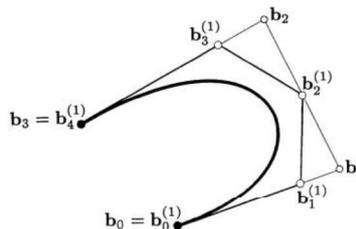
$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{b}_i; \quad i = 0, \dots, n+1 \quad (۶۲-۲)$$

افزایش درجه منحنی بزیر را با تابع شکوفه دادن هم می‌توان بصورت زیر انجام داد:

$$\mathbf{b}^{(1)}[t_1, \dots, t_{n+1}] = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{b}[t_1, \dots, t_{n+1} | t_j]. \quad (۶۳-۲)$$

در عبارت سمت راست معادله،  $t_j$  در هر مرحله حذف می‌شود. شکوفه به روش بالا پیدا می‌شود. نقاط کنترل جدید عبارت خواهند بود از:

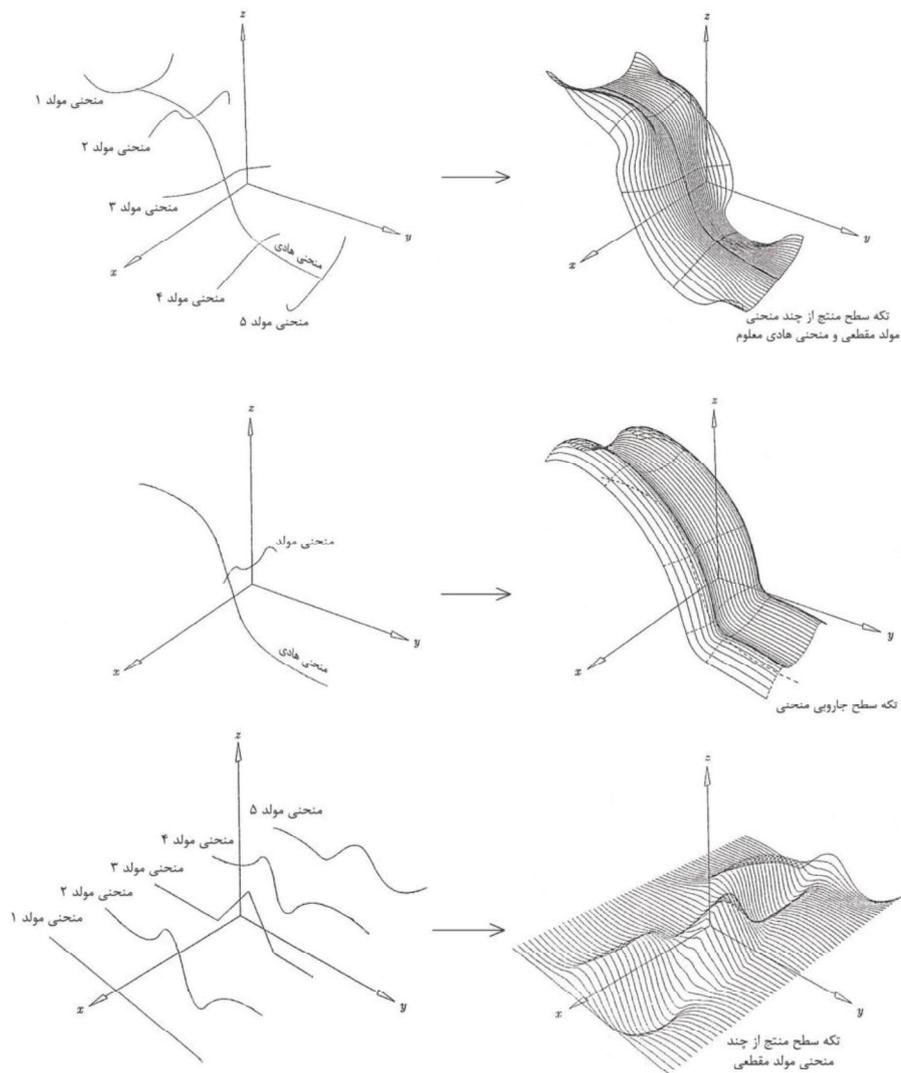
$$\mathbf{b}_i^{n+1} = \mathbf{b}^{(1)}[0^{(n+1-i)}, 1^{(i)}]. \quad (۶۴-۲)$$



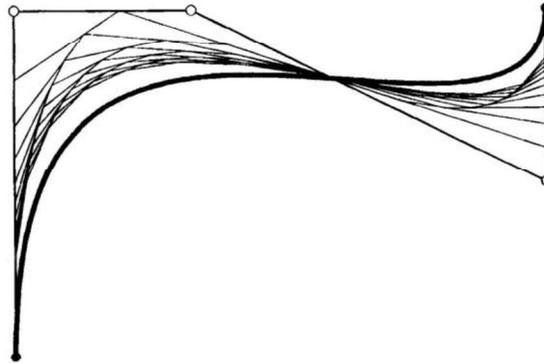
شکل ۲-۲۵ افزایش درجه منحنی: هر دو چندضلعی‌ها یک منحنی درجه سه را تعریف می‌کنند.

کاربردهای تابع افزایش درجه منحنی عبارتند از:

- (۱) در طراحی سطوحی که از یک مجموعه منحنی‌های مولد، تولید می‌شوند باید تمام منحنی‌ها هم درجه باشند. در شکل ۲-۲۶ سه نمونه از این سطوح نشان داده شده‌اند.
- (۲) در تبادل داده‌ها، برای سامانه‌هایی که از درجه معینی از منحنی‌ها استفاده می‌کنند به این تابع نیاز است.



شکل ۲-۲۶ چند نمونه از تکه سطوح تعریف شده توسط منحنی‌های هادی و مولد.



شکل ۲-۲۷ یکسری از چندضلعی‌ها که بسمت منحنی خودشان نزدیک می‌شوند. می‌توان نشان داد بعد از  $r$  بار تکرار افزایش درجه منحنی نقاط کنترل عبارتند از:

$$\mathbf{b}_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} \left( \frac{i-j}{n+r} \right)^r \quad (۲-۶۵)$$

اگر  $r \rightarrow \infty$ ، چند ضلعی کنترل بسمت خود منحنی میل می‌کند (شکل ۲-۲۷).

#### ۲-۱ کاهش درجه (Degree Reduction)

افزایش درجه را می‌توان به عنوان فرآیندی که یکسری «اضافات» را اعمال می‌کند نگاه کرد؛ منحنی با اطلاعاتی بیش از آنچه واقعا لازم است توصیف می‌شود. فرآیند عکس این، جالب‌تر بنظر می‌رسد و سوال این است که آیا می‌توان اضافات احتمالی در یک منحنی را حذف کرد؟ بطور مشخص‌تر، آیا می‌توان منحنی درجه  $n$  را بصورت منحنی درجه  $n-1$  نشان داد؟ درکل، کاهش درجه واقعی امکان‌پذیر نیست. مثلا منحنی درجه سوم با یک نقطه عطف را نمی‌توان (possibly) بطور درجه دو نوشت. بلکه کاهش درجه تنها یک روش تقریب منحنی موجود به یک منحنی با درجه پائین‌تر است.

اگر منحنی بزیبری با نقاط کنترل  $i: \mathbf{b}_i$ ;  $i = 0, \dots, n$  وجود داشته باشد برای بدست آوردن نقاط کنترل جدید  $i: \hat{\mathbf{b}}_i$ ;  $i = 0, \dots, n-1$  اول فرض می‌شود  $\mathbf{b}_i$  از  $\hat{\mathbf{b}}_i$  با تابع افزایش درجه بدست آمده‌اند؛ یعنی

$$\mathbf{b}_i = \frac{i}{n} \hat{\mathbf{b}}_{i-1} + \frac{n-i}{n} \hat{\mathbf{b}}_i; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (۲-۶۶)$$

از این معادله می‌توان دو معادله دیگر استخراج کرد:

$$\vec{\mathbf{b}}_i = \frac{n\mathbf{b}_i - i\vec{\mathbf{b}}_{i-1}}{n-i}; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (۲-۶۷)$$

$$\vec{b}_{i-1} = \frac{n\vec{b}_i - (n-i)\vec{b}_i}{i}; \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (68-2)$$

در روابط اخیر  $\vec{b}_{-1}$  و  $\vec{b}_n$  وجود ندارند ولی چون ضریبشان صفر می‌شود اشکالی بهم نمی‌زنند و داریم:

$$\vec{b}_i = (1 - \lambda_i) \vec{b}_i + \lambda_i \vec{b}_i; \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (69-2)$$

اگر از این معادلات  $\vec{b}_0 = \vec{b}_0$ ,  $\vec{b}_{n-1} = \vec{b}_n$  نشدند باید اینگونه آنها را اعمال کنیم. این یک ایراد تابع است.

### ۲-۱۱ منحنی‌های غیرپارامتری (دو بعدی یا مسطحه)

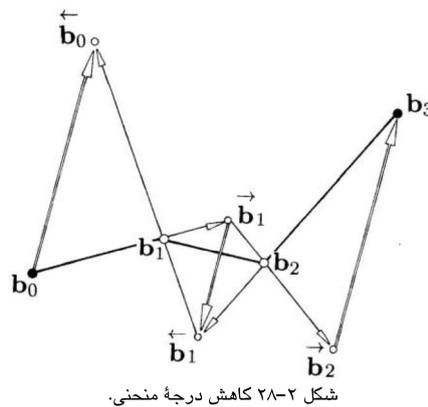
منحنی‌های تابعی  $y=f(x)$  را می‌توان بصورت  $\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$  نیز بیان کرد.  $f$  می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

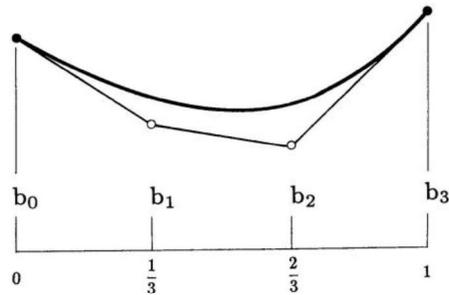
$$f(t) = b_0 B_0^n(t) + \dots + b_n B_n^n(t) = \sum b_j B_j^n \quad (70-2)$$

تابع  $f$  بر حسب توابع پایه برنشتاین بیان شده است با این تفاوت که  $b_j$  دیگر نقاط کنترل نیستند بلکه اعداد حقیقی هستند. به این ترتیب  $b_j$  تشکیل یک چند ضلعی نمی‌دهند گرچه منحنی‌های تابعی، زیر مجموعه‌ای از منحنی‌های پارامتری بوده و باید دارای چند ضلعی کنترل باشند. با استفاده از خاصیت دقیقی خطی منحنی‌های بزیر منحنی تابعی را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} j/n \\ b_j \end{bmatrix} B_j^n(t). \quad (71-2)$$

یعنی چند ضلعی کنترل تابع  $f(t) = \sum b_j B_j^n$  با نقاط  $(\frac{j}{n}, b_j)$  :  $j = 0, \dots, n$  داده می‌شود (شکل ۲-۲۹).





شکل ۲-۲۹ منحنی‌های تابعی: چند ضلعی کنترل یک چندجمله‌ای درجه سه دارای مقادیر مختصاتی  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  هستند.

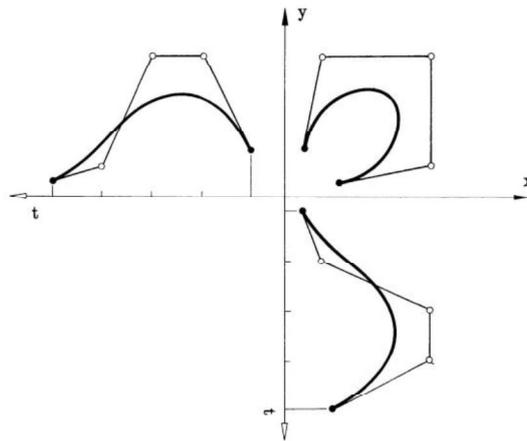
### ۱۲-۲ پلات‌های عرضی (cross plots) و انتگرال‌ها

منحنی‌های پارامتری و تابعی دوبعدی را می‌توان طبق شکل ۲-۳۰ رسم کرد. از این منحنی‌ها برای آنالیز منحنی‌های بزیر و بی‌اسپلاین استفاده می‌شود. برای حالت سه بعدی هم قابل رسم هستند ولی به کاربردی دو بعدی‌ها نیستند.

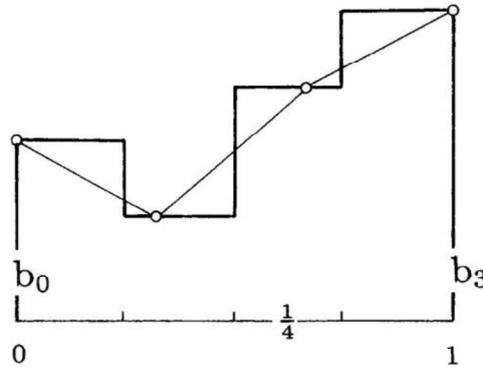
چند ضلعی بزیر  $p$  یک تابع بزیر از نقاط  $(\frac{j}{n}, b_j)$  تشکیل می‌شود. اگر مساحتی مثل  $AP$  به چند ضلعی بزیر  $p$  نسبت دهیم برابر خواهد بود با (شکل ۲-۳۱):

$$\mathcal{AP} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_j. \quad (۷۲-۲)$$

که تقریب مساحت زیر چند ضلعی کنترل بزیر است.



شکل ۲-۳۰ پلات‌های عرضی: یک منحنی بزیر دو بعدی به‌مراه دو تابع مختصاتی آن.

شکل ۲-۲۱ انتگرال‌ها: تقریبی برای سطح زیر  $P$ .**۱۳-۲ میانبایی هریمیتی مکعبی (Cubic Hermit)**

گاهی هدف از میانبایی چندجمله‌ای، یافتن منحنی‌ای است که ضمن عبور از یکسری نقاط، بردار مماس بر آن در بعضی از این نقاط معلوم باشند. یکی از منحنی‌های مفید برای این منظور منحنی‌های هریمیتی هستند. برای شروع، منحنی درجه سوم هریمیتی که از دو نقطه معلوم  $p_0, p_1$  گذشته و بردارهای مماس بر این منحنی در این نقاط به ترتیب  $m_0, m_1$  هستند در نظر گرفته می‌شود. هدف، یافتن یک منحنی چند جمله‌ای درجه سه است که:

$$p(0) = p_0,$$

$$\dot{p}(0) = m_0,$$

$$p(1) = p_1,$$

$$\dot{p}(1) = m_1,$$

(۷۳-۲)

اگر این منحنی به فرم بزییر درجه سه نوشته شود به چهار نقطه بزییر  $b_0, \dots, b_3$  نیاز است. دوتای آنها که عبارتند از:  $b_0 = p_0, b_3 = p_1$ . چون مشتقات انتهایی منحنی‌های بزییر به

$$\dot{p}(0) = 3\Delta b_0, \quad \dot{p}(1) = 3\Delta b_2.$$

شکل (طبق شکل ۲-۲۲) هستند. لذا:

$$b_1 = p_0 + \frac{1}{3}m_0, \quad b_2 = p_1 - \frac{1}{3}m_1.$$

یعنی:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 B_0^3(t) + \left(p_0 + \frac{1}{3}m_0\right) B_1^3(t) + \left(p_1 - \frac{1}{3}m_1\right) B_2^3(t) + p_1 B_3^3(t). \\ &= p_0 H_0^3(t) + m_0 H_1^3(t) + m_1 H_2^3(t) + p_1 H_3^3(t), \end{aligned}$$

(۷۴-۲)

که در این رابطه:

$$\begin{aligned}
 H_0^3(t) &= B_0^3(t) + B_1^3(t) \\
 H_1^3(t) &= \frac{1}{3}B_1^3(t), \\
 H_2^3(t) &= -\frac{1}{3}B_2^3(t), \\
 H_3^3(t) &= B_2^3(t) + B_3^3(t)
 \end{aligned}
 \tag{۷۵-۲}$$

چند جمله‌ای‌های هرمیتی درجه سه دارای خواص زیرند:

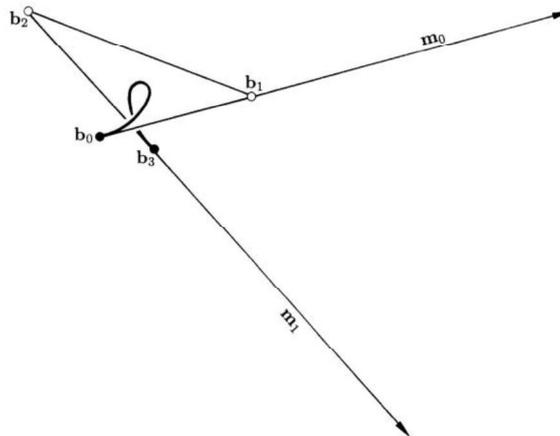
الف) نسبت به خود نقاط دو انتها و مشتق در آنها کاردینال (*cardinal*) هستند؛ یعنی در آنها هم مقدار تابع و هم مشتق آن صفر یا یک است:

$$\begin{aligned}
 H_0^3(0) &= 1, & \frac{d}{dt}H_0^3(0) &= 0, & \frac{d}{dt}H_0^3(1) &= 0, & H_0^3(1) &= 0, \\
 H_1^3(0) &= 0, & \frac{d}{dt}H_1^3(0) &= 1, & \frac{d}{dt}H_1^3(1) &= 0, & H_1^3(1) &= 0, \\
 H_2^3(0) &= 0, & \frac{d}{dt}H_2^3(0) &= 0, & \frac{d}{dt}H_2^3(1) &= 1, & H_2^3(1) &= 0, \\
 H_3^3(0) &= 0, & \frac{d}{dt}H_3^3(0) &= 0, & \frac{d}{dt}H_3^3(1) &= 0, & H_3^3(1) &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{۷۶-۲}$$

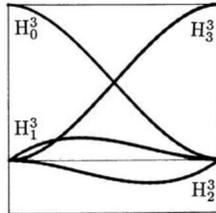
ب) معادله میانجی، ترکیبی از نقاط و بردارهاست:

ج) میانجی هرمیتی درجه سه تحت تبدیلات دامنه‌ای آفینی پایا نیست؛

د) منحنی هرمیتی تقارن ندارد؛ یعنی مثل منحنی بزییر با تعویض شماره‌گذاری ضرایب منحنی، یک منحنی واحد نتیجه نمی‌شود بلکه باید بردارهای مماس هم عکس شوند.



شکل ۲-۲۲ میانجی هرمیتی مکعبی.

شکل ۲-۳ چندجمله‌ای‌های هرمیتی مکعبی در بازه  $[0,1]$ **۱۴-۲ منحنی‌های بزییر نسبتی (Rational Bezier curves)**

اگرچه چندجمله‌ای‌ها مزایای زیادی دارند، بعضی از انواع منحنی‌ها و سطوح هستند که با چندجمله‌ای‌ها قابل نمایش دقیق نیستند. از جمله این منحنی‌ها و سطوح عبارتند از: دایره، بیضی-ها، هذلولی‌ها، استوانه‌ها، مخروط‌ها، کره‌ها و نظایر اینها. از ریاضیات کلاسیک می‌دانیم که تمام منحنی‌های مخروطی شامل دایره، را می‌توان با توابع نسبتی، بصورت نسبت دو چندجمله‌ای نشان داد. در این حالت

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)} \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad (۷۷-۲)$$

که  $W(u)$ ,  $Y(u)$ ,  $X(u)$  چند جمله‌ای بوده و مخرج توابع مختصات، یکسان است. بعنوان مثال دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدا مختصات را می‌توان بصورت

$$x(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad y(u) = \frac{2u}{1+u^2} \quad (۷۸-۲)$$

و بیضی‌ای به مرکز مبدا و شعاع‌های اصلی و فرعی به ترتیب ۲ و ۱ واقع بر محورهای  $x$  و  $y$  بصورت

$$x(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad y(u) = \frac{4u}{1+u^2} \quad (۷۹-۲)$$

قابل تعریف هستند.

منحنی بزییر نسبتی درجه  $n$  با رابطه

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (۸۰-۲)$$

بیان می‌شود. در این رابطه  $w_i$  مقادیر عددی معروف به وزن‌ها (weights) هستند. غالباً به ازای تمام  $w_i > 0$  است. این شرط تضمین می‌کند که به ازای  $u \in [0,1]$ ،  $W(u) > 0$ . رابطه بالا را به صورت زیر هم بیان می‌کنند:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (۸۱-۲)$$

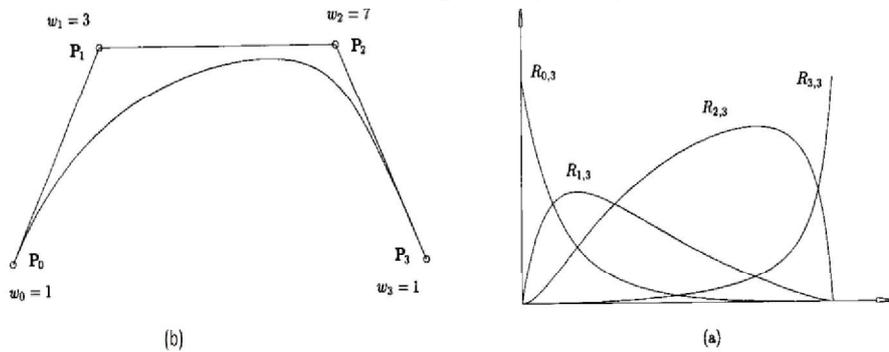
که

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u)w_j} \quad (۸۲-۲)$$

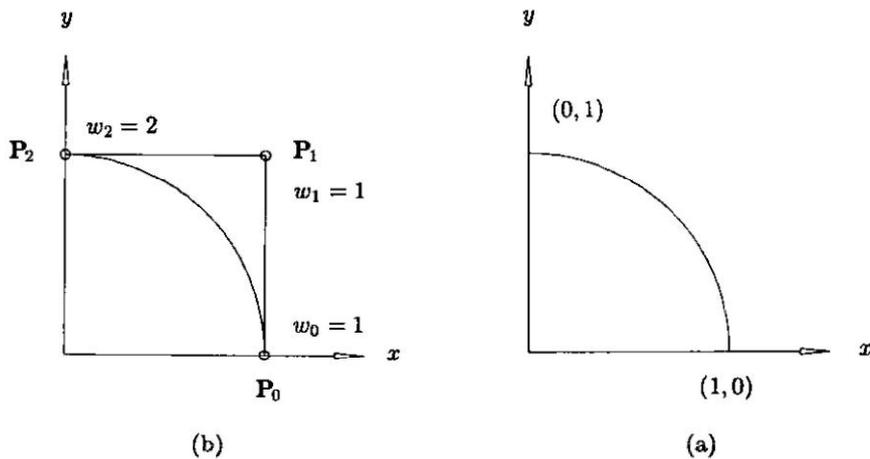
$R_{i,n}(u)$  توابع پایه نسبتی این منحنی هستند (شکل ۲-۳۴). اگر به ازای تمام آنها

$R_{i,n} = B_{i,n}$ ،  $w_i = 1$  یعنی حالت خاصی از  $R_{i,n}$  است.

مثال: کمان دایره‌ای بزییر نسبتی (شکل ۲-۳۵) یک منحنی نسبتی درجه دو است که از روابط بالا با انتخاب وزن‌ها بصورت  $w_2 = 2$ ،  $w_1 = 1$ ،  $w_0 = 1$  قابل تعریف خواهد بود.



شکل ۲-۳۴ (a) توابع پایه، (b) منحنی بزییر مکعبی نسبتی.



شکل ۲-۳۵ نمایش دایره واحد (a) با رابطه (۲-۷۸) (b) نمایش بزییری.

## ۲-۱۵ مختصات همگن

منحنی‌های نسبتی یک تعبیر هندسی زیبا دارند که باعث کارآمدی پردازش و کاهش حجم ذخیره داده‌ها می‌شود. ایده، استفاده از مختصات همگن برای نمایش یک منحنی نسبتی در فضای  $n$  بعدی بصورت یک منحنی چند جمله‌ای در فضای  $n+1$  بعدی است. برای شروع، نقطه‌ای در فضای  $E^3$ ، بصورت  $P = (x, y, z)$  در نظر گرفته می‌شود. در فضای چهار بعدی بصورت  $P^w = (wx, wy, wz, w) = (X, Y, Z, W)$ ،  $w \neq 0$ ، نوشته می‌شود.  $P$  با تقسیم مختصات  $P^w$  بر مختصه چهارم آن یعنی  $W$  بدست می‌آید؛ یعنی با نگاشت  $P^w$  از مبدا به هاپیر صفحه  $w=1$  (شکل ۲-۳۶). این نگاشت که با  $H$  نشان داده می‌شود یک نگاشت پرسپکتیو با مرکز آن در مبدا مختصات است:

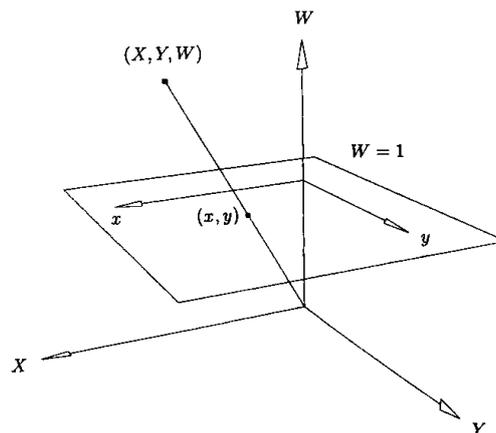
$$\mathbf{P} = H\{\mathbf{P}^w\} = H\{(X, Y, Z, W)\} = \begin{cases} \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right) & \text{if } W \neq 0 \\ \text{direction } (X, Y, Z) & \text{if } W = 0 \end{cases} \quad (۸۲-۲)$$

لازم به ذکر است که برای  $w_2, w_1, z, y, x$  با شرط  $w_1 \neq w_2$

$$\begin{aligned} H\{\mathbf{P}^{w_1}\} &= H\{(w_1x, w_1y, w_1z, w_1)\} = (x, y, z) \\ &= H\{(w_2x, w_2y, w_2z, w_2)\} = H\{\mathbf{P}^{w_2}\} \end{aligned} \quad (۸۴-۲)$$

حال برای یک مجموعه معین از نقاط کنترل،  $\{p_i\}$  و وزن‌ها  $\{w_i\}$ ، نقاط کنترل وزن دار  $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$  تشکیل داده می‌شود. منحنی بزیبر غیرنسبتی در فضای چهار بعدی عبارت است از:

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i^w \quad (۸۵-۲)$$



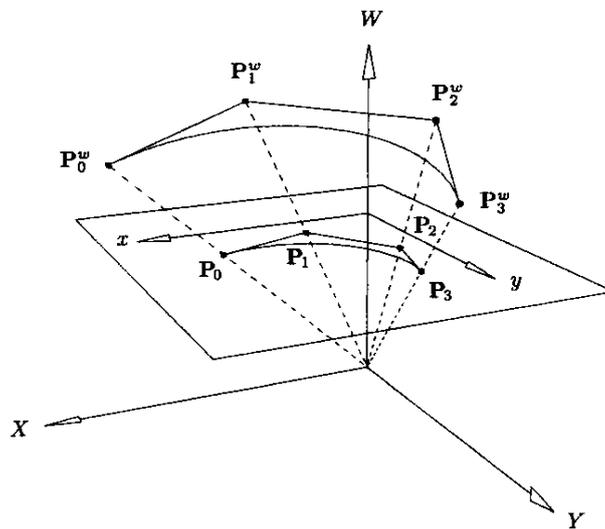
شکل ۲-۳۶ نمایش نقاط اقلیدسی به فرم همگن.

سپس، با اعمال نگاهت پرسپکتیو  $H$  به  $C^W(u)$  منحنی بزییر نسبتی متناظر بدست خواهد آمد. در این حالت داریم:

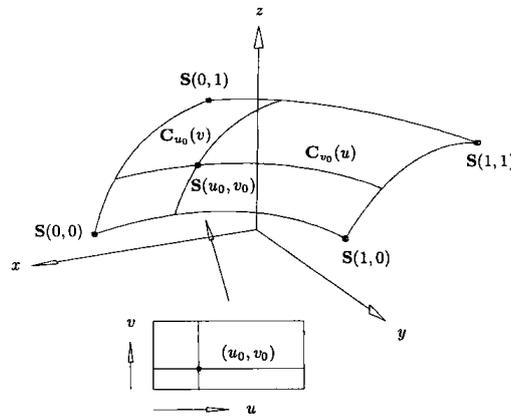
$$\begin{aligned} X(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i x_i & Y(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i y_i \\ Z(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i z_i & W(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i \end{aligned} \quad (۸۶-۲)$$

و

$$\begin{aligned} x(u) &= \frac{X(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i x_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i} \\ y(u) &= \frac{Y(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i y_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i} \\ z(u) &= \frac{Z(u)}{W(u)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i z_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i} \end{aligned} \quad (۸۷-۲)$$



شکل ۲-۳۷ یک نمونه ایجاد هندسی از یک منحنی بزییر نسبتی.



شکل ۲-۳۸ یک سطح حاصل ضرب تانسوری و دو منحنی ایزوپارامتری روی آن.

## ۲-۱۶ سطوح حاصل ضرب تانسوری

منحنی  $C(u)$  یک تابع بردار-مقدار از یک پارامتر است. این منحنی نگاشتی از یک پاره خط مستقیم به فضای سه بعدی اقلیدسی است. یک سطح، تابع بردار-مقدار از دو پارامتر  $u$  و  $v$  است که نشان دهنده نگاشتی از یک منطقه  $R$ ، از صفحه  $uv$  به فضای سه بعدی اقلیدسی است. یعنی  $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ،  $(u, v) \in R$ . طرح‌ها و مراجع مختلفی برای نمایش سطوح ارائه شده‌اند. فرق بین این طرح‌ها در نوع انتخاب توابع مختصات و نوع منطقه  $R$  است. احتمالاً ساده‌ترین و رایج‌ترین روش بکار رفته در مدل‌سازی هندسی، طرح حاصل ضرب تانسوری است. این روش اساساً یک طرح منحنی دو جهتی است که از توابع پایه و ضرایب هندسی استفاده می‌کند. توابع پایه، توابع دو متغیره از  $u$  و  $v$  هستند که بصورت حاصل ضرب-هایی از توابع پایه تک متغیره تشکیل می‌شوند. ضرایب هندسی (از نظر توپولوژیکی) در یک شبکه دو جهتی  $n \times m$  مرتب می‌شوند. بنابراین سطح حاصل ضرب تانسوری به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_i(u)g_j(v)\mathbf{b}_{i,j} \quad (۲-۸۸)$$

که

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \\ 0 \leq u, v \leq 1 \end{cases}$$

دامنه  $(u, v)$  این نگاشت یک مربع است (در حالت کلی یک مستطیل). یکی از انواع این سطوح، سطوح بزیبر غیرنسبتی هستند. این نوع سطوح با در نظر گرفتن یک شبکه دو جهتی از نقاط کنترل بدست آمده و چند جمله‌ایهای برنشتاین تک متغیری در آنها ضرب می‌شوند:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (89-2)$$

شکل ۲-۳۹ تابع پایه  $B_{1,3}(v)$  و  $B_{0,2}(u)$  و شکل ۲-۳۹b سطح بزییر درجه ۲×۲ درجه ۳ را نشان می‌دهند. برای  $u = u_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{u_0}(v) = \mathbf{S}(u_0, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u_0) B_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j} \\ &= \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \left( \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \mathbf{Q}_j(u_0) \end{aligned} \quad (90-2)$$

که

$$\mathbf{Q}_j(u_0) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u_0) \mathbf{P}_{i,j} \quad j = 0, \dots, m$$

یک منحنی بزییر روی سطح است. بهمین ترتیب  $\mathbf{C}_{v_0}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{Q}_i(v_0)$  یک منحنی بزییر ایزومنحنی  $u$  (isocurve) روی سطح است. سطوح بزییر، مانند منحنی‌های آنها، دارای خواص پوسته محدب، پایایی نسبت به تبدیلات آفینی و میانجایی چهار نقطه گوشه‌ای هستند. فقط برای سطوح بزییر خاصیت محو تغییرات وجود ندارد.

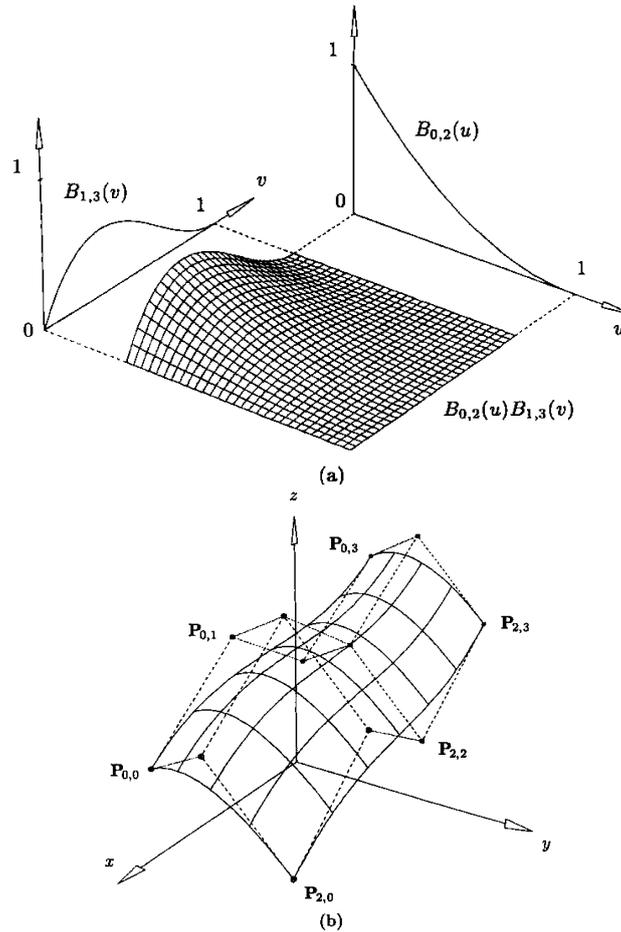
### ۱۷-۲ سطح بزییر نسبتی (Rational Bezier surface)

سطح بزییر نسبتی بصورت تصویر پرسپکتیو یک سطح بزییر چندجمله‌ای چهار بعدی تعریف می‌شود:

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w \quad (91-2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) = H\{\mathbf{S}^w(u, v)\} &= \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) w_{i,j}} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \end{aligned} \quad (92-2)$$

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) w_{i,j}}{\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m B_{r,n}(u) B_{s,m}(v) w_{r,s}} \quad \text{که}$$

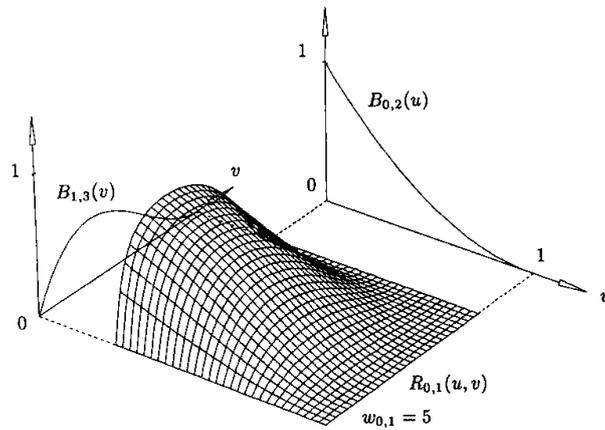


شکل ۲-۳۹ (a) تابع پایه و (b) یک سطح بزییر درجه (۲,۳).

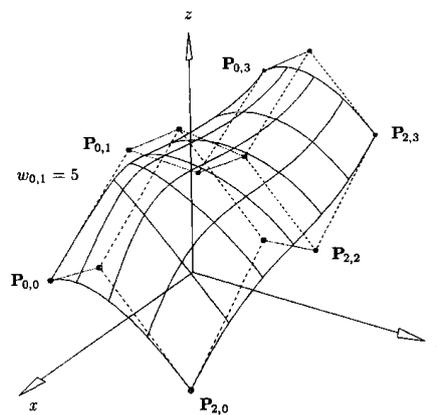
شکل ۲-۴۰ (a) یک تابع پایه نسبی و شکل ۲-۴۰ (b) سطح بزییر نسبی درجه ۲ × ۲ درجه ۳ نظیر آن را نشان می‌دهند.

با فرض  $W_{i,j} > 0$  به ازای تمام  $i$  و  $j$ ها، تمام خواص مربوط به سطح بزییر غیرنسبی، بطور طبیعی به سطوح نسبی تعمیم می‌یابند. بعلاوه، اگر به ازای تمام  $i$  و  $j$ ها  $W_{i,j} = 1$ ، آنگاه  $R_{i,j}(u, v) = B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$  و سطح مربوطه غیرنسبی خواهد بود. تمرین: نشان دهید سطح شکل گرفته با نقاط کنترل زیر یک استوانه به شعاع واحد است. به شرطی که منحنی‌ها در امتداد  $\alpha$  درجه یک و در امتداد موازی صفحه  $\gamma$  درجه ۲ باشند.

$$P_{0,0}^w(1,1,0,1), P_{0,1}^w(-1,1,0,1), P_{1,0}^w(1,1,1,1), P_{1,1}^w(-1,1,1,1), P_{2,0}^w(2,0,2,2), P_{2,1}^w(-2,0,2,2)$$



(a)



(b)

شکل ۲-۴۰ (a) تابع پایه نسبتی و (b) یک سطح بزییرنسبتی درجه (۲,۳).

### ۱۸-۲ منحنی‌های اسپلاین (Spline curves) به شکل بزییر

منحنی‌های بزییر ابزار قدرتمندی در طراحی منحنی فراهم می‌کنند اما محدودیت‌هایی هم دارند. اگر منحنی مورد نظر شکل پیچیده‌ای داشته باشد منحنی بزییر نظیر آن بطور اجتناب‌ناپذیری دارای درجات بالا (بالتر از ۱۰) خواهد بود. با این وجود، می‌توان چنین منحنی‌های پیچیده‌ای را با منحنی‌های بزییر مرکب معروف به «بی‌اسپلاین (B-spline)» مدل کرد. این منحنی‌ها، منحنی‌های چند جمله‌ای تکه‌ای (piecewise polynomial curves) هستند.

موقع تولید یک منحنی بزییر مجزا می‌توان فرض کرد که منحنی، نگاشتی از بازه  $0 \leq t \leq 1$  است. فرض می‌شود که در مورد منحنی‌های مرکب تکه‌ای، هر تکه از اسپلاین نگاشتی از بازه  $[0,1]$  بوده و کل منحنی نگاشتی از یک مجموعه از بازه‌ها است بطوریکه طول نسبی آنها نقش

مهمی بازی می‌کند. یک منحنی اسپلاینی  $C$  نگاشت پیوسته‌ای از یک مجموعه بازه-های  $u_0 < \dots < u_L$  به  $E^3$  است که هر بازه  $[u_i, u_{i+1}]$  به یک تکه منحنی چند جمله‌ای نگاشته می‌شود. هر عدد حقیقی  $u_i$  یک گره (*knot*) نامیده می‌شود. به مجموعه تمام  $u_i$  ها بردارگره‌ها (*knot vector*) می‌گویند. به ازای هر پارامتر  $u$  یک نقطه  $C(u)$  روی منحنی وجود دارد. برای هر بازه  $[u_i, u_{i+1}]$  می‌توان یک پارامتر محلی  $t$  به صورت زیر تعریف کرد (شکل ۲-۴۱):

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\Delta_i}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (۲-۹۳)$$

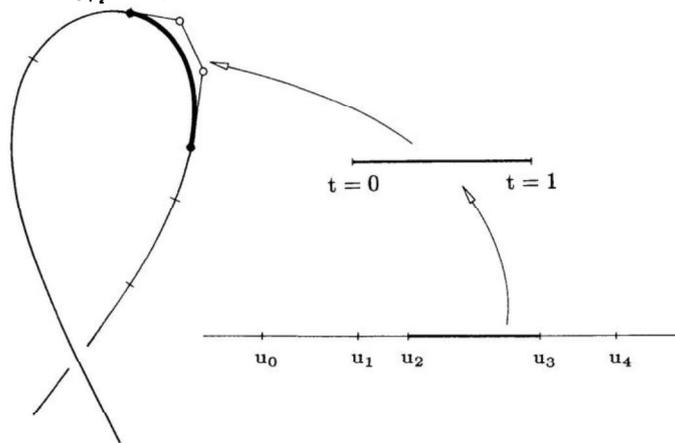
تکه  $i$ ام از منحنی مرکب، با  $c_i$  نشان داده می‌شود و  $c(u) = c_i(t)$  یک نقطه روی تکه  $i$ ام خواهد بود. نقاط پیوندگامی یا اتصال عبارتند از:  $(1) c_i(0) = c_i(u_i) = c_{i-1}(1)$ . مجموعه چندضلعی بزیر تمام تکه منحنی‌ها، تشکیل یک چند ضلعی کلی می‌دهد که به آن چند ضلعی بزیر تکه‌ای  $C$  می‌گویند.

#### ۲-۱۸-۱ توابع پایه بی‌اسپلاین

اگر  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  بردار گره‌ها باشد که به ازای  $i = 0, \dots, m-1$  شرط  $u_i \leq u_{i+1}$  برقرار باشد تابع پایه بی‌اسپلاین درجه  $p$  (مرتبه  $p+1$ ) عبارت است از:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (۲-۹۴)$$



شکل ۲-۴۱ مختصات محلی: به بازه  $[u_i, u_{i+1}]$  یک مختصه محلی نسبت داده می‌شود. سومین تکه از منحنی اسپلاینی با چند ضلعی بزیرش نشان داده شده است.

خواص توابع پایه بی اسپلاین به شرح زیرند:

- (۱) برای  $N_{i,p}(u)$ ،  $p > 0$  ترکیب خطی از دو تابع پایه درجه  $(n-1)$  است؛  
 (۲) برای محاسبه یک مجموعه از توابع پایه باید بردار گره‌های  $u$  و درجه منحنی  $p$  را معرفی کرد؛

- (۳) نیم بازه باز  $[u_i, u_{i+1}]$ ،  $i$  امین بازه گرهی (*ith knot span*) نامیده می‌شود. طول این نیم بازه می‌تواند صفر باشد چون لازم نیست گره‌ها متفاوت باشند. بازه‌های گرهی بطول غیرصفر تکه منحنی‌های چندجمله‌ای مجزا را تعریف می‌کنند؛  
 (۴) محاسبه توابع درجه  $p$ ، یک جدول مثلثی منقطع تشکیل می‌دهد:

$$\begin{array}{cccc}
 N_{0,0} & & & \\
 & N_{0,1} & & \\
 N_{1,0} & & N_{0,2} & \\
 & N_{1,1} & & N_{0,3} \\
 N_{2,0} & & N_{1,2} & \\
 & N_{2,1} & & N_{1,3} \\
 N_{3,0} & & N_{2,2} & \vdots \\
 & N_{3,1} & & \vdots \\
 N_{4,0} & & \vdots & \\
 & \vdots & & 
 \end{array}$$

(۵)  $N_{i,p}(u) = 0$  اگر  $u$  خارج نیم بازه  $[u_i, u_{i+p+1}]$  باشد؛

- (۶) در هر نیم بازه گرهی معین  $[u_j, u_{j+1}]$ ، حداکثر  $p+1$  تابع از  $N_{i,p}$  شامل توابع  $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$  غیرصفرند. مثلاً روی  $[u_3, u_4]$  فقط تابع درجه صفر  $N_{3,0}$  غیرصفر است. به همین ترتیب تنها توابع درجه سوم غیرصفر روی  $[u_3, u_4]$ ،  $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$  هستند؛  
 (۷) به ازای هر  $i$  و  $p$  و  $u$   $N_{i,p}(u) \geq 0$ ؛

$$(۸) \text{ برای هر نیم بازه گرهی اختیاری } [u_j, u_{j+1}], \sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$$

- (۹) تمام مشتقات  $N_{i,p}(u)$  در داخل بازه گرهی (جائیکه یک چندجمله‌ای است) وجود دارند. در یک گره،  $N_{i,p}(u)$ ،  $p-k$  بار مشتق‌پذیر پیوسته است که  $k$  تعداد تکرار (تعدد *multiplicity*) گره است. پس با افزایش درجه منحنی پیوستگی افزایش و با افزایش تعدد گرهی، پیوستگی کاهش می‌یابد.

مثال: اگر  $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$  و  $p=2$  باشد توابع پایه درجه صفر، یک و دو در اینجا محاسبه شده‌اند:

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0 \quad \text{for } -\infty < u < \infty$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{3,0} = \begin{cases} 1 & 1 \leq u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{4,0} = \begin{cases} 1 & 2 \leq u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{5,0} = \begin{cases} 1 & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{6,0} = 0 \quad \text{for } -\infty < u < \infty$$

$$N_{7,0} = \begin{cases} 1 & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{8,0} = N_{9,0} = 0 \quad \text{for } -\infty < u < \infty$$

$$N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty$$

$$N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{2,1} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{2-u}{2-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & 0 \leq u < 1 \\ 2-u & 1 \leq u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{u-1}{2-1} N_{3,0} + \frac{3-u}{3-2} N_{4,0} = \begin{cases} u-1 & 1 \leq u < 2 \\ 3-u & 2 \leq u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{4,1} = \frac{u-2}{3-2} N_{4,0} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,0} = \begin{cases} u-2 & 2 \leq u < 3 \\ 4-u & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{5,1} = \frac{u-3}{4-3} N_{5,0} + \frac{4-u}{4-4} N_{6,0} = \begin{cases} u-3 & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{6,1} = \frac{u-4}{4-4} N_{6,0} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,0} = \begin{cases} 5-u & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{7,1} = \frac{u-4}{5-4} N_{7,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,0} = \begin{cases} u-4 & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{8,1} = \frac{u-5}{5-5} N_{8,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{9,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty$$

$$N_{2,2} = \frac{u-0}{2-0}N_{2,1} + \frac{3-u}{3-1}N_{3,1} = \begin{cases} 1/2u^2 & 0 \leq u < 1 \\ -3/2 + 3u - u^2 & 1 \leq u < 2 \\ 1/2(3-u)^2 & 2 \leq u < 3 \end{cases}$$

$$N_{3,2} = \frac{u-1}{3-1}N_{3,1} + \frac{4-u}{4-2}N_{4,1} = \begin{cases} 1/2(u-1)^2 & 1 \leq u < 2 \\ -11/2 + 5u - u^2 & 2 \leq u < 3 \\ 1/2(4-u)^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases}$$

$$N_{4,2} = \frac{u-2}{4-2}N_{4,1} + \frac{4-u}{4-3}N_{5,1} = \begin{cases} 1/2(u-2)^2 & 2 \leq u < 3 \\ -16 + 10u - 3/2u^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases}$$

$$N_{5,2} = \frac{u-3}{4-3}N_{5,1} + \frac{5-u}{5-4}N_{6,1} = \begin{cases} (u-3)^2 & 3 \leq u < 4 \\ (5-u)^2 & 4 \leq u < 5 \end{cases}$$

$$N_{6,2} = \frac{u-4}{5-4}N_{6,1} + \frac{5-u}{5-4}N_{7,1} = 2(u-4)(5-u) \quad 4 \leq u < 5$$

$$N_{7,2} = \frac{u-4}{5-4}N_{7,1} + \frac{5-u}{5-5}N_{8,1} = (u-4)^2 \quad 4 \leq u < 5$$

توابع  $N_{0,2}, N_{1,2}, N_{2,2}, N_{5,2}, N_{6,2}$  روی بازه‌های گرهی زیر محاسبه شده و خارج این بازه‌ها صفرند.

$$N_{0,2} : \{0, 0, 0, 1\}$$

$$N_{1,2} : \{0, 0, 1, 2\}$$

$$N_{2,2} : \{0, 1, 2, 3\}$$

$$N_{5,2} : \{3, 4, 4, 5\}$$

$$N_{6,2} : \{4, 4, 5, 5\}$$

بنابراین دو نوع تعدد داریم: تعدد یک گره در بردار گرهی و تعدد یک گره نسبت به یک تابع پایه خاص.

## ۲-۱۸-۲ مشتقات توابع پایه بی‌اسپلاین

مشتقات توابع پایه بی‌اسپلاین از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left( \frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (95-2)$$

$N_{i,p}^{(k)}(u)$ ، مشتق  $k$ ام  $N_{i,p}(u)$  را نشان می‌دهد. روش دیگر محاسبه مشتقات توابع پایه بی‌اسپلاین عبارت است از:

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad (96-2)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 a_{0,0} &= 1 \\
 a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i} \\
 a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1} - u_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1 \\
 a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}}
 \end{aligned} \tag{۹۷-۲}$$

رابطه دیگری هم برای محاسبه مشتقات تابع  $N_{i,p}(u)$  آورده‌اند که برحسب مشتق تابع از درجات کمتر است:

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p}{p-k} \left( \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}^{(k)} + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{(k)} \right) \tag{۹۸-۲}$$

$$k = 0, \dots, p-1$$

### ۲-۱۸-۳ نکاتی در خصوص بردار گره‌های $U$

وقتی درجه منحنی ثابت باشد بردار گره‌ها به طور کامل توابع  $N_{i,p}(u)$  را تعیین می‌کند. چند نوع بردار گرهی متفاوت وجود دارند و در ادبیات موضوعی واژه‌های متفاوتی بکار رفته است. در اینجا فقط بردارهای گرهی غیرپریودی (یا قفل شده *clamped* یا باز *open*) در نظر گرفته شده است که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \{ \underbrace{a_1, \dots, a_p}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b_1, \dots, b_p}_{p+1} \} \tag{۹۹-۲}$$

در این حالت دو خاصیت اضافی خواهیم داشت:

(۱) اگر  $U$  به شکل زیر باشد توابع پایه همان توابع برنشتاین درجه  $p$  هستند:

$$U = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \}$$

(۲) به ازای  $m+1$  گره در  $U$ ،  $n+1$  تابع پایه وجود خواهد داشت که

$$n = m - p - 1$$

اگر فاصله بین گره‌ها در داخل بردار  $U$  یکسان باشد به  $U$  بردار گرهی یکنواخت می‌گویند؛ در غیر این صورت غیریکنواخت خواهد بود. بردار گرهی  $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$  غیریکنواخت است زیرا گره داخلی ۴ دوبار تکرار شده است ولی  $U = \{0,0,0,0,2,4,6,8,8,8,8\}$  یکنواخت است.  $U = \{0,0,0,0,1,5,6,8,8,8,8\}$  هم غیریکنواخت است.

## ۲-۱۸-۴ تابع های محاسباتی

تابع ۲-۱ یافتن بازه مربوط به  $u$ 

```

int FindSpan(n,p,u,U)
{ /* Determine the knot span index */
  /* Input: n,p,u,U */
  /* Return: the knot span index */
  if (u == U[n+1]) return(n); /* Special case */
  low = p; high = n+1; /* Do binary search */
  mid = (low+high)/2;
  while (u < U[mid] || u >= U[mid+1])
  {
    if (u < U[mid]) high = mid;
    else low = mid;
    mid = (low+high)/2;
  }
  return(mid);
}

```

تابع ۲-۴ محاسبه توابع پایه غیرصفر:

```

BasisFuns(i,u,p,U,N)
{ /* Compute the nonvanishing basis functions */
  /* Input: i,u,p,U */
  /* Output: N */
  N[0]=1.0;
  for (j=1; j<=p; j++)
  {
    left[j] = u-U[i+1-j];
    right[j] = U[i+j]-u;
    saved = 0.0;

    for (r=0; r<j; r++)
    {
      temp = N[r]/(right[r+1]+left[j-r]);
      N[r] = saved+right[r+1]*temp;
      saved = left[j-r]*temp;
      N[j] = saved;
    }
  }
}

```

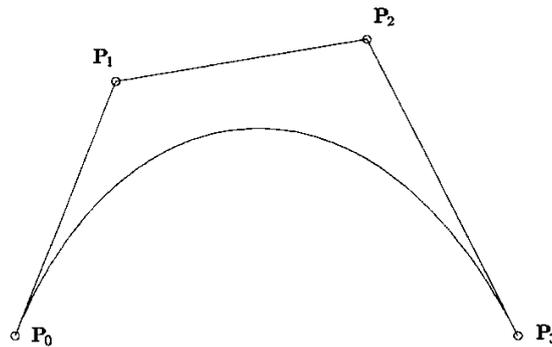
تابع ۲-۵ برای محاسبه مشتق  $n$  ام ( $n \leq p$ ) توابع پایه غیرصفر خروجی تابع یک آرایه دو بعدی  $ders[k][j]$  است که حاوی مشتق  $k$  ام تابع  $N_{i-p+j,p}$  است

```

DersBasisFuns(i,u,p,n,U,ders)
{ /* Compute nonzero basis functions and their */
  /* derivatives. First section is A2.2 modified */
  /* to store functions and knot differences. */
  /* Input: i,u,p,n,U */
  /* Output: ders */
  ndu[0][0]=1.0;
  for (j=1; j<=p; j++)
  {
    left[j] = u-U[i+1-j];
    right[j] = U[i+j]-u;
    saved = 0.0;
    for (r=0; r<j; r++)
    {
      /* Lower triangle */
      ndu[j][r] = right[r+1]+left[j-r];
      temp = ndu[r][j-1]/ndu[j][r];
      /* Upper triangle */
      ndu[r][j] = saved+right[r+1]*temp;
      saved = left[j-r]*temp;
    }
    ndu[j][j] = saved;
  }
}

```

$\{0 \leq k \leq n$  و  $0 \leq j \leq p\}$ . این تابع بر اساس رابطه (۲-۹۷) نوشته شده است.



A cubic B-spline curve on  $U = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$ , i.e., a cubic Bézier curve.

شکل ۲-۲۲

```

}
for (j=0; j<=p; j++) /* Load the basis functions */
  ders[0][j] = ndu[j][p];
/* This section computes the derivatives (Eq. [2.9]) */
for (r=0; r<=p; r++) /* Loop over function index */
{
  s1=0;  s2=1; /* Alternate rows in array a */
  a[0][0] = 1.0;
  /* Loop to compute kth derivative */
  for (k=1; k<=n; k++)
  {
    d = 0.0;
    rk = r-k;  pk = p-k;
    if (r >= k)
    {
      a[s2][0] = a[s1][0]/ndu[pk+1][rk];
      d = a[s2][0]*ndu[rk][pk];
    }
    if (rk >= -1)  j1 = 1;
    else  j1 = -rk;
    if (r-1 <= pk)  j2 = k-1;
    else  j2 = p-r;
    for (j=j1; j<=j2; j++)
    {
      a[s2][j] = (a[s1][j]-a[s1][j-1])/ndu[pk+1][rk+j];
      d += a[s2][j]*ndu[rk+j][pk];
    }
    if (r <= pk)
    {
      a[s2][k] = -a[s1][k-1]/ndu[pk+1][r];
      d += a[s2][k]*ndu[r][pk];
    }
    ders[k][r] = d;
    j=s1;  s1=s2;  s2=j; /* Switch rows */
  }
}
/* Multiply through by the correct factors */
/* (Eq. [2.9]) */
r = p;
for (k=1; k<=n; k++)
{
  for (j=0; j<=p; j++)  ders[k][j] *= r;
  r *= (p-k);
}
}

```

## ۲-۱۹ منحنی‌های بی‌اسپلاین

یک منحنی بی‌اسپلاین درجه  $p$  با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b \quad (2-10)$$

در این رابطه  $\{P_i\}$  نقاط کنترل و  $\{N_{i,p}(u)\}$  توابع پایه بی‌اسپلاین درجه  $p$  ام هستند. توابع پایه روی بردار گرهی غیرپریودی (غیریکنواخت)

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

تعریف می‌شوند و اگر  $a$  و  $b$  ذکر نشده باشند معمولاً  $a=0$  و  $b=1$  هستند. شکل‌های ۲-۴۲ تا ۲-۵۵ نمونه‌هایی از منحنی‌های بی‌اسپلاین را نشان می‌دهند.

سه مرحله برای محاسبه یک نقطه روی منحنی بی‌اسپلاین در یک مقدار  $u$  ثابت لازم است:

(۱) یافتن بازه گرهی مربوط به  $u$ ;

(۲) محاسبه توابع پایه غیرصفر؛

(۳) ضرب مقادیر غیرصفر توابع پایه در نقاط کنترل متناظر آنها.

تابع ۲-۶ مراحل فوق را اجرا می‌کند.

```
CurvePoint(n,p,U,P,u,C)
{ /* Compute curve point */
  /* Input: n,p,U,P,u */
  /* Output: C */
  span = FindSpan(n,p,u,U);
  BasisFuns(span,u,p,U,N);
  C = 0.0;
  for (i=0; i<=p; i++)
    C = C + N[i]*P[span-p+i];
}
```

بعضی از خواص منحنی‌های بی‌اسپلاین که ناشی از ماهیت توابع پایه آنهاست عبارتند از:

(۱) اگر  $p=n$  و  $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  باشند  $C(u)$  یک منحنی بزیر (شکل ۲-۴۲)

خواهد بود:

(۲)  $C(u)$  یک منحنی چند جمله‌ای تکه‌ای است. درجه،  $p$ ، تعداد نقاط کنترل،  $n+1$  و تعداد

گره‌ها،  $m+1$  هستند که با رابطه  $m=n+p+1$  مربوطند. شکل‌های ۲-۴۳ و ۲-۴۴ توابع

پایه و تکه منحنی‌های بی‌اسپلاین نظیر بازه‌های گرهی جداگانه را نشان می-

دهند:

(۳) میانمایی نقاط انتهایی:  $C(1) = P_n$ ,  $C(0) = P_0$

(۴) پایایی آفینی منحنی‌های بی‌اسپلاین ناشی از ماهیت ترکیب خطی آنها;

۵) خاصیت پوسته محدب: در شکل‌های ۲-۴۵ تا ۲-۴۷ خاصیت پوسته محدب این منحنی‌ها نمایش داده شده است. منحنی در پوسته محدب چند ضلعی کنترل خود محاط است. در واقع اگر  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ ،  $p \leq i < m - p - 1$  باشند،  $C(u)$  در پوسته محدب متشکل از نقاط کنترل  $P_{i-p}, \dots, P_i$  محصور خواهد بود. شکل ۲-۴۷ نشان می‌دهد که چگونه یک منحنی درجه دو دارای یک قسمت خطی ایجاد می‌شود. چون نقاط  $P_4, P_3, P_2$  روی یک خط واقع هستند خاصیت پوسته محدب ایجاد می‌کند که منحنی از  $C(\frac{2}{5})$  تا  $C(\frac{3}{5})$  یک پاره خط مستقیم باشد؛

۶) طرح اصلاح موضعی: با جابجا کردن  $P_i$ ،  $C(u)$  تنها در بازه  $[u_i, u_{i+1}]$  تغییر می‌کند (شکل ۲-۴۸). این خاصیت از صفر بودن  $N_{i,p}(u)$  برای  $u \notin [u_i, u_{i+1}]$  ناشی می‌شود؛

۷) چند ضلعی کنترل یک تقریب خطی تکه‌ای برای منحنی را نشان می‌دهد. بطور کلی، هر چه درجه منحنی کمتر باشد منحنی بی‌اسپلاین به چند ضلعی کنترل نزدیک‌تر خواهد بود. (شکل‌های ۲-۴۹ تا ۲-۵۰). منحنی‌های شکل ۲-۵۰ با استفاده از شش نقطه کنترل یکسان و بردارهای گرهی زیر تعریف می‌شوند.

$$p = 1 : U = \left\{ 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1 \right\}$$

$$p = 2 : U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}$$

$$p = 3 : U = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1 \right\}$$

$$p = 4 : U = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1 \right\}$$

$$p = 5 : U = \{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \}$$

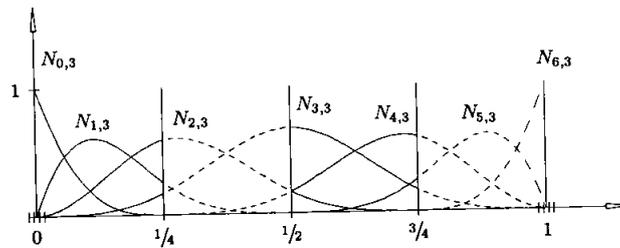
در واقع هر چه درجه منحنی کمتر باشد تعداد نقاط کنترل کمتری در محاسبه  $C(u)$  به ازای هر  $u_0$  معین سهم خواهند بود؛

۸) خاصیت محو تغییرات: هیچ صفحه‌ای دارای نقاط تقاطع با منحنی بیش از تعداد نقاط تقاطع با چند ضلعی کنترل آن نیست. در مورد منحنی‌های دو بعدی قانون بالا برای تقاطع خط با منحنی صدق می‌کند؛

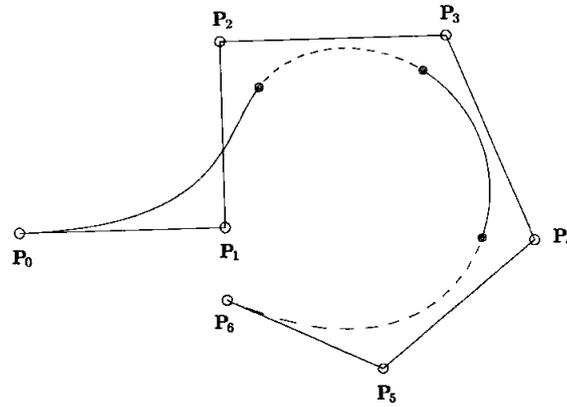
۹) پیوستگی و مشتق‌پذیری  $C(u)$  از پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع  $N_{i,p}(u)$  تبعیت می‌کند (شکل‌های ۲-۵۱ تا ۲-۵۳)؛

۱۰) استفاده از چند نقطه کنترل (منطبق برهم) ممکن و گاهی مفید است. شکل ۲-۵۴ یک منحنی درجه ۲ را با دو نقطه کنترل دوپل  $P_2 = P_3$  نشان می‌دهد. قسمت

جالب این منحنی بین  $C(\frac{1}{4})$  و  $C(\frac{3}{4})$  قرار دارد. در واقع  $C(\frac{1}{2}) = P_2 = P_3$  و پاره خطهای بین  $C(\frac{1}{4})$  و  $C(\frac{1}{2})$  و بین  $C(\frac{1}{2})$  و  $C(\frac{3}{4})$  خطوط مستقیم هستند. این امر ناشی از خط بودن پوسته محدب  $P_1P_2P_3$  در  $u \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  است. بعلاوه چون گره  $u = \frac{1}{2}$  دارای تعدد ۱ است منحنی باید آنجا  $c^1$  باشد گرچه بصورت *cuspidal* یا شکستگی است. در  $u = \frac{1}{2}$  مشتق اول (بطور پیوسته) صفر می‌شود. چراکه این مشتق متناسب با  $P_3 - P_2$  است. شکل‌های ۲-۵۵a و ۲-۵۵b نمونه‌هایی از منحنی درجه سوم با چند ضلعی کنترل یکسان با نقطه کنترل دابل  $P_2 = P_3$  و بردارهای گرهی متفاوت هستند.



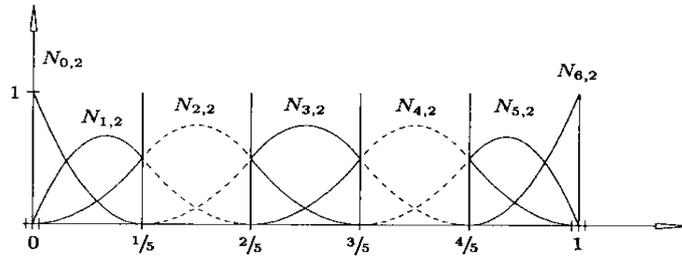
(a)



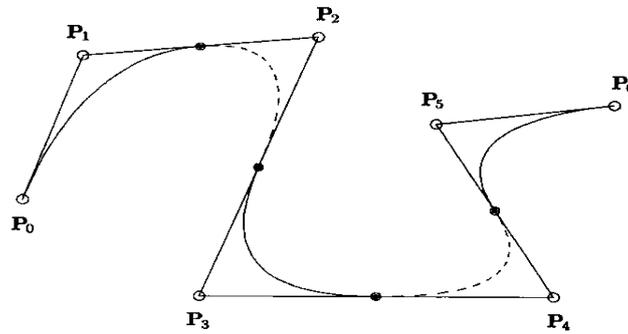
(b)

شکل ۲-۴۳

(a) Cubic basis functions  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ ; (b) a cubic curve using the basis functions of Figure 3.2a.



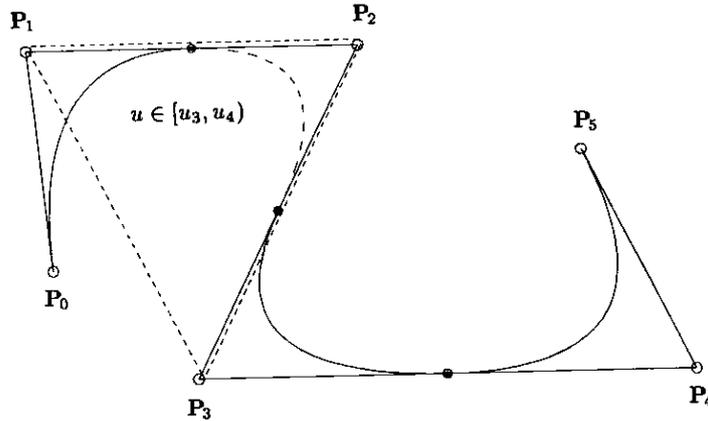
(a)



(b)

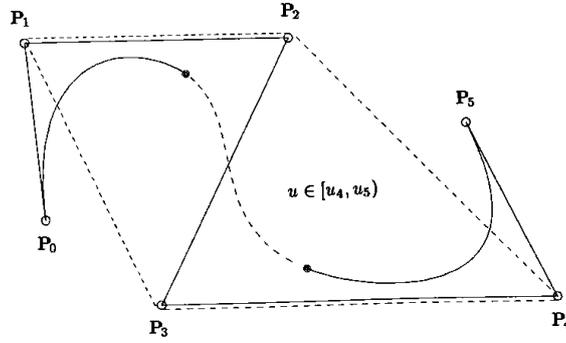
شکل ۲-۲۴

(a) Quadratic basis functions on  $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1\}$ ; (b) a quadratic curve using the basis functions of Figure 3.3a.



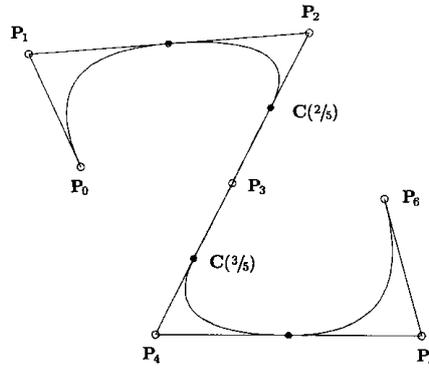
شکل ۲-۲۵

The strong convex hull property for a quadratic B-spline curve; for  $u \in [u_i, u_{i+1})$ ,  $C(u)$  is in the triangle  $P_{i-2}P_{i-1}P_i$ .



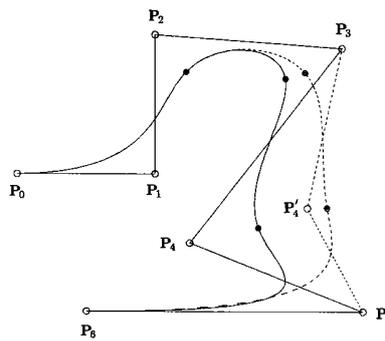
شکل ۲-۴۶

The strong convex hull property for a cubic B-spline curve; for  $u \in [u_i, u_{i+1})$ ,  $C(u)$  is in the quadrilateral  $P_{i-3}P_{i-2}P_{i-1}P_i$ .



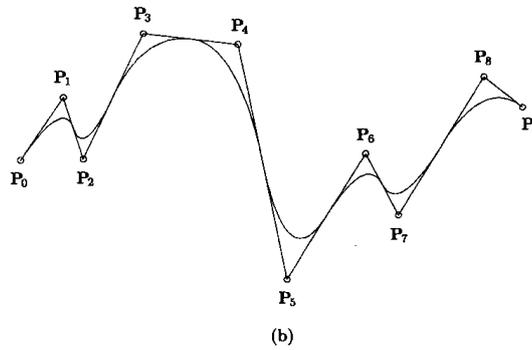
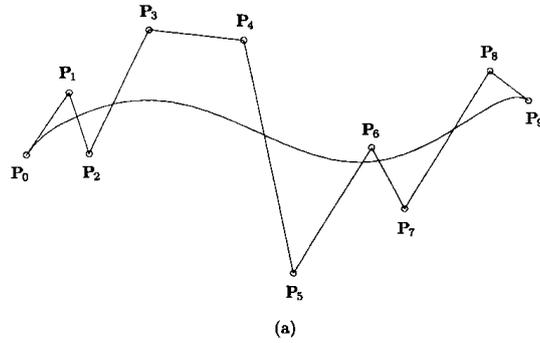
شکل ۲-۴۷

A quadratic B-spline curve on  $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1\}$ . The curve is a straight line between  $C(2/5)$  and  $C(3/5)$ .



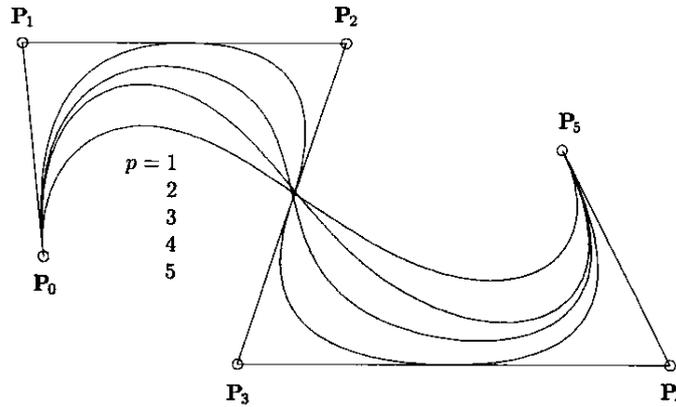
شکل ۲-۴۸

A cubic curve on  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ ; moving  $P_4$  (to  $P_4'$ ) changes the curve in the interval  $[1/4, 1)$ .



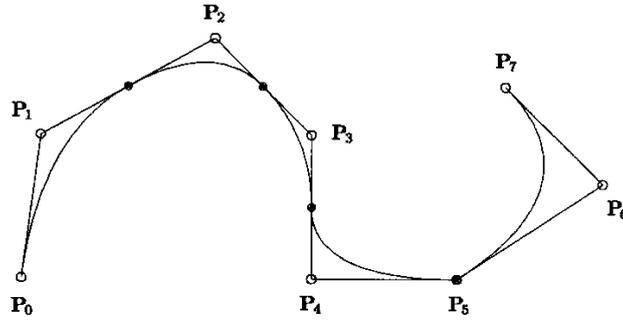
شکل ۲-۴۹

B-spline curves. (a) A ninth-degree Bézier curve on the knot vector  $U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ ; (b) a quadratic curve using the same control polygon defined on  $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5, 6/5, 7/5, 1, 1, 1\}$ .



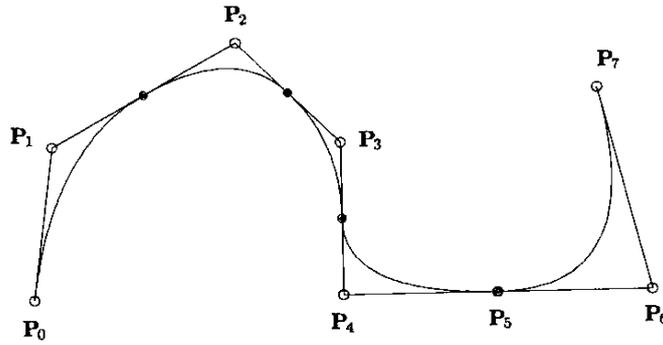
شکل ۲-۵۰

B-spline curves of different degree, using the same control polygon.



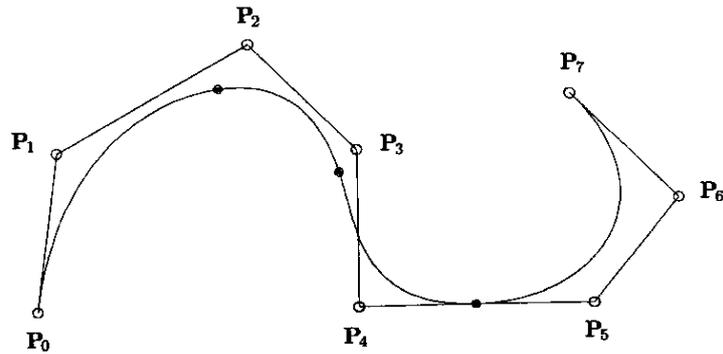
شکل ۵۱-۲

A quadratic curve on  $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 4/5, 1, 1, 1\}$  with a cusp at  $u = 4/5$ .



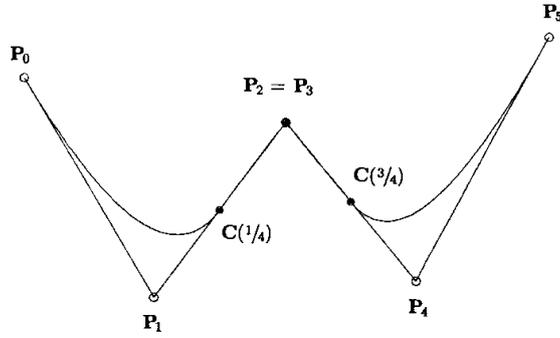
شکل ۵۲-۲

A quadratic curve on  $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 4/5, 1, 1, 1\}$ ; the first derivative is continuous at  $u = 4/5$ .



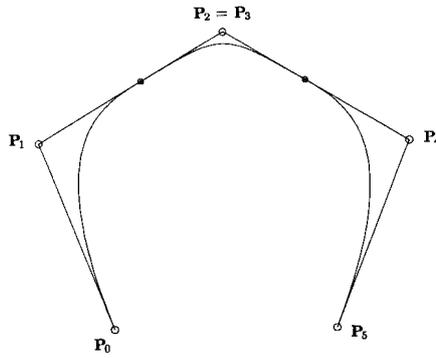
شکل ۵۳-۲

A cubic curve on  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ ,  $C^2$  continuous at  $u = 1/4$  and  $u = 1/2$ , and  $C^1$  continuous at  $u = 3/4$ .

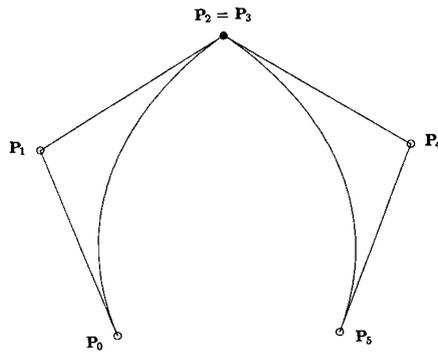


شکل ۲-۵۴

A quadratic curve on  $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1\}$ ;  $P_2 = P_3$  is a double control point.



(a)



(b)

شکل ۲-۵۵

Cubic curves with double control point  $P_2 = P_3$ . (a)  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ ;  
 (b)  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1\}$ .

$k$ امین مشتق  $C(u)$  با  $C^k(u)$  بیان می‌شود و عبارت است از:

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) P_i \quad (10.1-2)$$

تابع ۲-۷: اولین تابع ارائه شده برای محاسبه مشتق  $k$ ام منحنی بی‌اسپلاین  $C(u)$  عبارت است از:

```
CurveDerivsAlg1(n,p,U,P,u,d,CK)
{ /* Compute curve derivatives */
  /* Input: n,p,U,P,u,d */
  /* Output: CK */
  du = min(d,p);
  for (k=p+1; k<=d; k++) CK[k] = 0.0;
  span = FindSpan(n,p,u,U);
  DersBasisFuns(span,u,p,du,U,nders);
  for (k=0; k<=du; k++)
  {
    CK[k] = 0.0;
    for (j=0; j<=p; j++)
      CK[k] = CK[k] + nders[k][j]*P[span-p+j];
  }
}
```

می‌توان نشان داد که  $C'(u)$  نیز یک منحنی بی‌اسپلاین از درجه  $(p-1)$  است که روی بردار گرهی  $U'$  با نقاط کنترل  $Q_i$  با تعاریف زیر، تعریف می‌شود:

$$U' = \{\underbrace{0, \dots, 0}_p, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p\} \quad (10.2-2)$$

$$Q_i = p \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \quad (10.3-2)$$

$$C'(u) = p \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{(P_{i+1} - P_i)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) Q_i \quad (10.4-2)$$

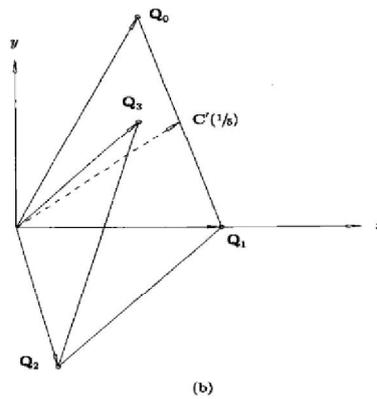
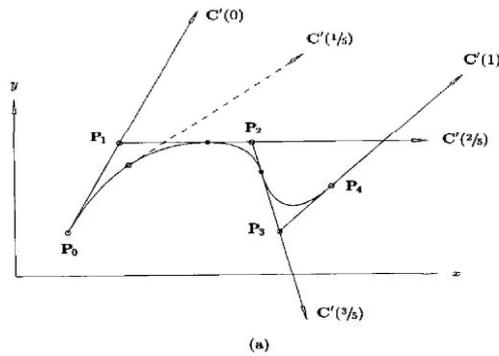
در شکل‌های ۲-۵۶ و ۲-۵۷ دو نمونه منحنی  $C(u)$  و منحنی‌های  $C'(u)$  نظیر آنها نشان داده شده‌اند. مشتقات اول منحنی بی‌اسپلاین در نقاط انتهایی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$C'(0) = Q_0 = \frac{p}{u_{p+1}} (P_1 - P_0)$$

$$C'(1) = Q_{n-1} = \frac{p}{1 - u_{m-p-1}} (P_n - P_{n-1})$$

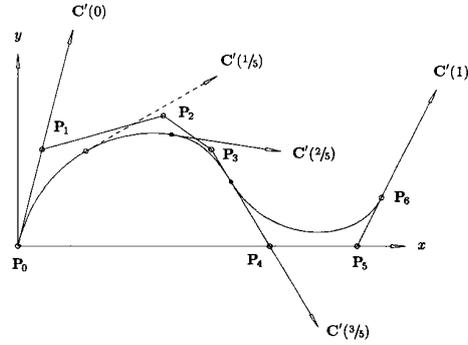
تابع ۲-۸، نقاط کنترل منحنی  $C'(u)$  را محاسبه می‌کند.

```
CurveDerivCpts(n,p,U,P,d,r1,r2,PK)
{ /* Compute control points of curve derivatives */
  /* Input: n,p,U,P,d,r1,r2 */
  /* Output: PK */
  r = r2-r1;
  for (i=0; i<=r; i++)
    PK[0][i] = P[r1+i];
  for (k=1; k<=d; k++)
  {
    tmp = p-k+1;
    for (i=0; i<=r-k; i++)
      PK[k][i] = tmp*(PK[k-1][i+1]-PK[k-1][i])/
        (U[r1+i+p+1]-U[r1+i+k]);
  }
}
```

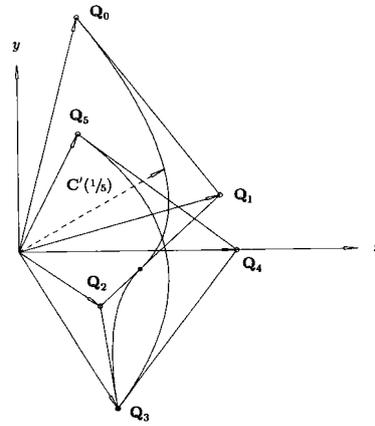


شکل ۲-۵۶.

A quadratic curve on  $U = \{0, 0, 0, 2/5, 3/5, 1, 1, 1\}$ ; (b) the derivative of the curve is a first-degree B-spline curve on  $U' = \{0, 0, 2/5, 3/5, 1, 1\}$ .



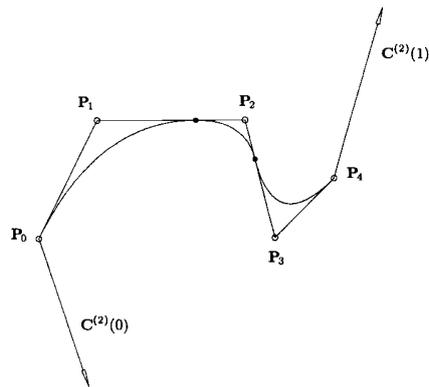
(a)



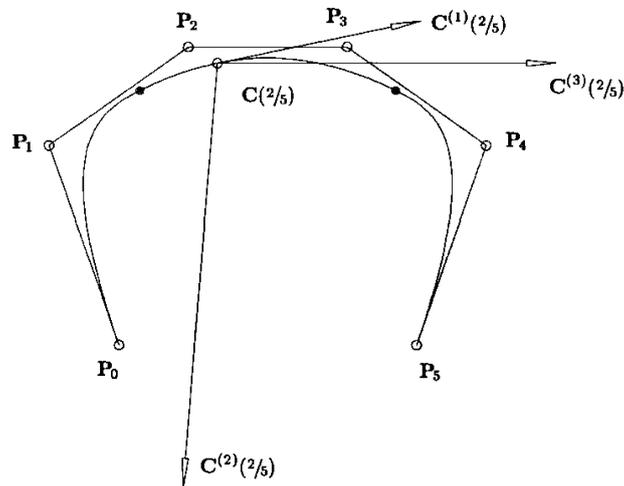
(b)

شکل ۲-۵۷

(a) A cubic curve on  $U = \{0, 0, 0, 0, 2/5, 3/5, 3/5, 1, 1, 1\}$ ; (b) the quadratic derivative curve on  $U' = \{0, 0, 0, 2/5, 3/5, 3/5, 1, 1, 1\}$ .



شکل ۲-۵۸ منحنی بی‌اسپلاین درجه دو به همراه بردارهای مشتق مرتبه دو انتهایی آن با مقیاس ۱:۲/۵.



شکل ۲-۵۹

A cubic curve on  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$  with first, second, and third derivatives computed at  $u = 2/5$ .

شکل ۲-۵۸ منحنی درجه دوم شکل ۲-۵۶ همراه بردارهای  $C^{(2)}(0)$  و  $C^{(2)}(1)$  را نشان می‌دهد. در شکل ۲-۵۹ مشتقات اول، دوم و سوم یک منحنی درجه سه در  $u=2/5$  (با مقیاس ۱ : ۲/۵) رسم شده‌اند.

## ۲-۲ سطوح بی‌اسپلاین

سطح بی‌اسپلاین با انتخاب یک شبکه دو جهتی از نقاط کنترل، دو بردار گرهی و ضرب توابع بی‌اسپلاین تک متغیره درهم بدست می‌آید:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \quad (۱۰۵-۲)$$

با:

$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$$

$$V = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\}$$

$U$  دارای  $r+1$  گره و  $v$  دارای  $s+1$  گره هستند و رابطه بین تعداد گره‌ها و درجه سطح عبارت است:

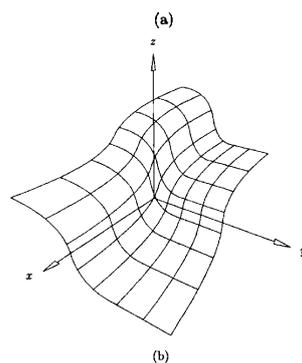
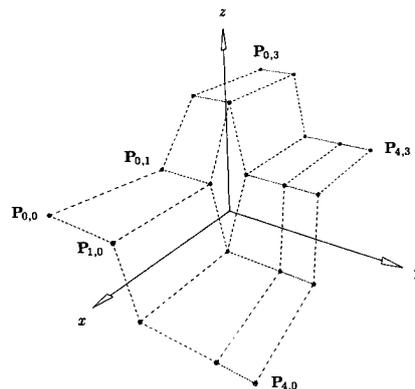
$$r = n + p + 1, \quad s = m + q + 1.$$

محاسبه یک نقطه روی سطح بی‌اسپلاین در مقادیر پارامتری ثابت  $(u, v)$  در پنج مرحله انجام می‌شود:

- (۱) یافتن بازه گرهی مربوط به  $u$ ، مثل  $u \in [u_i, u_{i+1})$ ، تابع ۱-۲؛
- (۲) محاسبه توابع پایه غیرصفر  $N_{i-p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$ ، تابع ۲-۲؛
- (۳) یافتن بازه گرهی مربوط به  $v$ ، مثل  $v \in [v_j, v_{j+1})$ ، تابع ۱-۲؛
- (۴) محاسبه توابع پایه  $N_{j-q}(v), \dots, N_{j,q}(v)$ ، تابع ۲-۲؛
- (۵) ضرب مقادیر توابع پایه غیرصفر در نقاط کنترل متناظرشان؛

$$S(u, v) = [N_{k,p}(u)]^T [P_{k,l}] [N_{l,q}(v)], \quad i-p \leq k < i, \quad j-q \leq l < j.$$

$[N_{k,p}(u)]^T$  یک بردار سطری  $1 \times (p+1)$  از مقادیر عددی،  $[P_{k,l}]$  یک ماتریس  $(p+1) \times (q+1)$  از نقاط کنترل و  $[N_{l,q}(v)]$  یک بردار ستونی  $1 \times (q+1)$  از مقادیر عددی است.



شکل ۶-۲ یک سطح بی‌اسپلاین (a) شبکه کنترل (b) سطح.

تابع ۲-۹: این تابع نقاط روی سطح بی‌اسپلاین را در مقادیر معلوم از  $(u, v)$  محاسبه می‌کند.

```

SurfacePoint(n,p,U,m,q,V,P,u,v,S)
{ /* Compute surface point */
  /* Input: n,p,U,m,q,V,P,u,v */
  /* Output: S */
  uspan = FindSpan(n,p,u,U);
  BasisFuns(uspan,u,p,U,Nu);
  vspan = FindSpan(m,q,v,V);
  BasisFuns(vspan,v,q,V,Nv);
  uind = uspan-p;
  S = 0.0;
  for (l=0; l<=q; l++)
  {
    temp = 0.0;
    vind = vspan-q+l;
    for (k=0; k<=p; k++)
      temp = temp + Nu[k]*P[uind+k][vind];
    S = S + Nv[l]*temp;
  }
}

```

خواص سطوح بی‌اسپلاین متأثر از خواص توابع بی‌اسپلاین است که قبلاً تشریح شدند. بعضی از این خواص عبارتند از:

(۱) اگر درجات  $p$  و  $q$  سطح بی‌اسپلاین برابر تعداد نقاط کنترل بعلاوه یک بوده و بردارهای گرهی روی بازه صفر و یک به صورت  $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ ,  $V = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  تعریف شده باشند،  $S(u, v)$  یک سطح بزییر خواهد بود:

(۲) سطح از چهار نقطه گوشه‌ای می‌گذرد (شکل ۲-۶۰):

(۳) پایایی آفینی؛

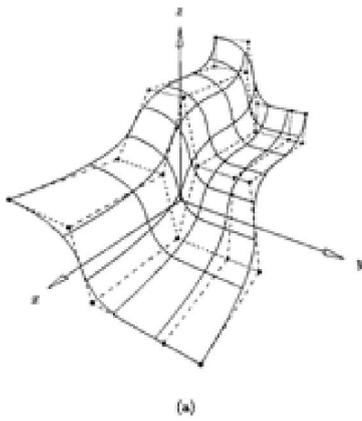
(۴) خاصیت پوسته محدب: اگر  $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}] \times [v_{j_0}, v_{j_0+1}]$ ، آنگاه  $S(u, v)$  در پوسته

محدب نقاط کنترل  $P_{i,j}$ ،  $i_0 - p \leq i \leq i_0$ ،  $j_0 - q \leq j \leq j_0$  قرار می‌گیرد (شکل ۲-۶۱):

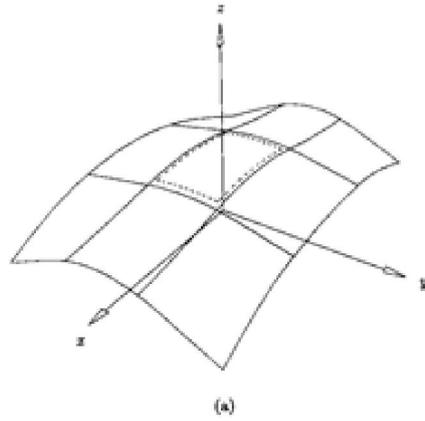
(۵) در صورت مثلث‌بندی شدن، شبکه کنترل یک تقریب صفحه‌ای تکه‌ای از سطح را شکل می‌دهد (شکل ۲-۶۲):

(۶) اصلاح موضعی: اگر  $P_{i,j}$  جایجا شود شکل سطح تنها در محدوده مستطیل

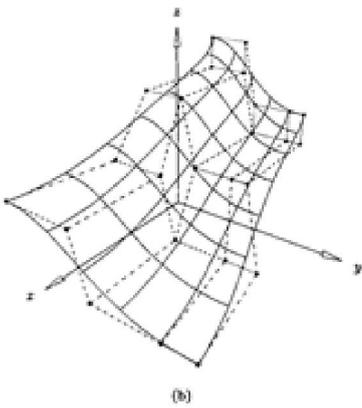
$[u_j, u_{j+p+1}] \times [v_j, v_{j+p+1}]$  تغییر می‌کند (شکل ۲-۶۳):



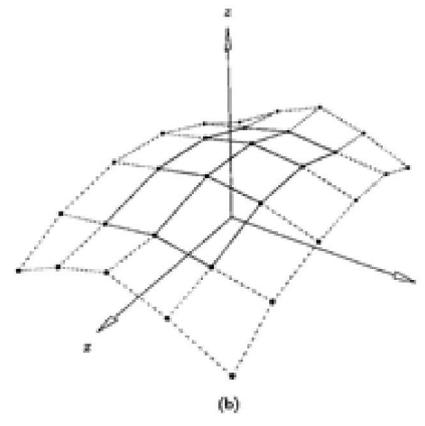
(a)



(a)



(b)



(b)

شکل ۲-۶۲

شکل ۲-۶۱

(a) A cubic  $\times$  quadratic B-spline surface;  
 (b) the strong convex hull property.

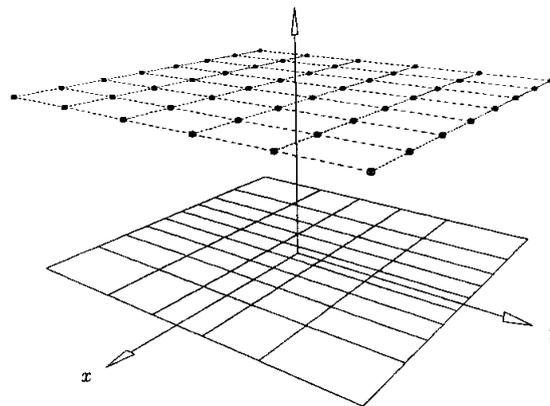
(a) A biquadratic surface; (b) a biquartic surface ( $p = q = 4$ )  
 using the same control points as in Figure 3.62a.

پیوستگی و مشتق‌پذیری  $S(u,v)$  از خواص توابع پایه تبعیت می‌کند.  $S(u,v)$   $p-k$  بار  $(q-k)$  بار در جهت  $u$  ( $v$ ) با تعداد گرهی  $k$  از  $u$  ( $v$ ) مشتق‌پذیر خواهد بود. البته امکان دارد (شبهه منحنی‌ها) نقاط کنترل طوری قرار بگیرند که ناپیوستگی توابع پایه را نقض کنند. با استفاده از چند نقطه کنترل منطبق بر هم، می‌توان یک ناپیوستگی در شکل ایجاد کرد درحالی‌که ناپیوستگی در توابع پایه وجود نداشته باشد (شکل‌های ۲-۶۴ و ۲-۶۵).

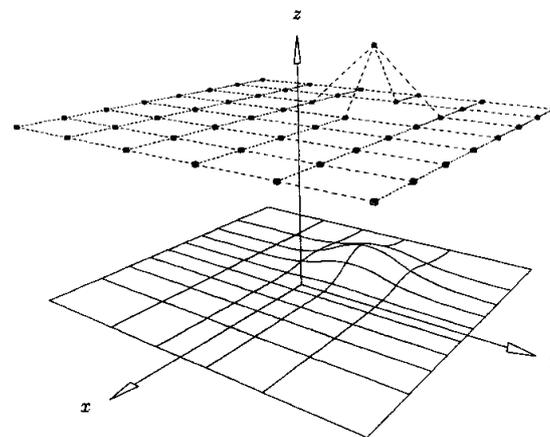
معمولاً لازم می‌شود که در یک  $(u,v)$  ثابت، تمام مشتقات جزئی  $S(u,v)$  تا مرتبه  $d$  (شامل خود  $d$ ) محاسبه شود:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u \partial^l v} S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}^k(u) N_{j,q}^l(v) P_{i,j} \quad (10.6-2)$$

تابع ۱۰-۲ نقاط روی سطح بی‌اسپلاین و تمام مشتقات جزئی کوچکتر برابر  $d$  آنها را محاسبه می‌کند ( $d > p, q$  مجاز است). شکل ۶۶-۲ یک سطح دو مکعبی و مشتقات جزئی اول و دوم آن را نشان می‌دهد. این مشتقات با مقیاس ۱:۲ رسم شده‌اند.



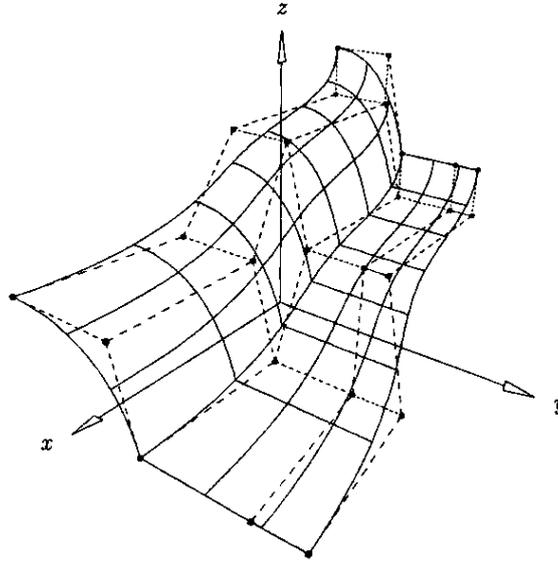
(a)



(b)

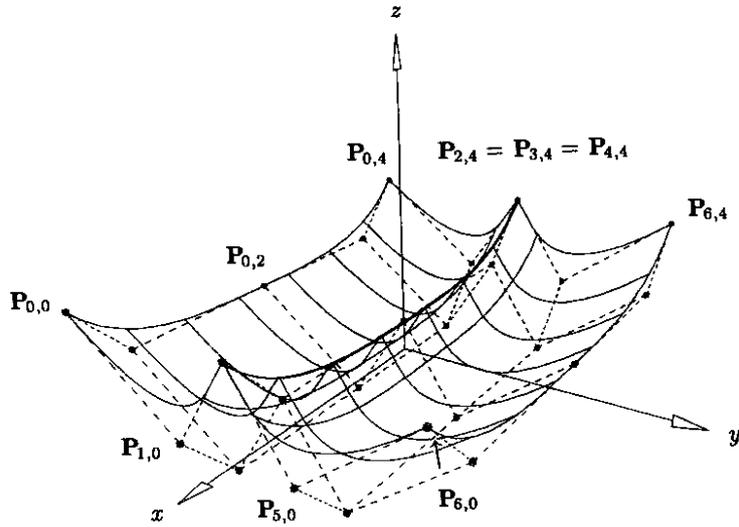
شکل ۶۶-۲

(a) A planar quadratic  $\times$  cubic surface,  $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1\}$  and  $V = \{0, 0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1, 1\}$ ; (b)  $P_{3,5}$  is moved, affecting surface shape only in the rectangle  $[1/4, 1] \times [2/5, 1]$ .



شکل ۶۴-۲

A quadratic  $\times$  cubic surface with crease,  $U = \{0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1, 1, 1\}$  and  $V = \{0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1\}$ .



شکل ۶۵-۲

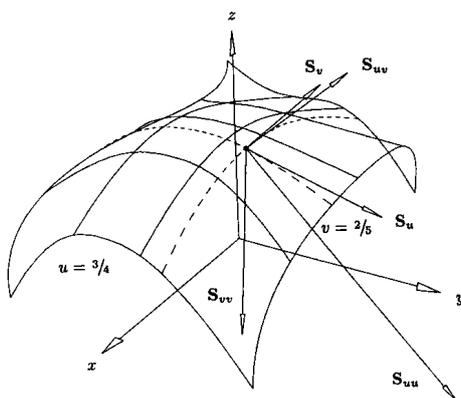
A bicubic surface with crease,  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$  and  $V = \{0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1\}$ ;  $P_{2,j} = P_{3,j} = P_{4,j}$  for  $0 \leq j \leq 4$ .

تابع ۱۰-۲

```

SurfaceDerivsAlg1(n,p,U,m,q,V,P,u,v,d,SKL)
{ /* Compute surface derivatives */
  /* Input: n,p,U,m,q,V,P,u,v,d */
  /* Output: SKL */
  du = min(d,p);
  for (k=p+1; k<=d; k++)
    for (l=0; l<=d-k; l++) SKL[k][l] = 0.0;
  dv = min(d,q);
  for (l=q+1; l<=d; l++)
    for (k=0; k<=d-l; k++) SKL[k][l] = 0.0;
  uspan = FindSpan(n,p,u,U);
  DersBasisFuns(uspan,u,p,du,U,Nu);
  vspan = FindSpan(m,q,v,V);
  DersBasisFuns(vspan,v,q,dv,V,Nv);
  for (k=0; k<=du; k++)
  {
    for (s=0; s<=q; s++)
    {
      temp[s] = 0.0;
      for (r=0; r<=p; r++)
        temp[s] = temp[s] + Nu[k][r]*P[uspan-p+r][vspan-q+s];
    }
    dd = min(d-k,dv);
    for (l=0; l<=dd; l++)
    {
      SKL[k][l] = 0.0;
      for (s=0; s<=q; s++)
        SKL[k][l] = SKL[k][l] + Nv[l][s]*temp[s];
    }
  }
}
}

```



شکل ۲-۶۶

A bicubic surface defined on  $U = V = \{0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1\}$  and its first and second partial derivatives computed at  $u = 3/4$  and  $v = 2/5$ .

## ۲-۲۱ منحنی‌های نریز

یک منحنی نریز درجه  $p$  ام با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad a \leq u \leq b \quad (107-2)$$

در این رابطه  $\{P_i\}$  نقاط کنترل،  $\{w_i\}$  وزن‌ها و  $\{N_{i,p}(u)\}$  توابع پایه بی‌اسپلاین درجه  $p$  ام روی بردار گرهی غیریکنواخت

$$U = \{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \}$$

هستند. در اینجا  $a=0$  و  $b=1$  فرض می‌شوند مگر خلاف این تصریح شود. با استفاده از نماد توابع پایه نسبتی

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} \quad (108-2)$$

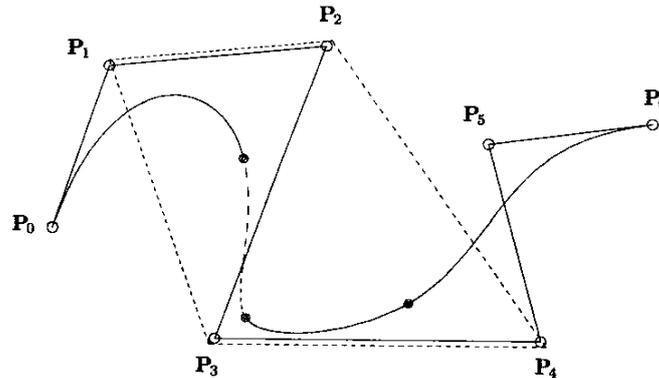
می‌توان رابطه (۱۰۷-۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i \quad (109-2)$$

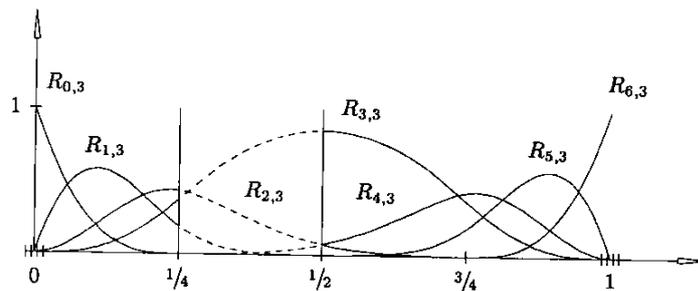
توابع  $R_{i,p}(u)$  دارای خواص زیرند:

- ۱) مثبت بودن:  $R_{i,p}(u) \geq 0$  برای تمام  $i$  و  $p$  ها و  $u \in [0,1]$
  - ۲) مجموع واحد:  $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$  به ازای تمام  $u \in [0,1]$
  - ۳)  $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$
  - ۴) برای هر  $p > 0$  تمام  $R_{i,p}(u)$  فقط یک مقدار حداکثر در بازه  $u \in [0,1]$  دارند؛
  - ۵) پشتیبانی موضعی:  $R_{i,p}(u) = 0$  به ازای  $u \notin [u_i, u_{i+p+1}]$
  - ۶) تمام مشتقات  $R_{i,p}(u)$  در داخل بازه گرهی وجود دارند. در یک گره،  $R_{i,p}(u)$ ،  $p-k$  بار مشتق‌پذیر پیوسته است.  $k$  تعدد گره است؛
  - ۷) به ازای  $a \neq 0$  اگر به ازای هر  $i$   $w_i = a$  آنگاه  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$ ، یعنی  $N_{i,p}(u)$  حالت خاصی از  $R_{i,p}(u)$  است.
- خواص بالا، باعث بروز خصوصیات هندسی مهم زیر برای منحنی‌های نریز می‌شوند:
- ۱) منحنی از نقاط دو انتها می‌گذرد:  $C(1) = P_n, C(0) = P_0$

- (۲) پایایی آفینی: با اعمال تبدیلات آفینی به نقاط کنترل می توان منحنی نریز را تبدیل کرد. این منحنی ها نسبت به تبدیلات پرسپکتیو پایا هستند؛
- (۳) خاصیت پوسته محدب: اگر  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  آنگاه  $C(u)$  درون پوسته محدب نقاط کنترل  $P_{i-p}, \dots, P_i$  (شکل ۲-۶۷) که برای  $C(u)$  در قسمت خط چین، در پوسته محدب متشکل از  $\{P_1, \dots, P_4\}$  قرار می گیرد؛
- (۴)  $C(u)$  در داخل بازه گرهی، بطور نامحدود و در هر گره،  $p-k$  بار ( $k$  تعداد گره) مشتق پذیر است؛
- (۵) خاصیت محو تغییرات؛
- (۶) یک منحنی نریز بدون گره داخلی یک منحنی بزبیر نسبتی است زیرا  $N_{i,p}(u)$  به  $B_{i,n}(u)$  کاهش می یابد؛



(a)

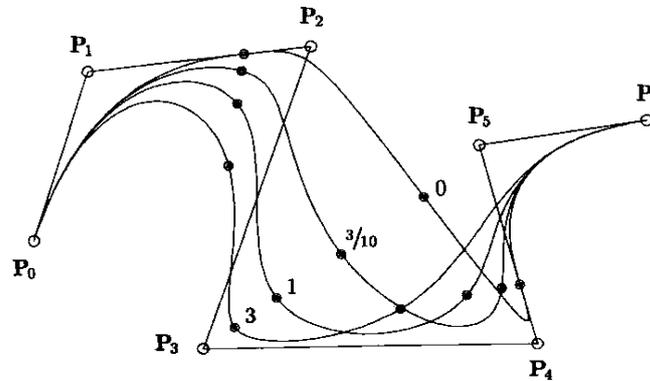


(b)

شکل ۲-۶۷ خاصیت پوسته محدب منحنی نریز.

$$U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\} \text{ and } \{w_0, \dots, w_6\} = \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}.$$

(a) A cubic NURBS curve; (b) associated basis functions.



شکل ۶۸-۲ تغییر شکل منحنی نرین مکعبی با تغییر وزن  $w_3$ .

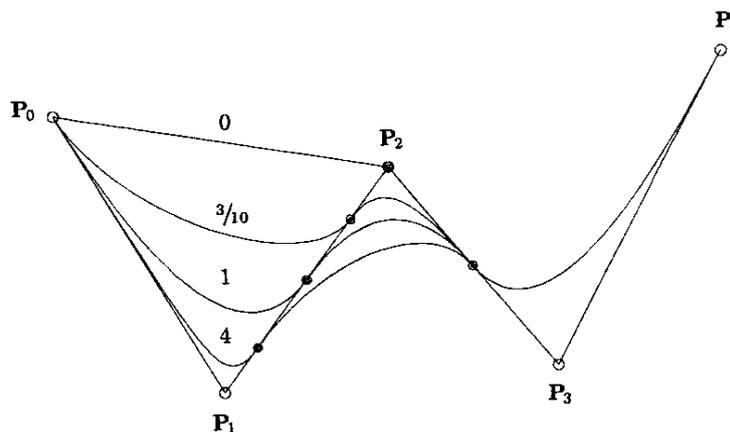
Rational cubic B-spline curves, with  $w_3$  varying.

تقریب موضعی: در اثر جابجا شدن  $P_i$  یا تغییر وزن  $w_i$ ، تنها آن قسمت از منحنی تغییر شکل می‌یابد که نظیر نیم بازه گرهی  $u \in [u_i, u_{i+1})$  است. شکل‌های ۶۸-۲ تا ۷۲-۲ تاثیر تغییر مقدار وزن را نشان می‌دهند. اگر  $u \in [u_i, u_{i+1})$ ، آنگاه در اثر افزایش  $w_i$ ، نقطه  $C(u)$  به  $P_i$  نزدیک می‌شود و در نتیجه منحنی به سمت نقطه  $P_i$  کشیده می‌شود و بر عکس. بعلاوه، جابه جایی  $C(u)$  بازای  $u$  ثابت در امتداد یک خط مستقیم (شکل ۷۲-۲) است. یعنی اگر

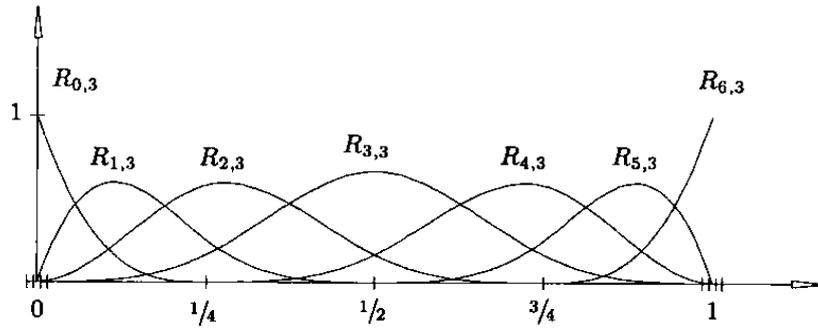
$$B = C(u; w_3 = 0)$$

$$N = C(u; w_3 = 1)$$

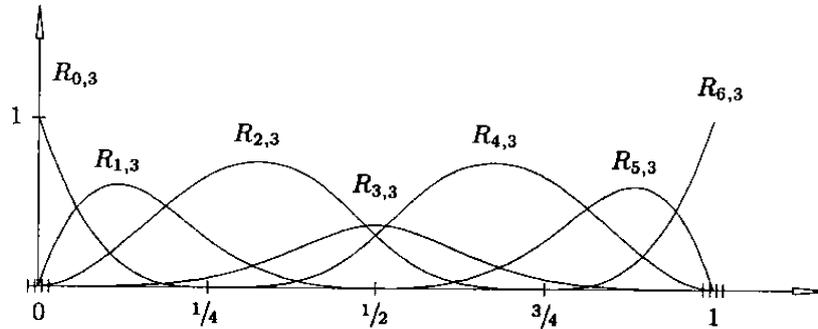
پاره خط تشکیل شده از  $B$  و  $N$ ، از  $P_3$  عبور می‌کند.



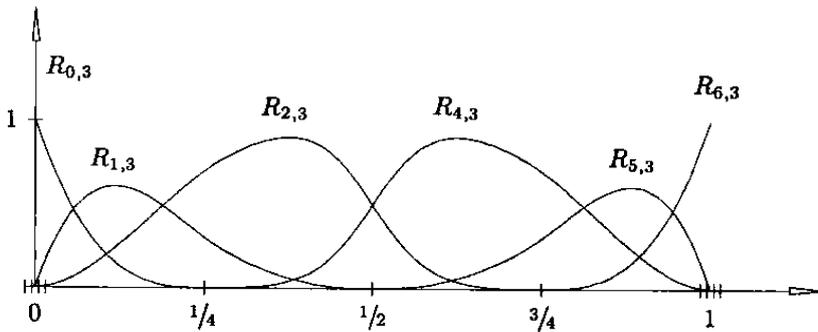
شکل ۶۹-۲ تاثیر تغییر وزن در شکل منحنی نرین.



(a)



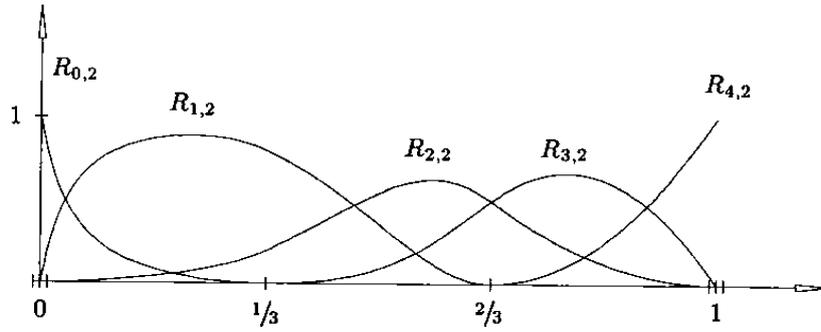
(b)



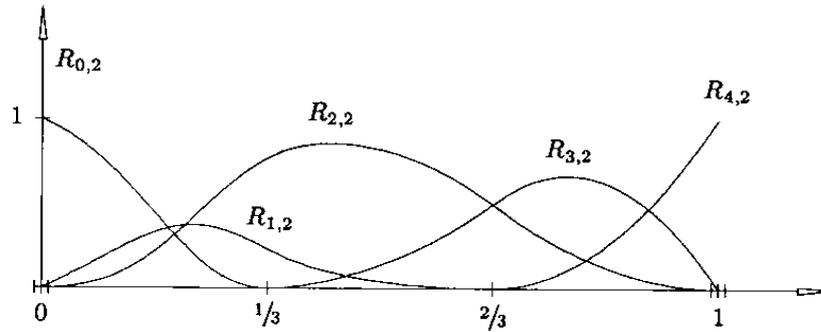
(c)

شکل ۷-۲ تاثیر تغییر وزن بر توابع پایه نسبتی نریز.

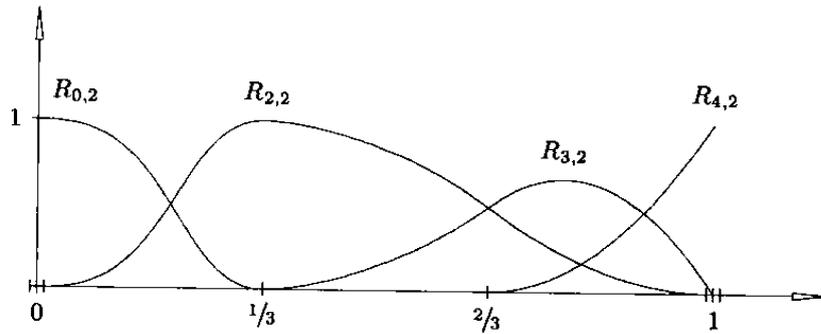
The cubic basis functions for the curves of Figure 3.68 (a)  $w_3 = 1$ ; (b)  $w_3 = 3/10$ ; (c)  $w_3 = 0$ .



(a)



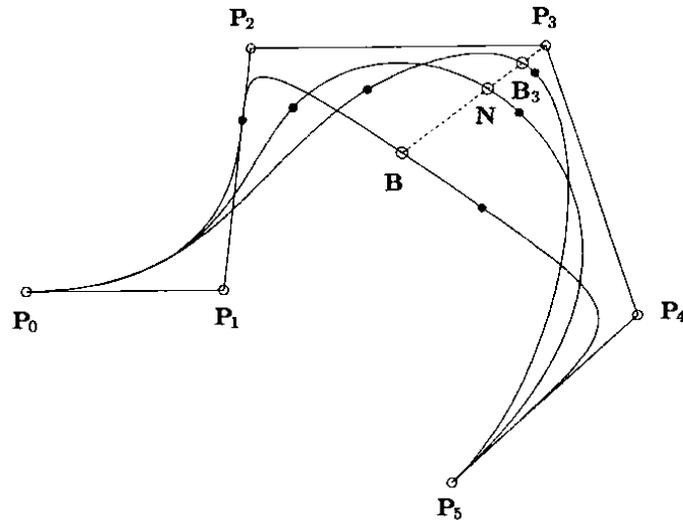
(b)



(c)

شکل ۲-۷۱ تاثیر تغییر وزن بر توابع پایه نسبتی نریز.

The quadratic basis functions for the curves of Figure 3.70 (a)  $w_1 = 4$ ;  
(b)  $w_1 = 3/10$ ; (c)  $w_1 = 0$ .



شکل ۲-۷۲ پیش‌بینی تغییرات شکل منحنی با تغییر وزن.

منحنی نریز را در سامانه مختصات همگن  $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$  می‌توان شکل زیر تعریف کرد (در فضای ۴ بعدی):

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i^w \quad (11-2)$$

تابع ۲-۱۱: این تابع نقطه‌ای از منحنی بی‌اسپلاین نسبتی را در یک مقدار ثابت  $u$  محاسبه می‌کند.

**CurvePoint(n,p,U,Pw,u,C)**

```
{ /* Compute point on rational B-spline curve */
  /* Input: n,p,U,Pw,u */
  /* Output: C */
  span = FindSpan(n,p,u,U);
  BasisFuns(span,u,p,U,N);
  Cw = 0.0;
  for (j=0; j<=p; j++)
    Cw = Cw + N[j]*Pw[span-p+j];
  C = Cw/w; /* Divide by weight */
}
```

مشتقات توابع نسبتی بدلیل مشکلات مشتق‌گیری از مخرج با توان‌های بالا مشکل می‌شوند. در بخش‌های قبل روابط و تابع‌هایی برای محاسبه مشتقات منحنی‌های بی‌اسپلاین غیرنسبتی تدوین شدند. آن روابط و تابع‌ها را می‌توان برای  $C^w(u)$  هم بکار رود.

اگر  $A(u) = W(u)C(u)$  فرض شود می توان نشان داد:

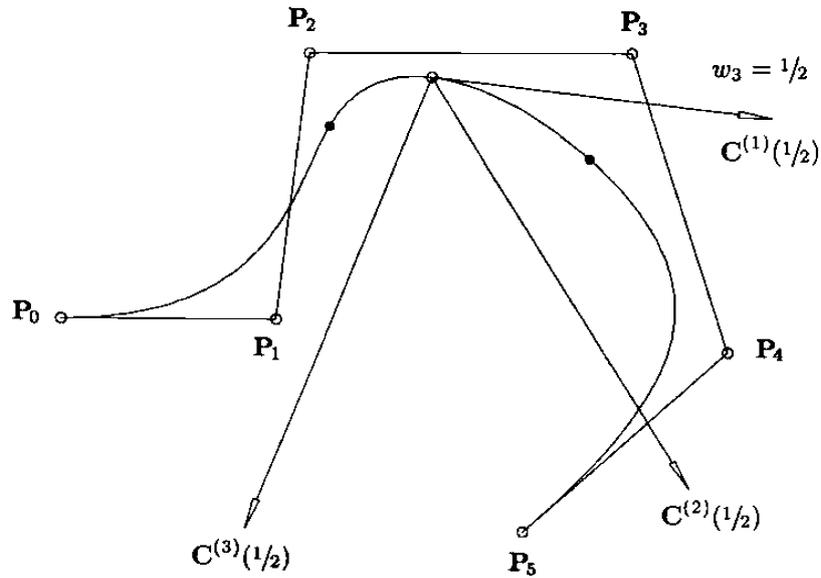
$$C^{(k)}(u) = \frac{A^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u) C^{(k-i)}(u)}{w(u)} \quad (111-2)$$

$A(u)$  یک تابع مقدار برداری است که مختصات آن سه مختصه اول  $C^w(u)$  هستند. مشتقات  $A^{(k)}(u)$  را می توان از روابط قبل محاسبه کرد. مشتقات اول منحنی نریز در نقاط انتهایی عبارتند از:

$$C'(0) = \frac{P}{u_{p+1} w_0} (P_1 - P_0) \quad (112-2)$$

$$C'(1) = \frac{P}{1 - u_{m-p-1} w_n} (P_n - P_{n-1}) \quad (113-2)$$

شکل ۷۳-۲ مشتقات اول، دوم و سوم یک منحنی مکعبی نریز را نشان می دهد. بردارهای مشتق با مقیاس های به ترتیب ۰،۴، ۰،۸ و ۰،۳ رسم شده اند. تابع ۱۰-۲ برای محاسبه مشتقات منحنی نریز در یک  $u$  ثابت تدوین شده است.



شکل ۷۳-۲

First, second, and third derivatives of a cubic NURBS curve computed at  $u = 1/2$ , with  $w_3 = 1/2$  and  $w_i = 1, i \neq 3$ .

تابع ۲-۱۲

```

RatCurveDerivs(Aders,wders,d,CK)
{ /* Compute C(u) derivatives from Cw(u) derivatives */
  /* Input: Aders,wders,d */
  /* Output: CK */
  for (k=0; k<=d; k++)
  {
    v = Aders[k];
    for (i=1; i<=k; i++)
      v = v - Bin[k][i]*wders[i]*CK[k-i];
    CK[k] = v/wders[0];
  }
}

```

## ۲۲-۲ سطوح نریز

یک سطح نریز از درجه  $p$  در راستای  $u$  و درجه  $q$  در راستای  $v$  یک تابع نسبتی تکه‌ای بردار مقدار به شکل زیر است:

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (114-2)$$

توابع غیرنسبتی  $N_{i,p}(u)$  و  $N_{j,q}(v)$  به ترتیب روی بردار گره‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}, \quad r = n + p + 1$$

$$V = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\}, \quad s = m + q + 1.$$

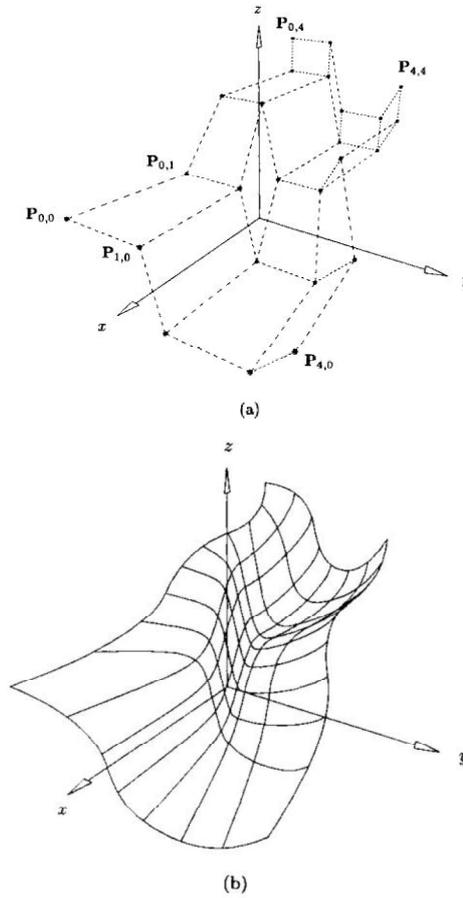
با تعریف توابع پایه نسبتی تکه‌ای بصورت

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \quad (115-2)$$

سطح فوق را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (116-2)$$

شکل‌های ۲-۷۴ و ۲-۷۵ نمونه‌هایی از سطوح نریز را نشان می‌دهند.



شکل ۲-۷۴

Control net and biquadratic NURBS surface,  $w_{1,1} = w_{1,2} = w_{2,1} = w_{2,2} = 10$ , with the rest of the weights 1.  $U = V = \{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$ . (a) Control net; (b) biquadratic NURBS surface.

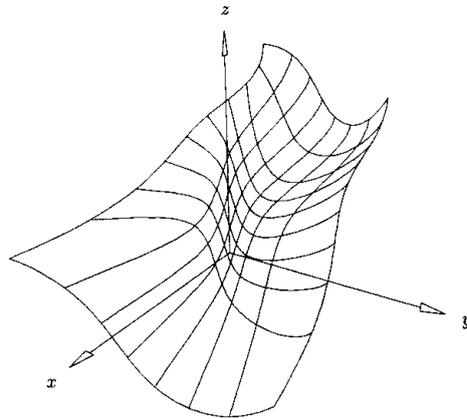
خواص مهم توابع  $R_{i,j}$  تقریباً همان خواصی هستند که قبلاً برای توابع پایه غیرنسبتی  $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$  ذکر شدند. بر اساس این خواص، خصوصیات هندسی مهم سطوح نریز عبارتند از:

- (۱) میانمایی نقاط گوشه‌ای؛
- (۲) پایایی آفینی؛
- (۳) خاصیت پوسته محدب؛
- (۴) اصلاح موضعی سطح؛

(۵) سطوح غیرنسبتی *B-spline* و بزییر و سطوح بزییر نسبتی حالت خاصی از سطوح نریز هستند:

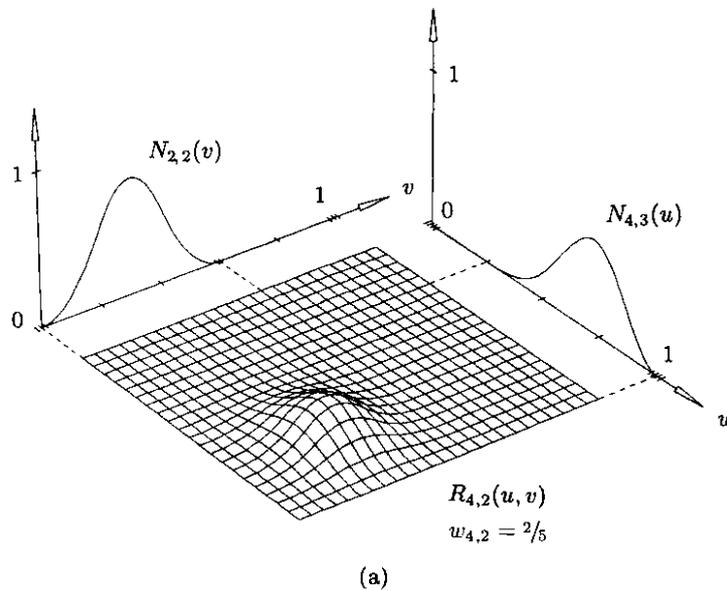
(۶) مشتق‌پذیری:  $S(u,v)$  بار نسبت به  $u$  و  $q-k$  بار نسبت به  $v$  در یک گره با تعدد  $k$  مشتق‌پذیر خواهد بود.

خاصیت محو تغییرات شناخته شده‌ای برای سطوح نریز وجود ندارد.

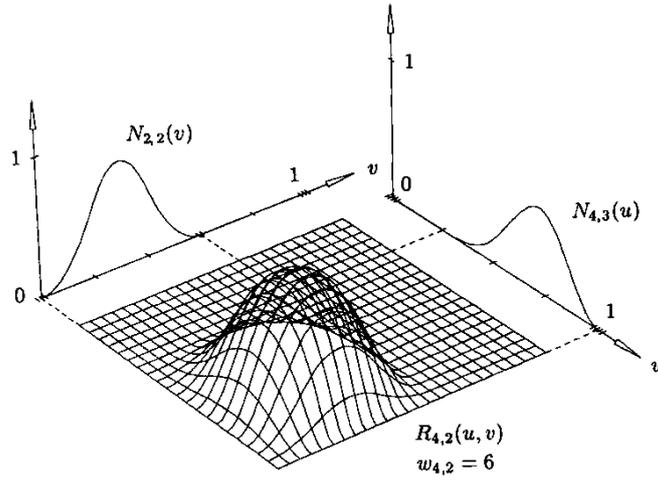


شکل ۷۵-۲

Bicubic NURBS surface defined by the control net in Figure 3.74 with  $U = V = \{0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1, 1\}$  and with the same weights

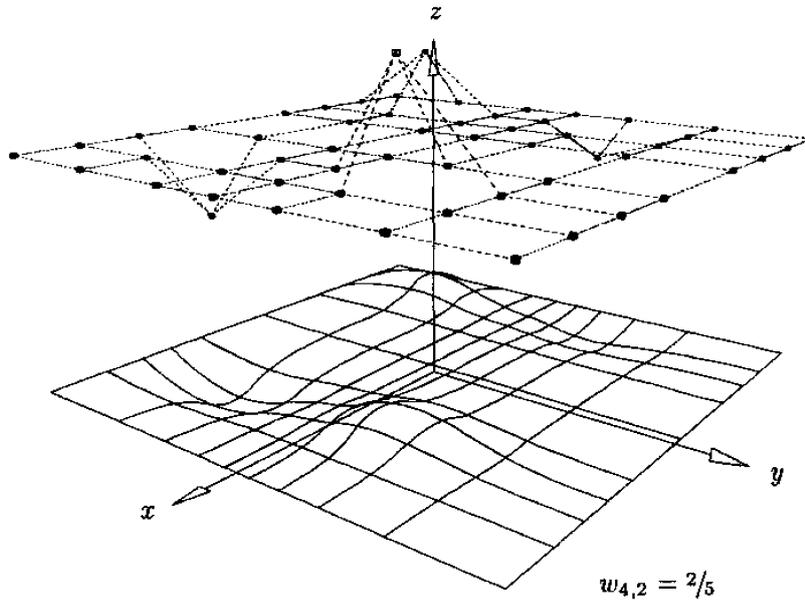


(a)



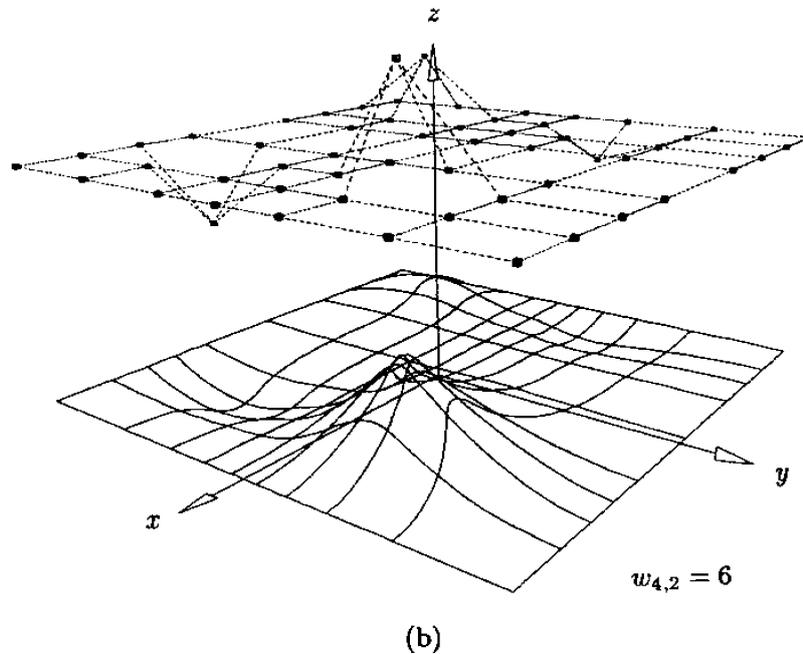
(b)

شکل ۲-۷۶ تاثیر تغییر وزن در توابع پایه نسبی نریز.



(a)

شکل ۲-۷۷



شکل ۷۷-۲

The basis function  $R_{4,2}(u, v)$ , with  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$  and  $V = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1\}$ .  $w_{i,j} = 1$  for all  $(i, j) \neq (4, 2)$ . (a)  $w_{4,2} = 2/5$ ; (b)  $w_{4,2} = 6$ .

نمایش سطح نریز در سامانه مختصات همگن عبارت است از:

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w \quad (117-2)$$

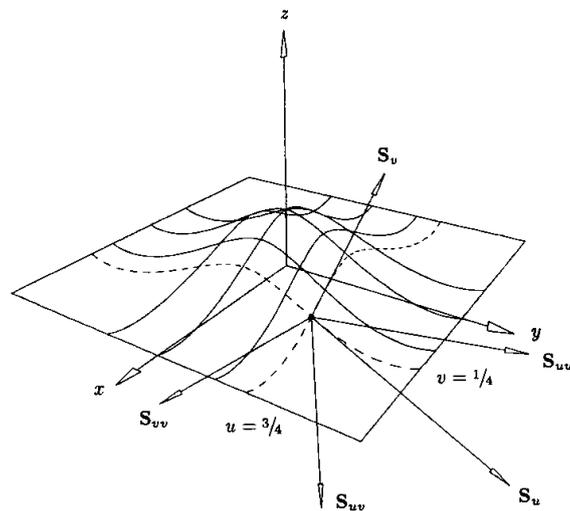
با همان فرضیات بخش قبل در خصوص مشتقات منحنی‌های نریز و با در نظرگرفتن تابع  $A(u, v) = W(u, v)S(u, v)$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(k,l)} = & \frac{1}{w} \left( \mathbf{A}^{(k,l)} - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i,0)} \mathbf{S}^{(k-i,l)} \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} w^{(0,j)} \mathbf{S}^{(k,l-j)} - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} w^{(i,j)} \mathbf{S}^{(k-i,l-j)} \right) \end{aligned} \quad (118-2)$$

شکل ۷۸-۲ مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم یک سطح نریز را نشان می‌دهد.

تابع ۲-۱۳: این تابع برای محاسبه نقطه‌ای روی سطح نزدیک نظیر پارامترهای معین  $u$  و  $v$  استفاده می‌شود.

```
SurfacePoint(n,p,U,m,q,V,Pw,u,v,S)
{ /* Compute point on rational B-spline surface */
  /* Input: n,p,U,m,q,V,Pw,u,v */
  /* Output: S */
  uspan = FindSpan(n,p,u,U);
  BasisFuns(uspan,u,p,U,Nu);
  vspan = FindSpan(m,q,v,V);
  BasisFuns(vspan,v,q,V,Nv);
  for (l=0; l<=q; l++)
  {
    temp[l] = 0.0;
    for (k=0; k<=p; k++)
      temp[l] = temp[l] + Nu[k]*Pw[uspan-p+k][vspan-q+l];
  }
  Sw = 0.0;
  for (l=0; l<=q; l++)
    Sw = Sw + Nv[l]*temp[l];
  S = Sw/w;
}
```



شکل ۲-۷۸ مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم یک سطح نزدیک دو مکعبی در  $u=3/4$  و  $v=1/4$ .

تابع ۲-۱۴: این تابع نقاط  $S(u,v)$  و مشتقات  $S^{(k,1)}(u,v)$  را به ازای  $0 \leq k+1 \leq d$  و  $u$  و  $v$  معین محاسبه می‌کند.

```

RatSurfaceDerivs(Aders,wders,d,SKL)
{ /* Compute S(u,v) derivatives */
  /* from Sw(u,v) derivatives */
  /* Input: Aders,wders,d */
  /* Output: SKL */
  for (k=0; k<=d; k++)
    for (l=0; l<=d-k; l++)
      {
        v = Aders[k][l];
        for (j=1; j<=l; j++)
          v = v - Bin[l][j]*wders[0][j]*SKL[k][l-j];
        for (i=1; i<=k; i++)
          {
            v = v - Bin[k][i]*wders[i][0]*SKL[k-i][l];
            v2 = 0.0;
            for (j=1; j<=l; j++)
              v2 = v2 + Bin[l][j]*wders[i][j]*SKL[k-i][l-j];
            v = v - Bin[k][i]*v2;
          }
        SKL[k][l] = v/wders[0][0];
      }
}

```

### ۲-۲۳ دواير نربز

ایجاد یک کمان دایره‌ای نربز پیچیده‌تر از چیزی است که به نظر می‌رسد و روش‌های مختلفی برای آن وجود دارد. در اینجا به نمایش درجه دوم کمان‌ها پرداخته می‌شود. درجه بالاتر از دو جایی مفید است که برای مثال کمانی برابر ۱۸۰ درجه بدون گره‌های داخلی و بدون وزن‌های منفی یا نقاط کنترل بی‌نهایت مطلوب باشد. چنین نمایشی را می‌توان با استفاده از ارتقای درجه منحنی بدست آورد. در اینجا از روش چسباندن کمان‌ها با زاویه‌های مختلف بهم با استفاده از گره‌های متعدد استفاده می‌شود. تابع ۲-۱۳ یک کمان دایره‌ای نربز در سه بُعد و با زاویه جاروب دلخواه  $(0 \leq \theta \leq 360^\circ)$  تولید می‌کند. در این تابع کمان‌های دایره‌ای با زوایای جاروب یکسان  $d\theta$

$\min(\theta, 45^\circ) \leq d\theta \leq 90^\circ$  را با استفاده از گره‌های دوبل به هم می‌چسباند. وزن  $w_1$  از رابطه زیر محاسبه می‌شوند (شکل ۲-۷۹):

$$w_1 = \frac{MS}{SP_1} = \frac{MP_2}{P_1P_2} = \frac{e}{f} = \cos \theta \quad \text{Let } \theta = \angle P_1P_2M. \quad (2-119)$$

کمان منتجه با زاویه  $\theta$ ،  $C^1$  است و دارای خاصیت پوسته محدب می‌باشد. اطلاعات زیر را می‌توان به راحتی تولید کرد:

$O$ : مرکز دایره (میدان سامانه مختصات محلی):

$X$ : بردار یکه در صفحه تعریف دایره؛

$Y$ : بردار یکه در صفحه تعریف دایره و عمود بر  $X$ ؛

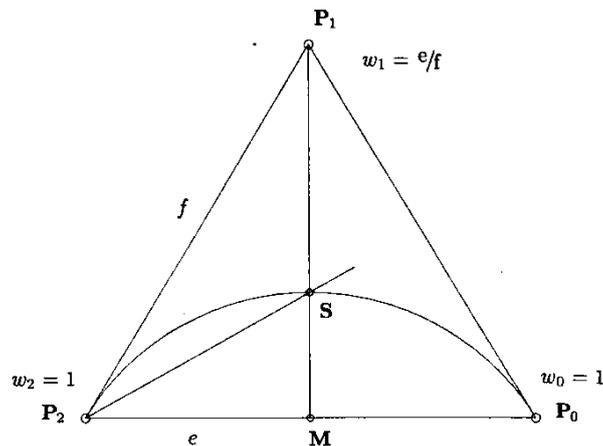
$r$ : شعاع؛

$\theta_s, \theta_e$ : زوایای شروع و خاتمه، نسبت به محور  $X$  ها.

این کمان را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$C(u) = O + r \cos u X + r \sin u Y \quad \theta_s \leq \theta \leq \theta_e \quad (12.2-2)$$

کمان بالا در سامانه مختصات محلی تعریف شده با  $O$ ،  $X$  و  $Y$  در جهت پادساعتگرد خواهد بود. در تابع ۱۳-۲ از تابعی به شکل  $\text{Intersect3DLines}(P_5, T_0, P_2, T_2, \text{alf}_0, \text{alf}_2, P_1)$  استفاده می‌شود که نقطه تقاطع دو خط  $(P_1)$  در فضای سه بعدی متشکل از دو نقطه و مماس-های آنها بصورت  $[P_0, T_0]$  و  $[P_2, T_2]$  را محاسبه می‌کند.  $\alpha_1, \alpha_0$  موقعیت‌های پارامتری  $P_1$  به ترتیب در امتداد  $[P_0, T_0]$  و  $[P_2, T_2]$  هستند. این تابع گره‌ها و نقاط کنترل وزن‌دار برای کمان دایره‌ای نریز را محاسبه می‌کند.



شکل ۷۹-۲ نمایش بزییر نسبتی درجه دو از یک کمان دایره‌ای با زاویه جاروب کمتر از ۱۸۰ درجه.

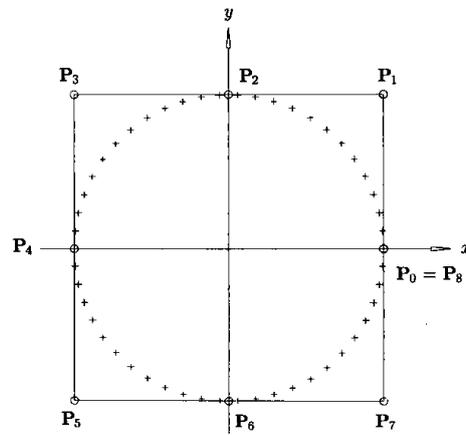
مثال: یک دایره کامل با استفاده از چند ضلعی کنترل مربعی با نُه نقطه (شکل ۸۰-۲) با اتصال چهار کمان نود درجه با استفاده از گره‌های دوپل یک دایره کامل بدست می‌آید. در این حالت گره‌ها، وزن‌ها و نقاط کنترل عبارتند از:

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}$$

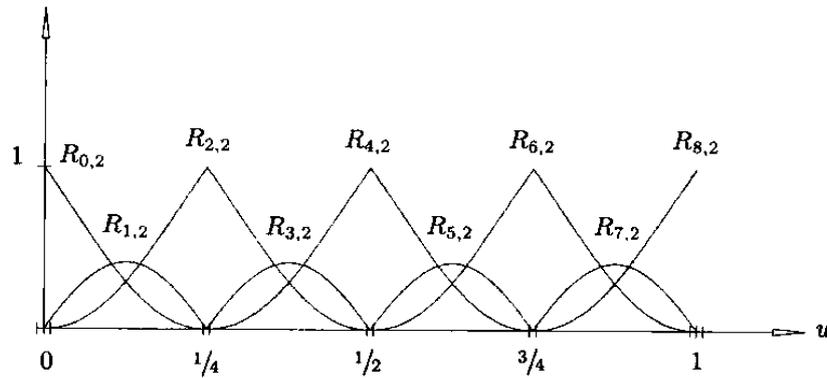
$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\}$$

$$\{P_i\} =$$

$$\{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1), (1, 0)\}$$

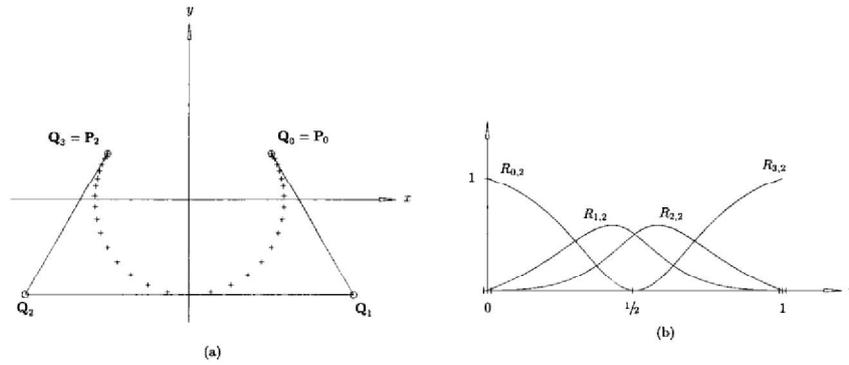


(a)

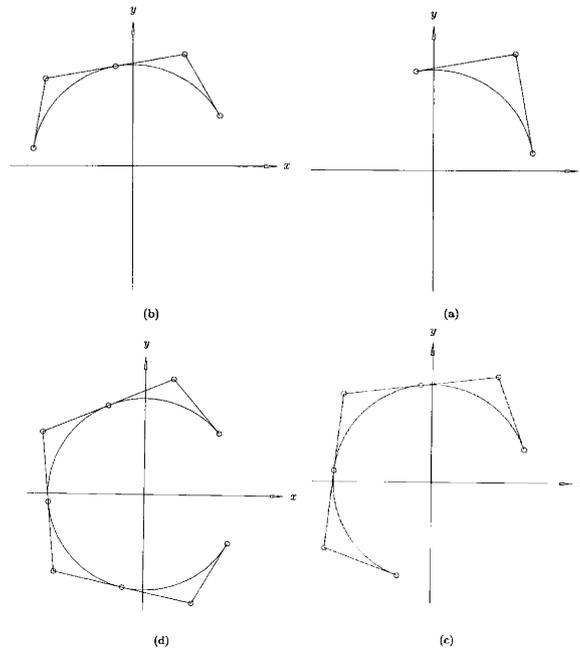


(b)

شکل ۸۰-۲ دایره نرئز با نُه نقطه و چند ضلعی کنترل و توابع پایه آن.



شکل ۸۱-۲ یک کمان  $240^\circ$ .



شکل ۸۲-۲ کمان‌های دایره‌ای با زوایای جاروب شروع و پایان (a)  $10^\circ$  و  $100^\circ$  درجه (b)  $30^\circ$  و  $170^\circ$  (c)  $20^\circ$  و  $250^\circ$  (d)  $40^\circ$  و  $230^\circ$ .

مثال: یک کمان  $240^\circ$ : بردار گرهی، وزن‌ها و نقاط کنترل عبارتند از (شکل ۸۱-۲):

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right\}$$

$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1 \right\}$$

$$\{Q_i\} = \left\{ \left( a, \frac{1}{2} \right), (2a, -1), (-2a, -1), \left( -a, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

شکل ۲-۸۲ چند حالت مختلف از کمان‌های دایره‌ای را نشان می‌دهد.

### ۲-۲۴ استوانه نریز

بنا به فرض  $W$  یک بردار یک‌به‌یک و  $C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i$  یک منحنی نریز درجه  $p$  ام روی بردارگرهی  $U$  و وزن‌های  $w_i$  هستند. یک استوانه عمومی  $S(u,v)$  مدنظر است که با جاروب  $C(u)$  به فاصله‌ای برابر  $d$  در امتداد  $W$  به دست آمده باشد. با نشان دادن پارامتر  $v$  در جهت جاروب و فرض  $0 \leq v \leq 1$ ، بدیهی است که  $S(u,v)$  باید شروط زیر را داشته باشد:

(۱) برای  $\bar{u}$  ثابت،  $S(\bar{u}, v)$  یک پاره خط مستقیم از  $C(\bar{u})$  به  $C(\bar{u}) + dW$  باشد؛

(۲) برای  $\bar{v}$  ثابت، (خاصیت پایایی انتقال)

$$S(u, \bar{v}) = C(u) + \bar{v}dW = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(P_i + \bar{v}dW)$$

تابع ۲-۱۳

```

MakeNurbsCircle(0,X,Y,r,ths,the,n,U,Pw)
{ /* Create arbitrary NURBS circular arc */
  /* Input: 0,X,Y,r,ths,the */
  /* Output: n,U,Pw */
  if (the < ths) the = 360.0 + the;
  theta = the-ths;
  if (theta <= 90.0) narcs = 1; /* get number of arcs */
  else
    if (theta <= 180.0) narcs = 2;
    else
      if (theta <= 270.0) narcs = 3;
      else
        narcs = 4;
  dtheta = theta/narcs;
  n = 2*narcs; /* n+1 control points */
  w1 = cos(dtheta/2.0); /* dtheta/2 is base angle */
  P0 = 0 + r*cos(ths)*X + r*sin(ths)*Y;
  T0 = -sin(ths)*X + cos(ths)*Y; /* Initialize start values */
  Pw[0] = P0;
  index = 0; angle = ths;
  for (i=1; i<=narcs; i++) /* create narcs segments */
  {
    angle = angle + dtheta;
    P2 = 0 + r*cos(angle)*X + r*sin(angle)*Y;
    Pw[index+2] = P2;
    T2 = -sin(angle)*X + cos(angle)*Y;
  }
}

```

z

```

Intersect3DLines(P0,T0,P2,T2,dummy,dummy,P1);
Pw[index+1] = w1*P1;
index = index + 2;
if (i < narcs) { P0 = P2; T0 = T2; }
}
j = 2*narcs+1; /* load the knot vector */
for (i=0; i<3; i++)
{ U[i] = 0.0; U[i+j] = 1.0; }
switch (narcs)
{
case 1: break;
case 2: U[3] = U[4] = 0.5;
break;

case 3: U[3] = U[4] = 1.0/3.0;
U[5] = U[6] = 2.0/3.0;
break;
case 4: U[3] = U[4] = 0.25;
U[5] = U[6] = 0.5;
U[7] = U[8] = 0.75;
break;
}
}
}

```

نمایش این سطح به صورت زیر است:

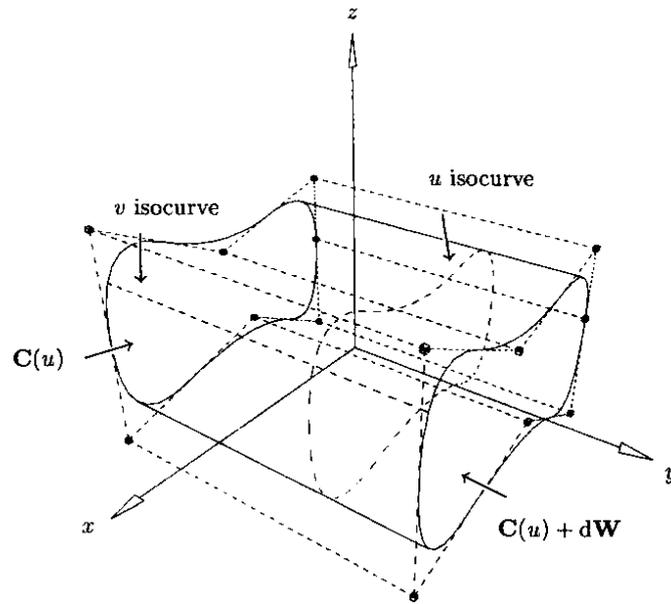
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^1 R_{i,p;j,1}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (121-2)$$

بطوریکه  $\mathbf{V} = \{0, 0, 1, 1\}$  و  $U$  همان بردار گرهی منحنی  $C(u)$  هستند. نقاط کنترل و وزن‌ها عبارتند از:

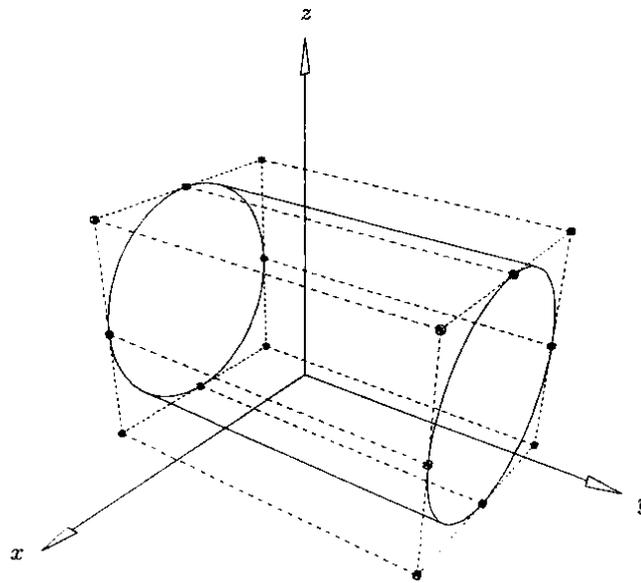
$$\mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{P}_i \text{ and } \mathbf{P}_{i,1} = \mathbf{P}_i + d\mathbf{W}, w_{i,0} = w_{i,1} = w_i. \quad (122-2)$$

شکل ۲-۸۳ یک استوانه عمومی نریز را نشان می‌دهد. یک استوانه دایره‌ای به روشی مشابه و از جاروب فاصله  $d$  توسط یک دایره نریز در راستای یک بردار عمود بر صفحه دایره حاصل می‌شود. شکل ۲-۸۴ استوانه‌ای از این نوع را نشان می‌دهد. در این شکل دایره‌ای از درجه دو، با چند ضلعی کنترل نه نقطه نشان داده شده است. این استوانه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^8 \sum_{j=0}^1 R_{i,2;j,1}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (123-2)$$



شکل ۲-۸۳ یک استوانه عمومی بدست آمده با انتقال  $C(u)$  به فاصله  $d$  در امتداد  $W$ .

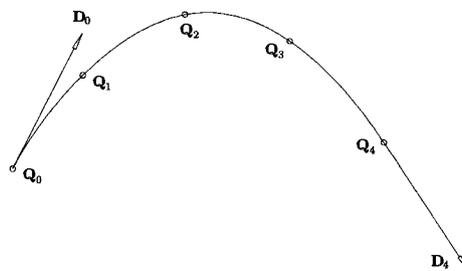


شکل ۲-۸۴ یک استوانه دایره‌ای.

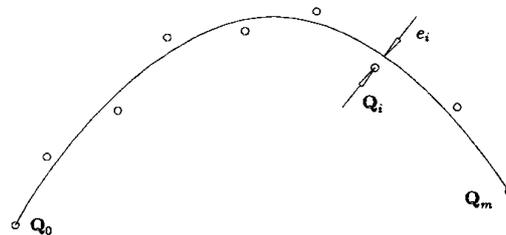
## ۲-۲۵ برازش منحنی و سطح

برازش یعنی ایجاد منحنی‌ها و سطوح نریزی که برازنده یک مجموعه دلخواه از داده‌های هندسی از جمله نقاط و بردارهای مماس باشند. معمولاً دو نوع برازش وجود دارد: برازش میانبایی و برازش تقریبی. در برازش میانبایی منحنی یا سطحی مطلوب است که دقیقاً داده‌های معلوم را اقناع کند؛ مثلاً منحنی از تمام نقاط معلوم بگذرد و در نقاط مورد نظر مشتقات داده شده را دارا باشد. شکل ۲-۸۵ یک منحنی میانبایی مربوط به پنج نقطه و بردارهای مشتق اول در دو انتها را نشان می‌دهد.

در تقریب، منحنی‌ها و سطوحی مد نظرند که نه الزاماً و بصورت دقیق بلکه بطور تقریبی داده‌های ارائه شده را اقناع می‌کنند. در بعضی موارد - مثل داده‌های نقطه‌وار اندازه‌گیری شده با وسایل اندازه‌گیری مختصاتی یا رقومی‌گرها - نقاط زیادی وجود داشته و احتمالاً دارای نویزهای اندازه‌گیری یا محاسباتی هستند. در این حالت منحنی یا سطح برازنده باید شکل داده‌ها را به خود بگیرد نه اینکه راه خود را از تک تک نقاط پیدا کند. در تقریب معمولاً مطلوب است که یک باند حداکثر مشخص شود که منحنی و سطح بتواند در محدوده آن نسبت به داده‌های معلوم انحراف داشته باشد. قیود مشخصی نیز لازمند که باید به دقت ارضا شوند. شکل ۲-۸۶ یک تقریب منحنی روی مجموعه‌ای شامل  $m+1$  نقطه را نشان می‌دهد. باند انحرافی ماکزیم  $E$ ، تعریف شده و فاصله عمودی  $e_i$ ، خطای تقریبی بدست آمده با تصویرنمایی  $Q_i$  روی منحنی است.  $e_i$  هر نقطه  $Q_i$  کمتر از  $E$  است. نقاط انتهایی  $Q_0$  و  $Q_m$  بعنوان قیود مشخص شده‌اند که در نتیجه در آنها  $e_0 = e_m = 0$ .



شکل ۲-۸۵ منحنی میانبایی پنج نقطه و دو مشتق انتهایی.



شکل ۲-۸۶ منحنی تقریبی برازنده برای  $m+1$  نقطه؛ منحنی مقید شده است که از دو نقطه انتهایی عبور کند.

اطلاعات ورودی به یک مساله برازش معمولاً داده‌های هندسی مثل نقاط و مشتقات هستند و خروجی‌ها، نقاط کنترل، گره‌ها و وزن‌های منحنی یا سطوح برازنده هستند. درجه منحنی یا سطح باید وارد شود و یا تابع باید آن را انتخاب نماید. اگر پیوستگی  $C^r$  برای یک منحنی لازم باشد درجه انتخابی  $p$  باید در رابطه  $p \geq r+1$  صادق باشد (با فرض عدم وجود تعدد گره‌های داخلی بیشتر از ۱). مراجع معدودی به نحوه انتخاب وزن‌ها در فرآیند برداشش پرداخته‌اند. اکثر اوقات، تمام وزن‌ها مساوی یک فرض می‌شوند. در واقع برای میانمایی احتمالاتی برای خلاف این انتخاب نیست (مگر در مورد برداشش کمان‌های دایره‌ای). برای تقریب با مجاز دانستن انتخاب دلخواه وزن‌ها، باید منحنی‌ها و سطوحی با نقاط کنترل کمتر تولید شوند. برای انتخاب گره‌ها نیز روش‌های متعددی وجود دارند.

اکثر تابع‌های برازش یا کلی هستند و یا محلی. با یک تابع کلی، سامانه‌ای از معادلات یا یک مساله بهینه‌سازی تنظیم و حل می‌شود. در این حالت یک منحنی یا سطح کلی روی تمام داده‌ها برازش می‌شود. اگر داده‌های معلوم فقط شامل نقاط و مشتقات بوده و اگر نقاط کنترل تنها مجهولات مساله باشند (درجه، گره‌ها و وزن‌ها از قبل انتخاب شده باشند) این سامانه معادلات، خطی است و حل آن ساده است. اگر داده‌های دیگری مثل انحنا داده شده باشد یا گره‌ها و یا وزن‌ها هم مجهول فرض شوند سامانه معادلات منتهی غیرخطی خواهد بود. بطور تئوری، هرگونه تغییری در هر یک از داده‌های ورودی می‌تواند شکل کلی منحنی یا سطح را تغییر دهد. تابع‌های محلی با تولید یک منحنی یا سطح تکه‌ای، با استفاده از داده‌های محلی در هر مرحله، ماهیت هندسی‌تری دارند. این تابع‌ها از نظر محاسباتی نسبت به تابع‌های کلی ارزانتر هستند. این تابع‌ها امکان برخورد بهتر با ناپیوستگی‌های بصری (Cusp)، پاره خطوط مستقیم و داده‌های محلی غیرعادی (anomolizes) را فراهم می‌کنند. با این حال، دستیابی به سطوح موردنظر از لحاظ پیوستگی در مرزهای تکه منحنی‌ها یا سطوح مجاور هم دشوارتر است و روش‌های محلی غالباً موجب ایجاد گره‌های داخلی چندتایی می‌شوند.

## ۲-۲۵-۱ میانمایی کلی منحنی روی نقاط معلوم

در این بخش حالتی بحث می‌شود که مجموعه‌ای از نقاط  $\{Q_k\}$ ،  $k=0, \dots, n$ ، معلومند و میانمایی این نقاط با یک منحنی بی‌اسپلاین غیرنسبتی درجه  $p$  مدنظر است. اگر به هر  $Q_k$  یک پارامتر  $\bar{u}_k$  اختصاص داده شود و یک بردار گره‌ی مناسب  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  انتخاب شود می‌توان سامانه  $(n+1) \times (n+1)$  خطی به شکل زیر تشکیل داد:

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \quad (2-124)$$

نقاط کنترل  $P_i$ ،  $(n+1)$  مجهول هستند. اگر  $r$  تعداد مختصات  $Q_k$  (مثلاً ۲، ۳ یا ۴) باشد معادله (۲-۱۲۴) یک ماتریس ضرایب با  $r$  سمت راست متناظر  $r$  مجموعه جواب برای  $r$  مختصه  $P_i$  خواهد

بود. مساله انتخاب  $\bar{u}_k$  و  $u$  باقی است و نحوه انتخاب آنها بر شکل و پارامتری کردن منحنی تاثیر می‌گذارد. با فرض اینکه  $u \in [0,1]$  است، سه روش متداول انتخاب  $\bar{u}_k$  عبارتند از:

(۱) هم فاصله (equally spaced):

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \frac{k}{n} & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (125-2)$$

این روش توصیه نمی‌شود زیرا می‌تواند در صورت غیریکنواخت بودن فاصله نقاط داده باعث تولید شکل‌های غیرقابل پیش بینی (erratic) (مثل حلقه‌ها) شود.

(۲) طول وتر (chord length): با فرض  $d$  برابر طول کل وتر  $\sum_{k=1}^n |\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|$  آنگاه:

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (126-2)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}{d} \quad k = 1, \dots, n-1$$

این روش بیشترین کاربرد را داراست.

(۳) روش مرکزی (centripetal method):

با فرض  $d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}$  آنگاه:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}}{d} & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (127-2)$$

این روش، روش جدیدتری است که در حالت چرخش‌های تیز نقاط داده نسبت به روش طول وتر نتایج بهتری ارائه می‌کند.

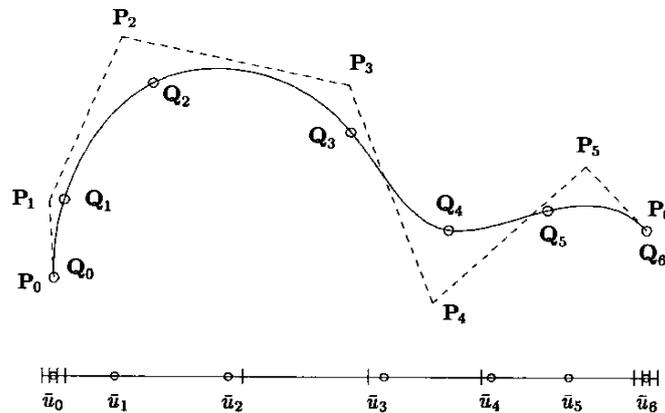
گره‌ها را می‌توان هم فاصله انتخاب کرد. یعنی:

$$\begin{aligned} u_0 &= \dots = u_p = 0 & u_{m-p} &= \dots = u_m = 1 \\ u_{j+p} &= \frac{j}{n-p+1} & j &= 1, \dots, n-p \end{aligned} \quad (128-2)$$

با این حال، این روش توصیه نمی‌شود زیرا در صورت استفاده به همراه معادلات (۱۲۶-۲) یا (۱۲۷-۲) می‌تواند باعث بروز سامانه معادلات تکینه شود. روش زیر را که به روش میانگین-گیری معروف است می‌توان برای تعیین گره‌ها استفاده کرد:

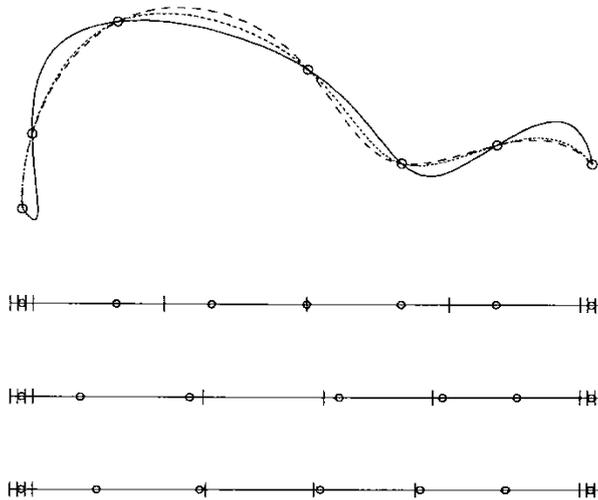
$$\begin{aligned} u_0 &= \dots = u_p = 0 & u_{m-p} &= \dots = u_m = 1 \\ u_{j+p} &= \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i & j &= 1, \dots, n-p \end{aligned} \quad (129-2)$$

شکل ۲-۸۷ نقاط کنترل، پارامترها و بردار گرهی یک منحنی مکعبی میانیاپ را نشان می‌دهد. پارامترها به روش طول وتر و گره‌ها با میانگین‌گیری پارامترها انتخاب شده‌اند. در شکل ۲-۸۸ مقایسه‌ای بین پارامتری کردن‌های مختلف نشان داده شده است. شکل ۲-۸۹ همان مقایسه بالا با استفاده از نقاط داده‌ای پراکنده‌تر انجام گرفته است. در هر دو حالت منحنی مکعبی از نقاط داده گذشته است. در شکل ۲-۸۹ نحوه سازگاری منحنی‌های پارامتری شده به روش‌های طول وتر و مرکزی با تغییرات در فاصله بین نقاط قابل تامل است.

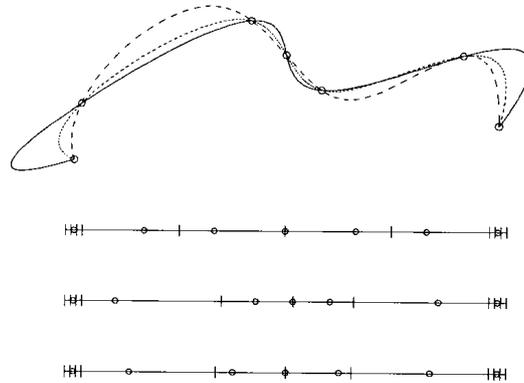


شکل ۲-۸۷

A curve interpolation example using chord length parameterization and a knot vector obtained by averaging parameters.



شکل ۲-۸۸ یک منحنی میانیاپ با پارامتری کردن‌ها و بردارهای گرهی متفاوت.



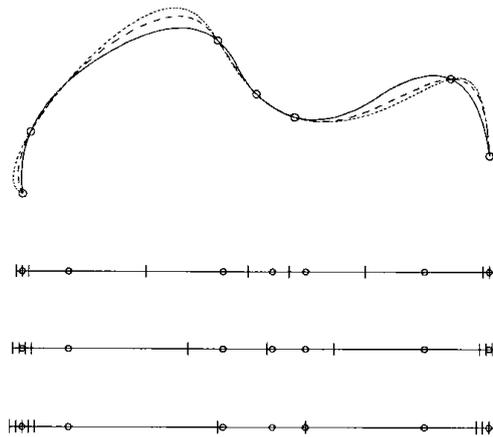
شکل ۲-۸۹ یک منحنی میانیاپ با پارامتری کردن‌ها و بردارهای گرهی متفاوت.

شکل ۲-۹۰ میانیاپی با منحنی‌های با درجات مختلف را نشان می‌دهد. شکل ۲-۹۱ نیز عدم قابلیت میانیاپی کلی برای کار روی مجموعه نقاط روی یک خط را نشان می‌دهد.

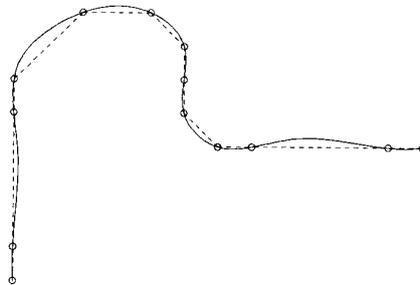
تابع ۲-۱۴ برای میانیاپی کلی منحنی تدوین شده است. در این تابع علاوه بر استفاده از تابع‌های پیش‌گفته  $FindSpan()$  و  $BasisFuns()$ ، دو تابع دیگر نیز فرض شده‌اند:

الف)  $LUdecomposition(A, q, sbw)$ : برای تجزیه ماتریس ضرایب  $q \times q$  با پهناي نیم باند  $sbw$  به صورت مولفه‌های پائین و بالا مثلثی: برای سادگی فرض می‌شود  $A$  یک آرایه  $q \times q$  است اما باید از روالی استفاده کرد که فقط باند غیرصفر را ذخیره نماید:

ب)  $ForwardBackward(A, q, rhs, sol)$ : برای جایگذاری رو به جلو/رو به عقب:  $rhs[]$  سمت راست سامانه معادلات است (مختصات  $Q_k$ ) و  $sol[]$  بردار جواب (مختصات  $P_i$ ) است.



شکل ۲-۹۰ یک منحنی میانیاپ با درجات مختلف با استفاده از روش پارامتری کردن طول وتر و روش میانگین‌گیری گره‌ها.



شکل ۹۱-۲ یک منحنی میانبازی کلی مکعبی برای نقاط داده‌ای هم خط.

### ۲-۲۵-۲ میانبازی کلی سطح

در صورتیکه مجموعه‌ای شامل  $(n+1) \times (m+1)$  نقطه  $\{Q_{k,l}\}$ ،  $k=0, \dots, n$  و  $l=0, \dots, m$  معلوم باشند، می‌توان یک سطح بی‌اسپلاین غیرنسبتی با درجه  $(p, q)$  تولید کرد که از نقاط فوق‌الذکر بگذرد، یعنی:

$$Q_{k,\ell} = \mathbf{S}(\bar{u}_k, \bar{v}_\ell) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_\ell) \mathbf{P}_{i,j} \quad (۱۳۰-۲)$$

شبه میانبازی منحنی، اولین مشغله محاسبه مقادیر معقولی برای  $(\bar{u}_k, \bar{v}_l)$  و بردارهای گرهی  $U$  و  $V$  است. یک روش متداول برای محاسبه  $\bar{u}_k$  و  $\bar{v}_l$  استفاده از معادلات (۱۲۶-۲) یا (۱۲۷-۲) برای محاسبه پارامترهای  $u_0^{-l}, \dots, u_n^{-l}$  برای هر  $l$  و سپس تعیین هر  $\bar{u}_k$  بصورت متوسط تمام  $u_k^{-l}$  و  $l=0, \dots, n$  است. یعنی:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \bar{u}_k^l \quad k=0, \dots, n \quad (۱۳۱-۲)$$

تابع ۱۷-۲

```
GlobalCurveInterp(n,Q,r,p,m,U,P)
{ /* Global interpolation through n+1 points */
  /* Input: n,Q,r,p */
  /* Output: m,U,P */
  m = n+p+1;
  Compute the uk; /* Eq.(9.5) or (9.6) */
  Compute the knot vector U; /* Eq.(9.8) */
  Initialize array A to zero;
  for (i=0; i<=n; i++)
  { /* Set up coefficient matrix */
    span = FindSpan(n,p,uk[i],U);
    BasisFuns(span,uk[i],p,U,A[i][span-p]); /* Get ith row */
  }
}
```

```

LUdecomposition(A,n+1,p-1);
for (i=0; i<r; i++) /* r is the number of coordinates */
{
  for (j=0; j<=n; j++) rhs[j] = ith coordinate of Q[j];
  ForwardBackward(A,n+1,p-1,rhs,sol);
  for (j=0; j<=n; j++) ith coordinate of P[j] = sol[j];
}
}

```

که به ازای هر  $l$  ثابت،  $u_k$ ،  $k=0, \dots, n$  از معادلات (۲-۱۲۶) یا (۲-۱۲۷) محاسبه می‌شود. در تابع ۲-۱۵ از معادله (۲-۱۲۶) استفاده شده است. این تابع هر دو  $\bar{u}_k$  و  $\bar{v}_l$  را محاسبه می‌کند. به یک آرایه محلی  $cds[]$  نیاز است که به طول  $\max(n+1, m+1)$  فواصل وتری  $|Q_{k,l} - Q_{k-1,l}|$ ،  $k=1, \dots, n$  (و بطور مشابه برای جهت  $v$ ) را محاسبه کند. تابع  $Distance3D()$  فاصله بین دو نقطه سه بعدی را محاسبه می‌کند. این تابع حالتی که طول وتر کل یک سطر مساوی صفر باشد، یعنی شرط لازم برای ایجاد یک سطح سه ضلعی، را پوشش می‌دهد. بمجرد تعیین  $(\bar{u}_k, \bar{v}_l)$  بردارهای گرهی  $U$  و  $V$  را می‌توان از رابطه (۲-۱۲۹) محاسبه کرد.

بدیهی است برای محاسبه نقاط کنترل، معادله (۲-۱۳۰) یک سامانه خطی از  $(n+1) \times (m+1)$  معادله خطی از  $P_{i,j}$  مجهول را نشان می‌دهد. ولی چون  $S(u,v)$  یک سطح حاصلضرب تانسوری است  $P_{i,j}$ ها بصورت مجموعه‌ای از میانبایی‌های منحنی ساده‌تر و کارآمدتر قابل بدست آوردن هستند. برای  $l$  ثابت معادله (۲-۱۳۰) به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$Q_{k,\ell} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \left( \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_\ell) P_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) R_{i,\ell} \quad (2-132)$$

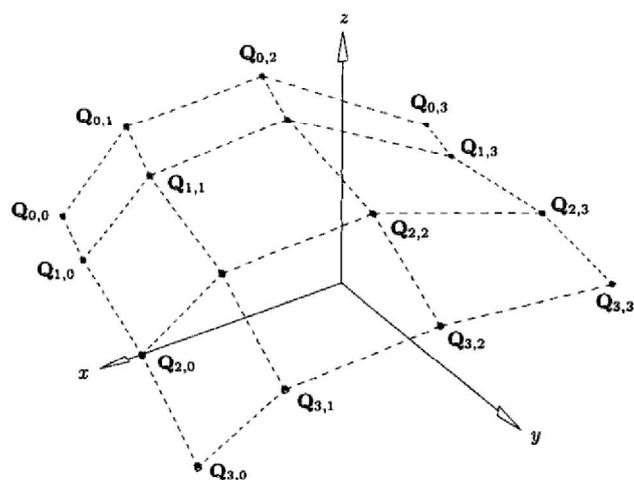
در حالیکه

$$R_{i,\ell} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_\ell) P_{i,j} \quad (2-133)$$

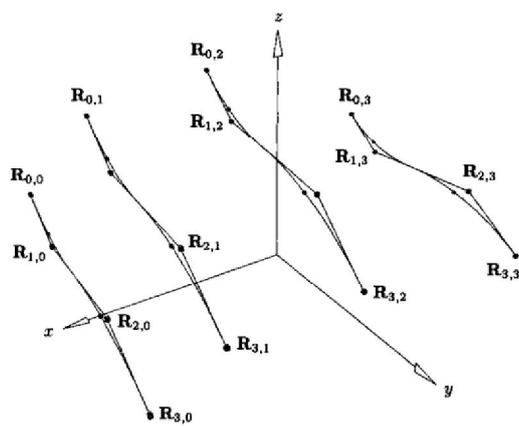
لازم به ذکر است که معادله (۲-۱۳۲) فقط یک میانبایی منحنی از میان نقاط  $Q_{k,l}$ ،  $k=0, \dots, n$  است.  $R_{i,l}$  نقاط کنترل ایزوپارامتری روی  $S(u,v)$  در  $v = \bar{v}_l$  است. حال با ثابت نگهداشتن  $i$  و تغییر  $l$ ، معادله (۲-۱۳۲) میانبایی منحنی از بین نقاط  $R_{i,0}, \dots, R_{i,m}$  با  $P_{i,0}, \dots, P_{i,m}$  بعنوان نقاط کنترل محاسبه شده است. بنابراین، تابع بدست آوردن تمام  $P_{i,j}$ ها عبارت است از (شکل ۲-۹۲):

(۱) با استفاده از  $U$  و  $\bar{u}_k$ ،  $m+1$  میانبایی منحنی از بین  $Q_{0,l}, \dots, Q_{n,l}$  (به ازای  $l=0, \dots, m$ ) انجام شود. با این کار  $P_{i,l}$  معلوم می‌شوند (شکل ۲-۹۲b):

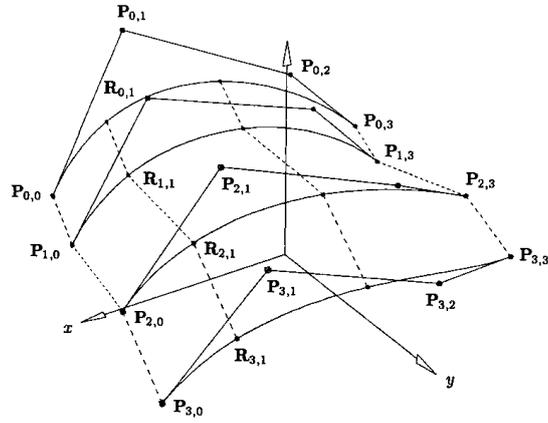
۲) با استفاده از  $V$  و  $\bar{V}_l$ ،  $n+1$  میانمایی منحنی از بین  $R_{i,0}, \dots, R_{i,m}$  (به ازای  $i=0, \dots, n$ ) انجام شود. با این کار  $P_{i,j}$  پیدا می‌شوند (۲-۹۲۵).  
 شکل (۲-۹۲۵) پرتره سطح منتجه را نشان می‌دهد. تابع ۲-۱۶ برای میانمایی کلی سطح نوشته شده است:



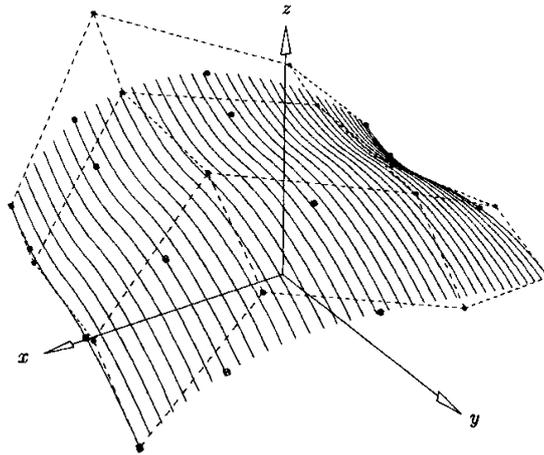
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل ۹۲-۲ میانمایی کلی سطح: (a) نقاط داده‌ای (b) میانمایی نقاط داده در جهت  $u$  (c) میانمایی نقاط داده در جهت  $v$  از میان نقاط کنترل میانمایی‌ها در جهت  $u$  (d) میانمایی سطحی با نمایش نقاط کنترل.

تابع ۱۸-۲

```
SurfMeshParams(n,m,Q,uk,vl)
{ /* Compute parameters for */
  /* global surface interpolation */
  /* Input: n,m,Q */
  /* Output: uk,vl */
  /* First get the uk */
```

```

num = m+1; /* number of nondegenerate rows */
uk[0] = 0.0; uk[n] = 1.0;
for (k=1; k<n; k++) uk[k] = 0.0;
for (l=0; l<=m; l++)
{
total = 0.0; /* total chord length of row */
for (k=1; k<=n; k++)
{
cde[k] = Distance3D(Q[k][l],Q[k-1][l]);
total = total + cde[k];
}
if (total == 0.0) num = num-1;
}

```

تابع ۱۹-۲

```

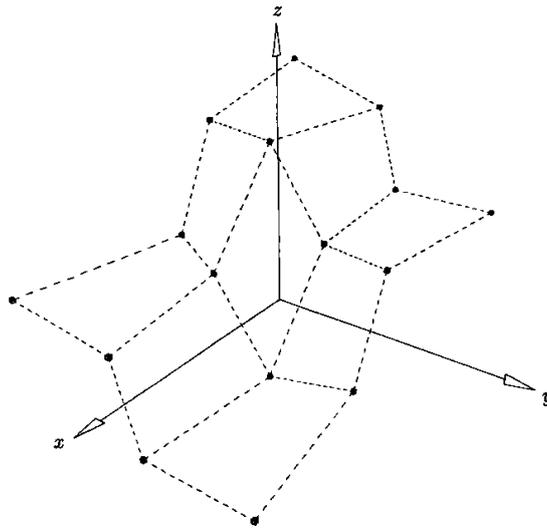
GlobalSurfInterp(n,m,Q,p,q,U,V,P)
{ /* Global surface interpolation */
/* Input: n,m,Q,p,q */
/* Output: U,V,P */
SurfMeshParams(n,m,Q,uk,vl); /* get parameters */
Compute U using Eq.(9.8);
Compute V using Eq.(9.8);
for (l=0; l<=m; l++)
{

Do curve interpolation through Q[0][l],...,Q[n][l];
This yields R[0][l],...,R[n][l];
}
for (i=0; i<=n; i++)
{
Do curve interpolation through R[i][0],...,R[i][m];
This yields P[i][0],...,P[i][m];
}
}

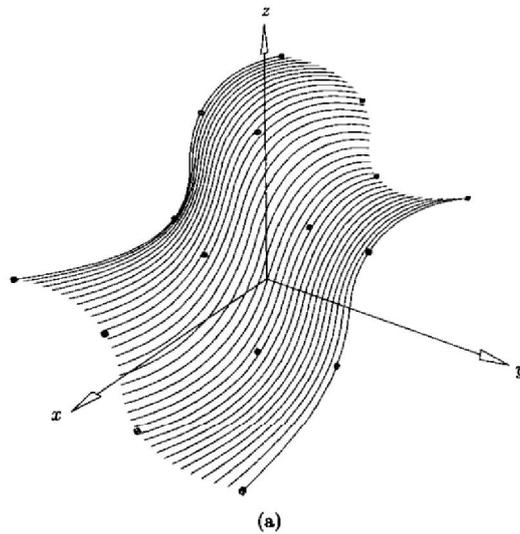
```

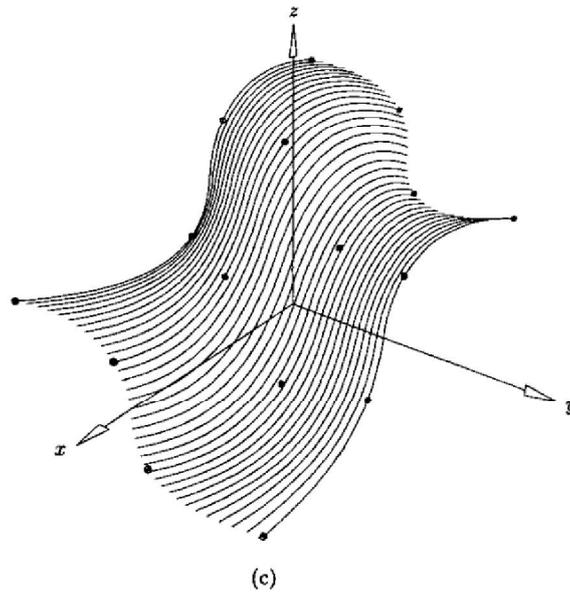
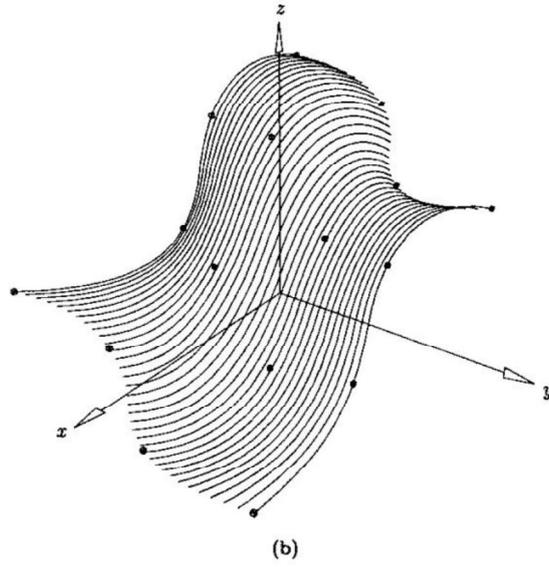
چند نمونه از میانبایی‌های سطح در شکل‌های ۹۲-۲ تا ۹۶-۲ نشان داده شده‌اند. مجموعه داده‌ها در شکل ۹۲-۲ نشان داده شده است. سطوح با پارامتری کردن‌ها و بردارهای گرهی مختلف در شکل‌های ۹۴-۲ نشان داده شده‌اند. درجه، (۳ و ۲) بوده و پارامتری کردن‌ها و بردارهای گرهی یکنواخت هستند (شکل ۹۴a-۲): در روش طول وتر، گره‌ها با میانگین‌گیری (شکل ۹۴b-۲) و در روش مرکزی، گره‌ها با میانگین‌گیری (شکل ۹۴c-۲) بدست می‌آیند. در شکل ۹۵-۲ میانبایی‌های

سطحی با درجات متفاوت نمایش داده شده‌اند. در شکل ۹۵a-۲ درجه (۲ و ۳): در شکل ۹۴b-۲، درجه (۲ و ۳) و در شکل ۹۴c-۲، درجه (۳ و ۳) هستند. در شکل ۹۶-۲ عدم توانایی میانجیابی داده‌های مسطحه ملاحظه می‌شود.

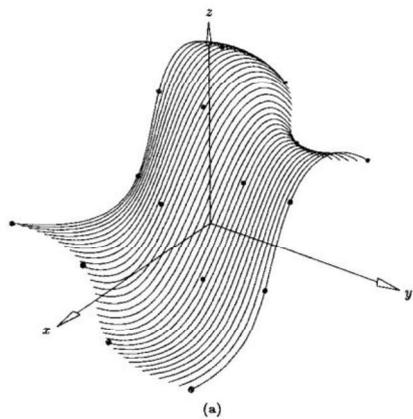


شکل ۹۲-۲ مجموعه نقاط داده شده برای برازش.

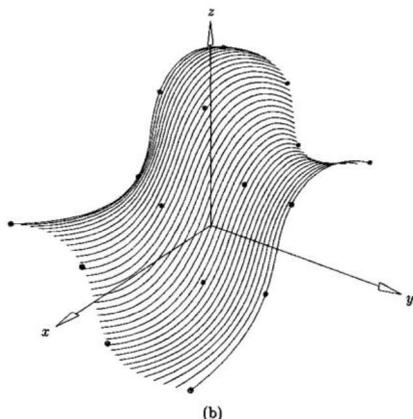




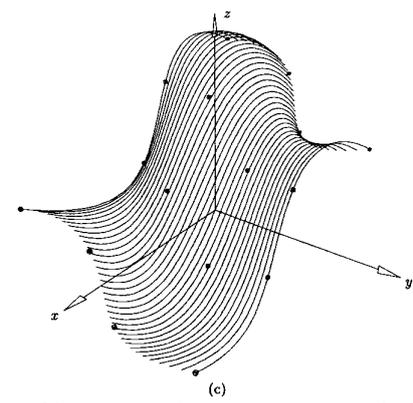
شکل ۲-۹۴ میانبایی‌های سطحی با سطوحی با درجه (۲,۳) و با استفاده از روش‌های مختلف پارامتری کردن و محاسبه بردارهای گرهی.



(a)

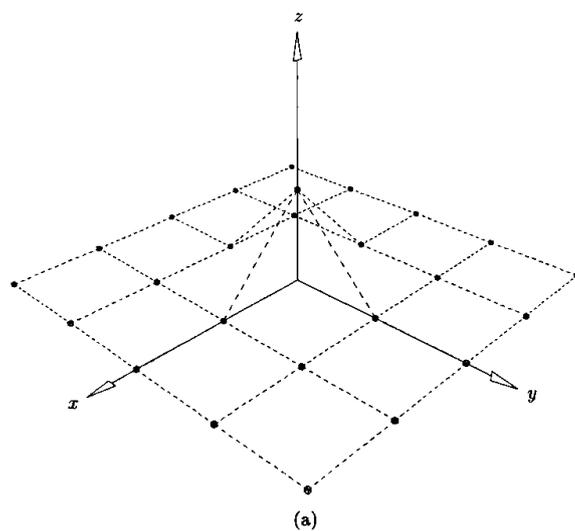


(b)

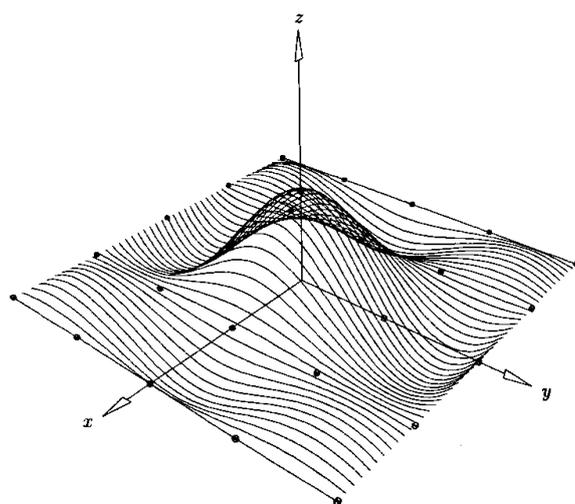


(c)

شکل ۲-۹۵ میانبایی‌های سطحی با استفاده از درجات مختلف سطوح و پارامتری کردن به روش طول وتر و روش میانگین گیری برای محاسبه بردار گردها



(a)



(b)

شکل ۲-۹۶ نمونه‌ای از میانبازی کلی سطح (a) داده‌ها شامل نقاط هم صفحه (b) سطح میانباز.

### ۲-۲۵-۳ برازش تقریبی کلی

تقریب به مراتب از میانبازی دشوارتر است. در میانبازی تعداد نقاط کنترل بطور اتوماتیک از روی درجه انتخابی و تعداد داده‌ها تعیین می‌شود؛ جاگیری گره‌ها سرراست بوده و خطای منحنی یا سطح وجود ندارد که نیاز به کنترل داشته باشد. در تقریب، یک باند خطای  $E$  از منحنی و یا سطح به‌مراه داده‌های مورد برازش داده می‌شود. همیشه از قبل تعداد نقاط کنترل لازم



$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{k=1}^{m-1} |\mathbf{Q}_k - \mathbf{C}(\bar{u}_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \left| \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right|^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} \left( \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \cdot \left( \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} \left[ \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}_k - 2 \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) (\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{P}_i) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \right]
 \end{aligned} \tag{۱۳۶-۲}$$

$f$  تابع مقدار عددی از  $n-1$  متغیر  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-1}$  است. برای حداقل کردن  $f$ ، مشتقات آن نسبت به  $n-1$  نقطه  $\mathbf{P}_l$  مساوی صفر قرار داده می‌شوند.  $l$  امین مشتق عبارتست از:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_l} = \sum_{k=1}^{m-1} \left( -2N_{l,p}(\bar{u}_k) \mathbf{R}_k + 2N_{l,p}(\bar{u}_k) \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \right) \tag{۱۳۷-۲}$$

در نتیجه رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) N_{i,p}(\bar{u}_k) \right) \mathbf{P}_i = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \mathbf{R}_k \tag{۱۳۸-۲}$$

رابطه (۱۳۸-۲) به ازای  $l = 1, \dots, n-1$  یک سامانه  $n-1$  معادله نسبت به  $n-1$  مجهول  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-1}$  را ارائه می‌دهد که بصورت

$$(\mathbf{N}^T \mathbf{N}) \mathbf{P} = \mathbf{R} \tag{۱۳۹-۲}$$

قابل نوشتن است. در این رابطه  $N$  ماتریس  $(m-1) \times (n-1)$  از عددیهای

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix} \tag{۱۴۰-۲}$$

$R$  بردار حاوی  $n-1$  نقطه

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) \mathbf{R}_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \mathbf{R}_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \mathbf{R}_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \mathbf{R}_{m-1} \end{bmatrix} \tag{۱۴۱-۲}$$

و

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{۱۴۲-۲}$$

هستند. معادله (۱۳۹-۲) متشکل از یک ماتریس ضرایب با سه سمت راست و سه مجموعه از مجهولات (مختصات  $(x, y, z)$ ) است. برای تنظیم معادلات (۱۴۰-۲) و (۱۴۱-۲) به یک بردارگرهی  $U = \{u_0, \dots, u_r\}$  و پارامترهای  $\{\bar{u}_k\}$  نیاز است.  $\{\bar{u}_k\}$  را می‌توان با استفاده از معادله (۱۲۶-۲) محاسبه کرد. جاگیری گره‌ها نحوه توزیع  $\{\bar{u}_k\}$  را منعکس می‌کند. اگر  $d$  یک عدد حقیقی مثبت باشد که با  $i = \text{int}(d)$  نشان داده شود،  $i$  بزرگترین عدد صحیح است بطوریکه  $i \leq d$ . به  $n+p+2$  گره نیاز است؛  $n-p$  گره داخلی و  $n-p+1$  بازه گرهی وجود دارند. با فرض

$$d = \frac{m+1}{n-p+1} \quad (142-2)$$

گره‌های داخلی با رابطه زیر تعریف می‌شوند:

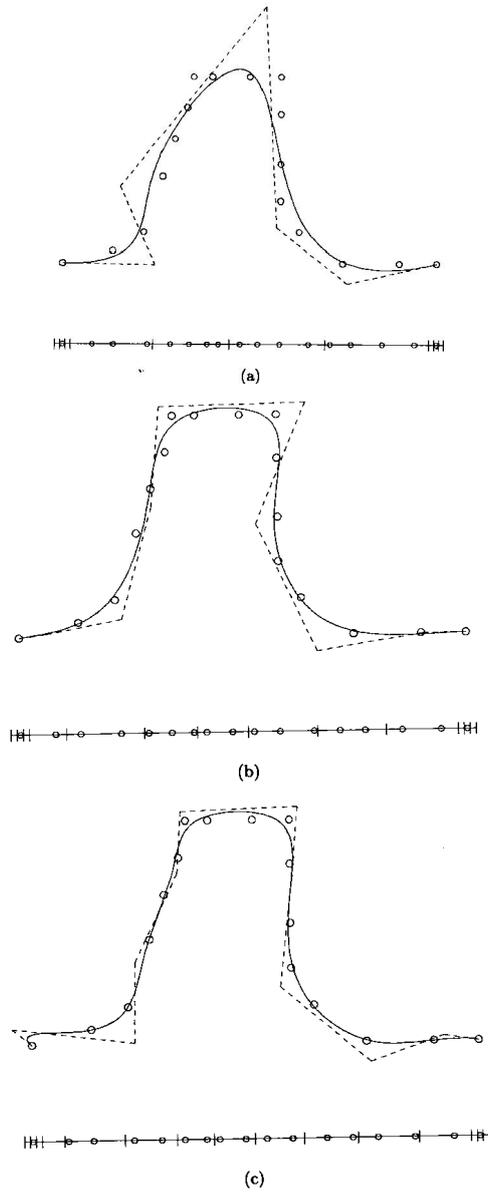
$$i = \text{int}(jd) \quad \alpha = jd - i \quad (144-2)$$

$$u_{p+j} = (1 - \alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p$$

معادله (۱۴۴-۲) گارانتی می‌کند که هر بازه گرهی شامل حداقل یک  $\bar{u}_k$  بوده و تحت این شرایط ماتریس  $(N^T N)$  در (۱۳۹-۲) نامحدود مثبت و خوش شرایط است. این معادله را می‌توان با روش حذفی گوس حل کرد. بعلاوه،  $(N^T N)$  یک پهنای نیم باند کمتر از  $p+1$  خواهد داشت. شکل‌های ۲-۹۷ نمونه‌هایی از برازش منحنی به روش پیش‌گفته را نشان می‌دهند. در شکل ۲-۹۷a هفت نقطه کنترل مشخص شده‌اند. شکل ۲-۹۷b یک برازش  $u$  نقطه کنترلی و شکل ۲-۹۷c یک برازش یازده نقطه را نشان می‌دهند. ملاحظه می‌شود که از نقطه نظر فاصله، با افزایش تعداد نقاط کنترل تقریب بهتر شده است. اما هر چه تعداد نقاط کنترل به تعداد نقاط داده نزدیک می‌شود شکل‌های غیرمطلوب می‌تواند در صورت رفتار نویز گونه نقاط داده یا wiggles ناخواسته ظاهر شود.

### ۲-۲۵-۵ برازش تقریبی سطح به روش حداقل مربعات

فرض می‌شود  $\{Q_{k,l}\}$ ،  $k=0, \dots, r$  و  $l=0, \dots, s$  مجموعه‌ای  $(r+1) \times (s+1)$  از نقاط هستند که باید با یک سطح غیرنسبتی درجه  $(p, q)$  با  $(m+1) \times (n+1)$  نقطه کنترل تقریب زده شود. گرچه تنظیم و حل یک مساله برازش حداقل مربعات امکان‌پذیر است، خطی یا غیرخطی و با یا بدون وزن‌ها و قیود، این کار خیلی مشکل‌تر از برازش منحنی است. در اینجا یک روش تقریب خیلی ساده براساس روش برازش منحنی حداقل مربعات ارائه می‌شود و برای اکثر مصارف کافی است. همانطوریکه برای میانمایی کلی سطح انجام شد، بسادگی منحنی-هایی روی داده‌ها در یک جهت برازش می‌شود و سپس منحنی‌هایی از میان نقاط کنترل منتجه در جهت دیگر برازش می‌شود.



شکل ۲-۹۷

Global curve fitting. (a) Seven control points; (b) nine control points; (c) eleven control points.

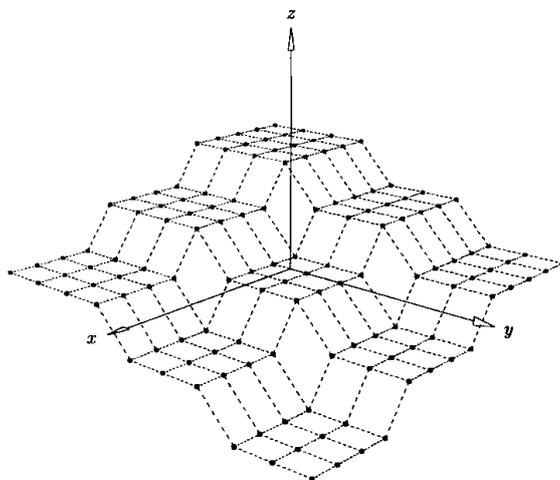
تابع ۱۹-۲ نقاط گوشه‌ای  $Q_{0,0}, Q_{r,0}, Q_{0,s}, Q_{r,s}$  را بدقت میانمایی کرده و باقی نقاط  $\{Q_{k,l}\}$  را تقریب می‌زند. این تابع از برازش‌های منحنی حداقل مربعات بصورت تکراری با معادلات (۱۳۵-۲) و (۱۳۹-۲) تا (۱۴۱-۲)

تابع ۱۹-۲

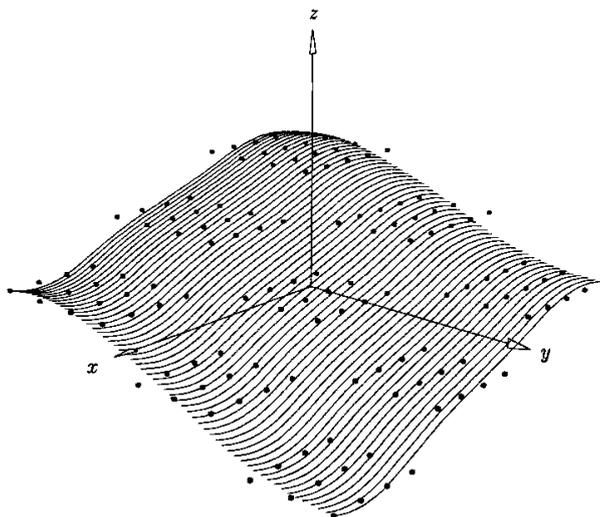
```
GlobalSurfApproxFixednm(r,s,Q,p,q,n,m,U,V,P)
{ /* Global surface approx with fixed num of ctrl pts */
  /* Input: r,s,Q,p,q,n,m */
  /* Output: U,V,P */
  SurfMeshParams(r,s,Q,ub,vb);
  Compute knots U by Eqs.(9.68),(9.69);
  Compute knots V by Eqs.(9.68),(9.69);
  Compute Nu[][] and NTNu[][] using Eq.(9.66);
  LUdecomposition(NTNu,n-1,p);
  for (j=0; j<=s; j++)
  { /* u direction fits */
    Temp[0][j] = Q0,j;   Temp[n][j] = Qr,j;
    Compute and load Ru[] (Eqs.[9.63],[9.67]);
    Call ForwardBackward() to get the control points
      Temp[1][j],...,Temp[n-1][j];
  }
  Compute Nv[][] and NTNv[][] using Eq.(9.66);
  LUdecomposition(NTNv,m-1,q);
  for (i=0; i<=n; i++)
  { /* v direction fits */
    P[i][0] = Temp[i][0];   P[i][m] = Temp[i][s];
    Compute and load Rv[] (Eqs.[9.63],[9.67]);
    Call ForwardBackward() to get the control points
      P[i][1],...,P[i][m-1];
  }
}
```

استفاده می‌کند.  $(s+1)$  سطر از داده‌ها ابتدا برازش می‌شوند و نقاط کنترل منتجه در یک آرایه محلی  $Temp[n+1][s+1]$  ذخیره می‌شوند. سپس برازشی روی این نقاط کنترل انجام می‌دهد تا سطحی با  $(n+1) \times (m+1)$  نقطه کنترل تولید نماید. لازم به ذکر است ماتریس‌های  $N$  و  $N^T$  فقط یکبار برای هر جهت باید محاسبه شوند و تجزیه  $LU$  ای  $N^T N$  فقط یکبار برای هر جهت انجام می‌شود. آرایه‌های محلی  $Nu[r-1][n-1]$  و  $N^T Nu[n-1][n-1]$  برای برازش در جهت  $u$  و  $Nv[s-1][m-1]$  و  $N^T Nv[m-1][m-1]$  برای برازش در جهت  $v$  لازمند. بردار  $R$  در معادله (۱۴۱-۲) در  $Rv[m-1]$  و  $Ru[n-1]$  ذخیره می‌شود.

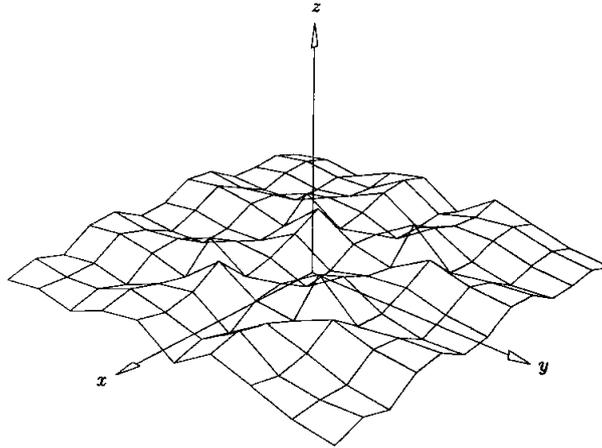
شکل‌های ۹۸-۲ تا ۱۰۱-۲ برازش سطح را نشان می‌دهند. شکل ۹۸-۲ داده‌های اصلی وصل شده بهم با خطوط مستقیم را نشان می‌دهد. شکل ۹۹-۲ یک سطح برازنده از درجه (۲ و ۳) به کمک یک شبکه کنترل (۵×۶) را نشان می‌دهد. خطای تقریب در شکل ۹۹-۲ نمایش داده شده است. شکل ۱۰۰-۲ تقریبی با یک شبکه (۸×۸) است. کیفیت آن خیلی از آنچه در شکل ۹۹-۲ دیده می‌شود بهتر است. برای مقایسه، شکل ۱۰۱-۲ یک میانمایی کلی درجه (۲ و ۳) (با استفاده از روش پارامترهای طول و تری) روی داده‌های شکل ۹۸-۲ نشان داده شده است.



شکل ۹۸-۲ مجموعه نقاط داده برای تقریب سطحی.

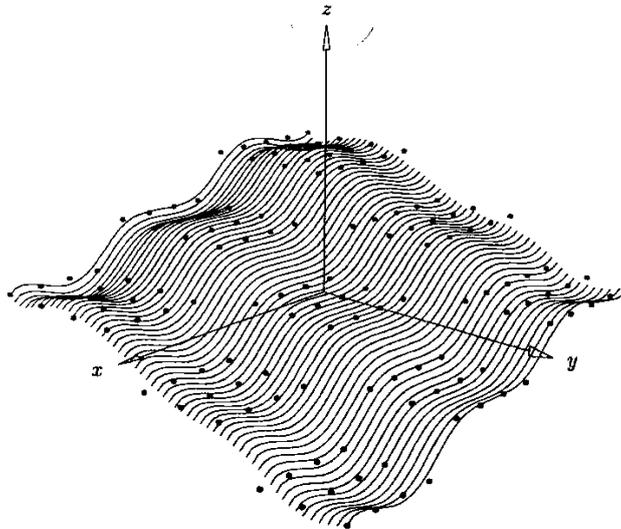


(a)



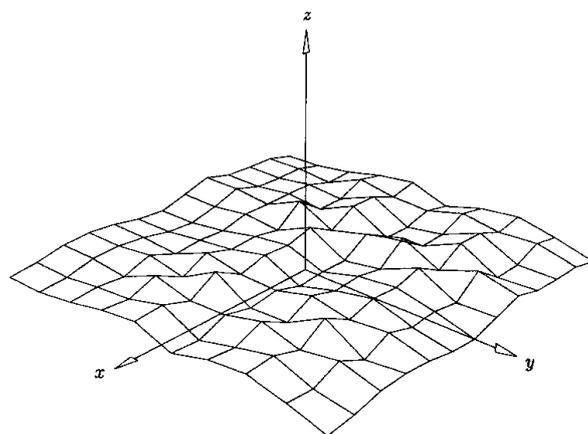
(b)

شکل ۲-۹۹ برازش سطح بروش حداقل مربعات با سطحی از درجه (۲,۳) با استفاده از یک شبکه (۵×۶) از نقاط کنترل (a) سطح تقریبی (b) سطح خطا(خطا در نقاط داده اندازه گیری شده است)



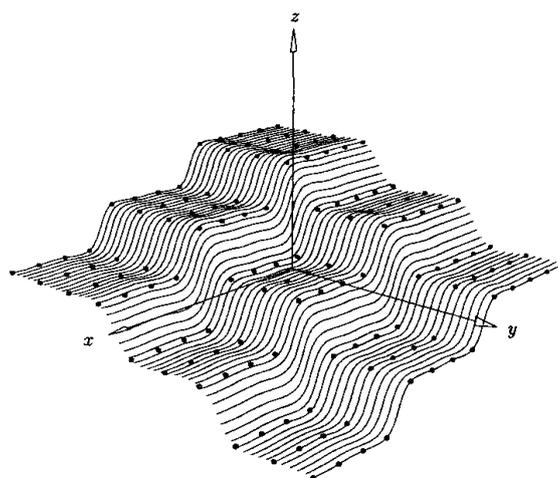
(a)

شکل ۲-۱۰۰ برازش سطح بروش حداقل مربعات با سطحی از درجه (۲,۳) با استفاده از یک شبکه (۸×۸) از نقاط کنترل (a) سطح تقریبی (b) سطح خطا(خطا در نقاط داده اندازه گیری شده است)



(b)

شکل ۲-۱۰۰ ادامه



شکل ۲-۱۰۱ سطح میانپای از نقاط نشان داده شده در شکل ۲-۹۸.

۲-۲۶ دستکاری منحنی (curve manipulation)

۲-۲۶-۱ نمایش (displaying)

برای نمایش منحنی‌ها، از روابط پارامتری استفاده می‌شود. پس از محاسبه مختصات نقاط متوالی مناسب، از این نقاط به عنوان نقاط انتهایی پاره خط‌های متشکله منحنی استفاده می‌شود.

برای ایجاد و نمایش این پاره خطها، سخت افزارهای مخصوص تولید خط، وجود دارند. نمایش منحنی روی نمایشگر با نمایش آن در انباره دادهها بسیار متفاوت است.

### ۲-۲۶-۲ ارزیابی نقاط روی منحنی (evaluating points on curves)

روش افزایش  $u$  در رابطه پارامتری منحنی برای محاسبه  $x, y, z$  های مختلف روش ناکارآمدی است و تکنیک تفاضل رو به جلو (forward difference) برای ارزیابی رابطه چندجمله‌ای منحنی در بازه‌های مساوی متداولترین روش گام به گام (incremental) است. به عنوان مثال، برای اعمال این روش در مورد یک چندجمله‌ای مکعبی  $P(u)$ ، اگر  $(n+1)$  نقطه به فاصله  $\Delta u = \frac{1}{n}$  از هم در محدوده  $[0, 1]$  در نظر گرفته شوند می‌توان معادلات زیر را برای شروع بکار برد:

$$P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d, \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$P(0) = d$$

$$\Delta_1 P_0 = a(\Delta u)^3 + b(\Delta u)^2 + c(\Delta u)$$

$$\Delta_2 P_0 = 6a(\Delta u)^3 + 2b(\Delta u)^2$$

$$\Delta_3 P_0 = 6a(\Delta u)^3 \quad (145-2)$$

هر نقطه متوالی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$P_{i+1} = P_i + \Delta_1 P_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\Delta_1 P_{i+1} = \Delta_1 P_i + \Delta_2 P_i$$

$$\Delta_2 P_{i+1} = \Delta_2 P_i + \Delta_3 P_i$$

رسیدن به  $z, y, x$  از طریق قرار دادن  $u$  در رابطه پارامتری منحنی، روش مستقیم حل (direct point solution) نام دارد. روش معکوس حل نقطه، روش رسیدن از  $z, y, x$  به  $u$  است.

### ۲-۲۶-۳ اختلاط (Blending)

$$\begin{cases} C_1(u_1), & 0 \leq u_1 \leq a \\ C_2(u_2), & 0 \leq u_2 \leq b \end{cases} \quad \text{برای اختلاط دو منحنی دلخواه}$$

طبق شکل ۲-۱۰۲، برای برقراری پیوستگی  $C^0$  باید:

$$C_1(a) = C_2(0) \quad (146-2)$$

در صورت نیاز به پیوستگی  $C^1$  باید:

$$\begin{aligned} C_1'(a) &= \alpha_1 T, \\ C_2'(0) &= \alpha_2 T \end{aligned} \quad (147-2)$$

چون طبق شکل ۲-۱۰۲ انحنای یک منحنی  $(\theta)$  از روابط زیر تعریف می‌شود:

$$B = T \times N$$

$$\frac{1}{\rho} B = \frac{C' \times C''}{|C'|^3} \quad (148-2)$$

برای برقراری پیوستگی  $C^2$  در نقطه اتصال دو منحنی باید شرط زیر حاکم باشد:

$$\frac{C'_1(a) \times C''_1(a)}{|C'_1(a)|^3} = \frac{C'_2(0) \times C''_2(0)}{|C'_2(0)|^3} \quad (149-2)$$

اگر به جای  $C'$  ها از رابطه پیوستگی  $C^1$ ، مقادیر معادل  $T$  قرار دهیم:

$$T \times C''_1(a) = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 T \times C''_2(0) \quad (150-2)$$

$$C''_2(0) = \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 C''_1(a) = \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 C''_1(a) + \gamma C'_1(a)$$

که یک عدد دلخواه است و معمولاً برای کارهای عملی صفر فرض می‌شود.

#### ۲-۲۶-۴ قطعه‌بندی (Segmentation)

از لحاظ ریاضیاتی، قطعه بندی منحنی معادل پارامتری کردن مجدد منحنی (reparametritation) است.

- ✓ برای قطعه‌بندی خط  $(P_0, P_1)$  در یک نقطه معین  $P_2$ ، کافی است دو خط جدید با نقاط  $(P_0, P_2)$  و  $(P_2, P_1)$  تعریف شوند؛
- ✓ برای مقاطع مخروطی کافی است زاویه (پارامتر) نظیر نقطه قطعه‌بندی را پیدا کرد و با معلوم بودن زوایای شروع و خاتمه منحنی اولیه، منحنی‌های جدید، با تعیین محدوده‌های جدید زاویه (پارامتر این نوع منحنی) بدست می‌آیند؛
- ✓ برای منحنی‌های چندجمله‌ای، به نوع دیگری از تبدیل پارامتر نیاز است. اگر قرار است که درجه منحنی تغییر نکند، که در قطعه بندی همینطوری است باید تبدیل پارامتر خطی باشد؛ یعنی

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)v \quad 0 \leq v \leq 1 \quad \text{برای اولین قطعه} \quad (151-2)$$

$$u = u_1 + (u_m - u_1)v \quad 0 \leq v \leq 1 \quad \text{برای اولین قطعه}$$

باید روابط بالا را در معادله منحنی قرار داده و محدوده پارامتر را  $[0,1]$  کنیم. برای ساده شدن محاسبات که شامل توان  $n$  از  $u$  می‌باشند می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$u^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_0^r (\Delta u_0 v)^{n-r} \text{ where } \Delta u_0 = u_1 - u_0 \quad (152-2)$$

### ۲-۲۶-۵ تریمنگ (Trimming)

اصطلاح تریم منحنی شامل کوتاه کردن و یا امتداد دادن آن می‌شود. از نظر ریاضی، تریم کردن مشابه قطعه‌بندی، یعنی تغییر محدوده پارامتر است فقط به جای دو یا چند تکه منحنی، یک تکه منحنی خواهیم داشت. تریم به مفهوم امتداددهی منحنی‌های چندجمله‌ای توصیه نشده است چون رفتار منحنی خارج از محدوده اصلی  $u_0 \leq u \leq u_{\max}$  پیش بینی نشده است.

### ۲-۲۶-۶ تقاطع (Intersection)

برای یافتن تقاطع دو منحنی  $P(u)$  و  $Q(v)$  باید سه معادله و دو مجهول  $(u, v)$

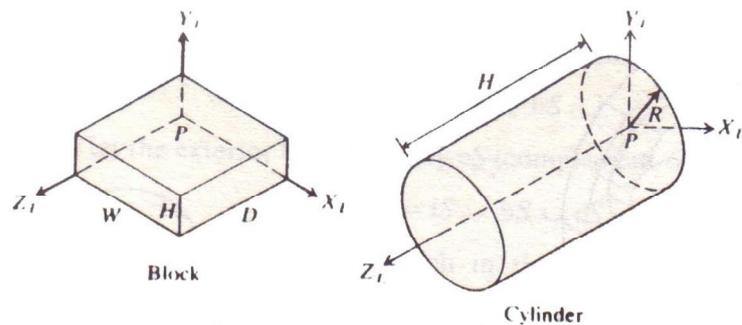
$$P(u) - Q(v) = 0 \quad (153-2)$$

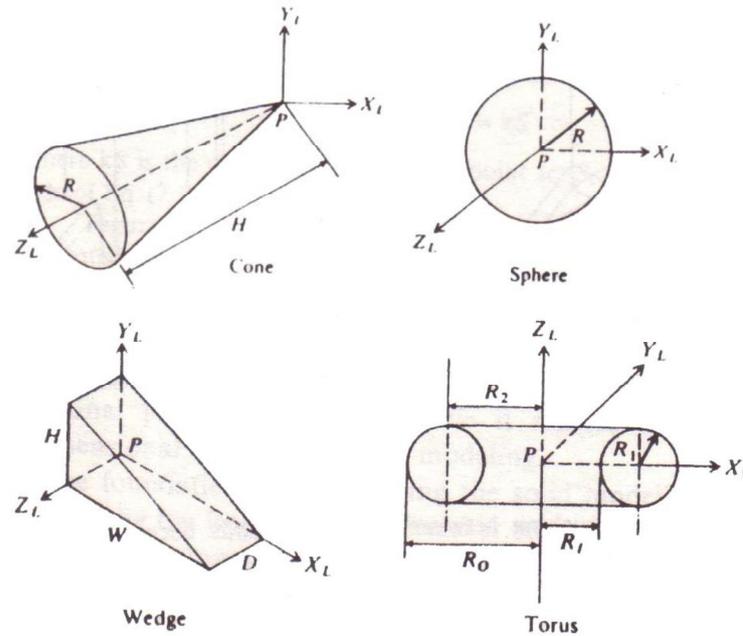
را حل کرد. برای یافتن مجهولات دوگانه  $u$  و  $v$ ، دو معادله  $x$  و  $y$  کافی است و می‌توان معادله  $z$  را برای تحقیق صحت حل استفاده کرد. چون معادلات بالا می‌توانند غیرخطی باشند و به روش‌های عددی مثل نیوتون - رافسون به حدس اولیه نیاز خواهد بود می‌توان با همان نقطه‌ای که کاربر موقع یافتن تقاطع دو منحنی معرفی می‌کند بعنوان حدس اولیه شروع کرد.

### ۲-۲۷ ابزار مدل‌سازی حجمی

#### ۲-۲۷-۱ عناصر اولیه و عملگرهای ریاضی

عناصر اولیه حجمی (Primitives) اشکال ساده‌ای هستند که می‌توان با ترکیب آنها بوسیله عملیات بولی (Boolean operation)، مدل حجمی مورد نظر را تولید کرد. به این عناصر «بلوک‌های ساختمانی» (Building block) نیز می‌گویند. این بلوک‌ها خود احجام معتبری به حساب می‌آیند.



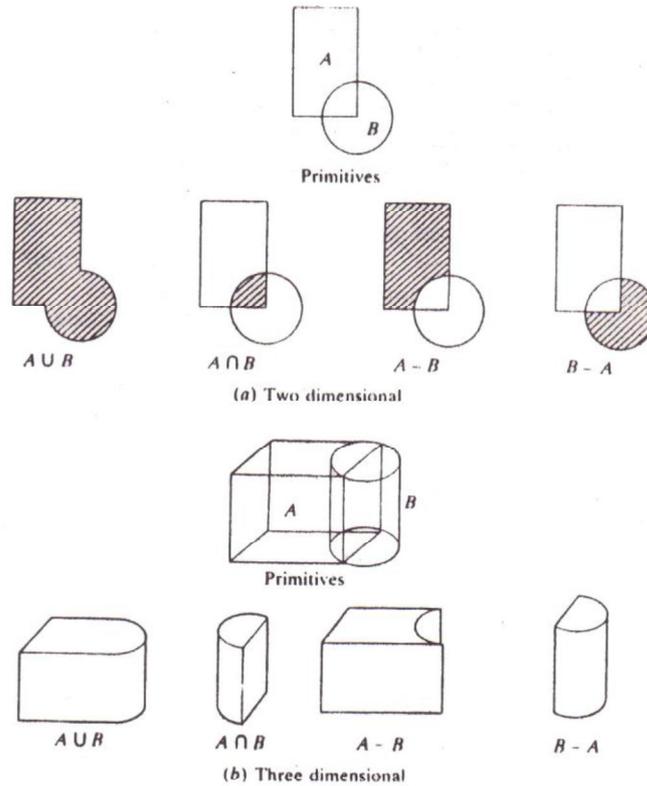


شکل ۲-۱۰۳ پرکاربردترین عناصر اولیه حجمی

تعداد زیادی عنصر اولیه در مقیاس تجارتي وجود دارند ولی پرکاربردترین آنها مکعب مستطیل، استوانه، مخروط و کره هستند (شکل ۲-۱۰۳).

برای تعریف یک عنصر اولیه باید سه نوع داده مکانی (*Location data*)، هندسی (*Geometric data*) و جهت‌گیری (*Orientation*) برای سیستم معلوم باشند. داده‌های مکانی عنصر از سیستم مختصات محلی (*Local coordinate*) و نقطه مبدا آن تعیین می‌شوند. داده‌های هندسی از یک عنصر به عنصر دیگر فرق می‌کنند. مثلاً در مورد یک استوانه شعاع قاعده و طول آن، داده‌های هندسی آن هستند. مبدا مختصات محلی و داده‌های هندسی توسط کاربر وارد سیستم می‌شوند. داده‌های جهت‌گیری، طرز قرارگرفتن عنصر را در فضا نسبت به عناصر دیگر، در سیستم مختصات مدل (*MCS*) یا سیستم مختصات کار (*WCS*) مشخص می‌کنند. در شکل بالا عناصر اولیه متداول، سیستم مختصات محلی، داده‌های هندسی و نحوه جهت‌گیری تعریف شده برای آنها نمایش داده شده است.

عناصر اولیه حجمی در مدل‌سازهایی استفاده می‌شوند که سیستم ارتباط کاربری (*User interface*) آنها از نوع *CSG* است (که در قسمت‌های بعد به آنها اشاره خواهد شد). همانطوریکه قبلاً گفته شد، در این مدل‌سازی‌ها از ترکیب این عناصر، مدل نهایی تولید می‌گردد. عناصر اولیه روش‌هایی مانند نمایش کرانه‌ای (*B-rep*) و جاروبی (*Sweeping*)، منحنی‌های تحلیلی و مصنوعی هستند.



شکل ۲-۴-۱ عملگرهای بولی

در روش بلوکی‌سازی مدل‌های حجمی، از عملیات بولی استفاده می‌شود. عملگرهای بولی (Boolean operators) شامل اجتماع (Union)، اشتراک (Intersection) و تفاضل (Difference) هستند. عملگر اجتماع دو عنصر را با هم ترکیب می‌کند. حاصل اشتراک دو عنصر، حجم مشترک بین آنها است. عملگر تفاضل نیز یک جسم را از دیگری کم کرده و باقیمانده را مشخص می‌کند (شکل ۲-۴-۱). در روش نمایش *B-rep*، از عملگرهای اولری استفاده می‌شود. این عملگرها بر اساس معادله اولر عمل می‌کنند که در آینده به آنها اشاره خواهد شد.

### ۲-۲۷-۲ خصوصیات یک مدل حجمی

از لحاظ ریاضیاتی، مدل حجمی یک جسم در رایانه مجموعه‌ای از نقاط متعلق به فضای اقلیدسی سه بعدی است. این مجموعه شامل نقاط واقع بر مرز و داخل جسم است. بنابراین نقاطی که در این مجموعه وجود ندارند خارج جسم قرار می‌گیرند. یکی از ویژگی‌های این مجموعه، بسته بودن هندسی (*Geometric closure*) آن است. یعنی نقاط مرزی جسم، داخل آن را در برمی‌گیرند. دلیل کامل و واضح بودن مدل‌های حجمی، خاصیت بسته بودن هندسی آنهاست؛

در صورتیکه در مدل‌های قاب سیمی و سطحی فقط مرز جسم معرفی می‌شود. خصوصیات قابل توجه یک مدل حجمی عبارتند از:

الف) صلیبیت (*Rigidity*): شکل و اندازه‌های یک مدل حجمی با تغییر موقعیت و جهت آن در فضا تغییر نمی‌کنند.

ب) همگنی در سه بعد: مرزهای مدل در تماس با داخل آن بوده و هیچ مرزی از جسم ایزوله یا آویزان نیست.

ج) محدود بودن و توصیف‌پذیری محدود: اندازه حجم نامحدود نمی‌باشد و با اطلاعات معین و محدود می‌توان جسم را مدل کرد.

د) بسته ماندن ضمن حرکت دادن و عملیات بولی با قاعده: با حرکت دادن مدل‌ها در فضا و دست‌کاری آنها بوسیله عملیات بولی، احجام معتبر و بسته دیگری تولید می‌شوند.

و) مشخص بودن حجم از روی مرزها: مرزهای مدل، حجم آن را در برمی‌گیرند و معرف داخل آن هستند.

در مواردیکه از مدل‌های حجمی برای انیمیشن و کارهای هنری استفاده می‌شود ظاهر مدل اهمیت اولیه دارد؛ ولی در شبیه‌سازی، نمایش به موقع (*real-time*) تصاویر مهمتر است. از طرف دیگر در مصارف انیمیشن و شبیه‌سازی، واقعی به نظر رسیدن تصاویر نسبت به دقیق بودنشان اولی‌تر است؛ درحالی‌که در فعالیت‌های طراحی و ساخت، نزدیکی هر چه بیشتر به واقعیت نسبت به دقت اهمیت ثانویه دارد.

### ۲-۲۷-۳ اصول مدل‌سازی حجمی

اصول مدل‌سازی حجمی عبارتند از: هندسه، توپولوژی، بسته بودن هندسی، تئوری مجموعه‌ها (*Set theory*)، عملیات مجموعه‌ای باقاعده (*Regularized set operation*) و طبقه‌بندی عضویت (*Set membership classification*) قبلاً به سه اصل اول اشاره شد. از نقطه نظر مدل‌سازی حجمی، بطور کلی تئوری مجموعه‌ها را می‌توان در مورد مجموعه نقاط نشان دهنده احجام در فضای سه بعدی بکار بست یا از آنها برای طبقه‌بندی مجموعه‌ای از نقاط دیگر استفاده کرد و به این وسیله مشخص کرد که نقاط مذکور در فضا داخل، خارج یا روی جسم مورد نظر قرار دارند. در تئوری مجموعه‌ها موضوعات زیر مطرح می‌شوند:

تعریف مجموعه، عناصر مجموعه و خصوصیات آنها، برابری مجموعه‌ها، عضویت یک عنصر به یک مجموعه، زیر مجموعه‌های یک مجموعه، مجموعه کل و مجموعه تهی، جبر مجموعه‌ها (عملیات مکمل‌گری، اجتماع و اشتراک) و دیاگرام ون، قوانین جبر مجموعه‌ها (جابه جایی، شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری، خود توانی و قوانین دمورگان و...) و چندتایی مرتب و حاصلضرب دکارتی.

مثال) مجموعه  $S$  که معرف یک حجم در فضا است، مجموعه‌ای از سه‌تایی مرتب می‌باشد. سه مجموعه پیدا کنید که حاصل ضرب آنها  $S$  باشد.  
 حل) مجموعه  $S$  را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \quad (153-2)$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$  نقاط داخل یا روی حجم هستند. این مجموعه را می‌توان به شکل زیر هم نوشت:

$$S = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} = \{(x_i, y_i, z_i) : 1 \leq i \leq n\} \quad (154-2)$$

اگر  $A, B, C$ ، مجموعه‌های مورد نظر باشند، عبارت خواهند بود از:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (155-2)$$

$$C = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

حاصل ضرب دکارتی مرتب ( *ordered Cartesian product* ) سه مجموعه بالا، همان مجموعه  $S$  است.

### ۲-۲۷-۳-۱ عملیات مجموعه‌ای باقاعده (Regularized set operation)

عملیات مجموعه‌ای فوق‌الذکر را عملیات تئوریک مجموعه‌ای هم می‌گویند. اگر از این عملیات در مدل‌سازی هندسی برای ساخت اجسام پیچیده استفاده شود عملیات مکمل‌گیری حذف می‌گردد زیرا ممکن است باعث ایجاد هندسه غیرقابل قبولی گردد. به علاوه اگر سایر عملیات فوق‌الذکر بدون باقاعده‌سازی بکار بروند مشکلاتی برای کاربر به همراه دارد. (بعنوان مثال نباید وجوه اجسام یا عناصر اولیه با هم همپوشانی کنند و امکان دارد اجسام حاصل دارای بستگی هندسی نباشند).

برای جلوگیری از بروز مشکلات بالا، مجموعه نقاط نشان دهنده اجسام و عملیات مجموعه‌ای موثر بر آنها، باید باقاعده شوند. مجموعه‌های باقاعده و عملیات مجموعه‌ای باقاعده (عملیات بولی)، جبر بولی را تشکیل می‌دهند. مجموعه باقاعده مجموعه‌ایست که از نظر هندسی بسته باشد. بنابراین چنین مجموعه‌ای دارای زیرمجموعه‌های داخلی و مرزی است. اگر بسته و داخل یک مجموعه معین، معرف خود آن مجموعه باشد، باقاعده است. در شکل ۲-۱۰۵،  $S$  بی‌قاعده است زیرا:

$s$  (not equal)  $kis$ 

(۱۵۶-۲)

بعضی از سیستم‌های مدل‌سازی از مجموعه‌های باز یا بدون مرز استفاده می‌کنند. یک مجموعه باز، باقاعده است اگر و تنها اگر:

 $s$  (equal)  $iks$ 

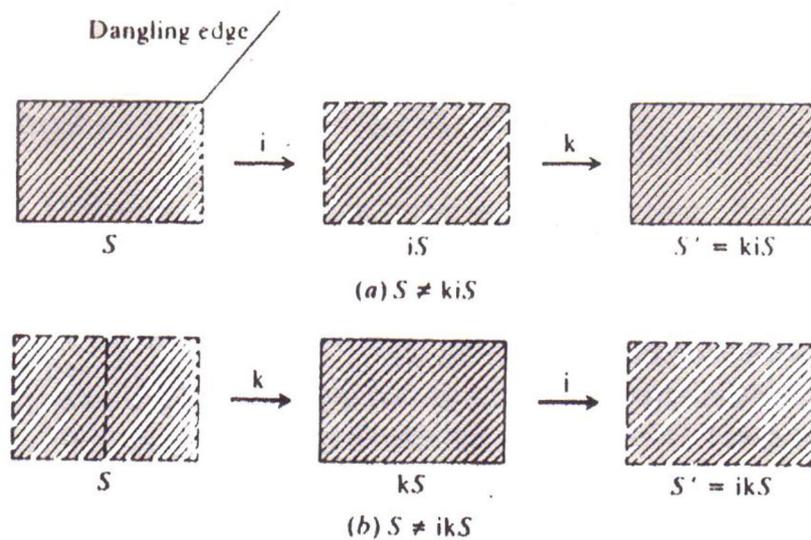
(۱۵۷-۲)

یعنی مجموعه باز وقتی باقاعده است که داخل بسته آن با مجموعه اولیه برابر باشد. شکل ۲-۱۰۵ با قاعده نیست زیرا

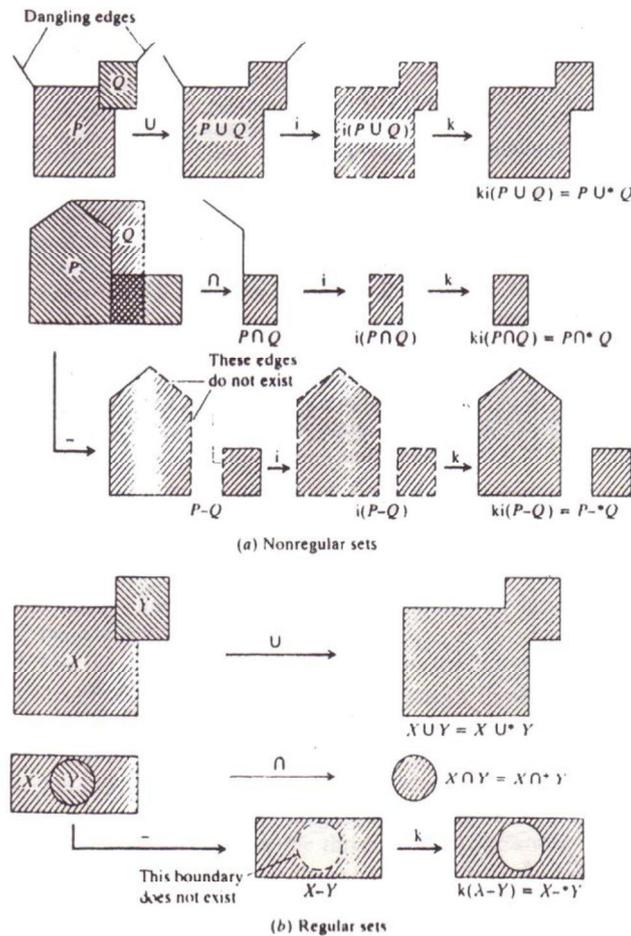
 $s$  (not equal)  $iks$ 

(۱۵۸-۲)

عملیات مجموعه‌ای (عملگرهای بولی) باید باقاعده باشند تا خروجی آنها مجموعه‌های باقاعده باشند. برای مدل‌سازی حجمی این بدان معنی است که مدل‌های ساخته شده از عناصر اولیه همیشه معتبر بوده و اجسام معتبر را نشان می‌دهند. عملگرهای باقاعده، همگنی و بُعد فضایی را محفوظ نگاه می‌دارند. حفظ همگنی یعنی، پس از اعمال این عملگرها نباید هیچ لبه یا وجه آویزانی بوجود بیاید و حفظ بُعد فضایی یعنی اینکه اگر دو جسم سه بعدی بوسیله، یکی از عملگرها با هم ترکیب شوند جسم حاصل نباید از بعد پائین‌تری (دو یا یک) باشد. باقاعده‌سازی بخصوص زمانی لازم است که با وجود همپوشاننده اجسام سر و کار داریم (شکل ۲-۱۰۶).



شکل ۲-۱۰۵ باقاعده بودن مجموعه

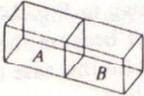
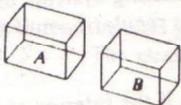
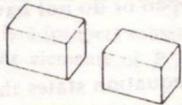
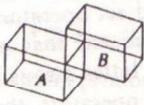
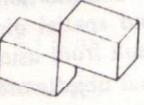
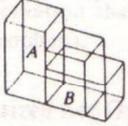
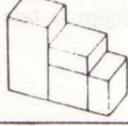
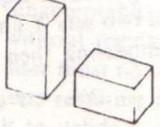


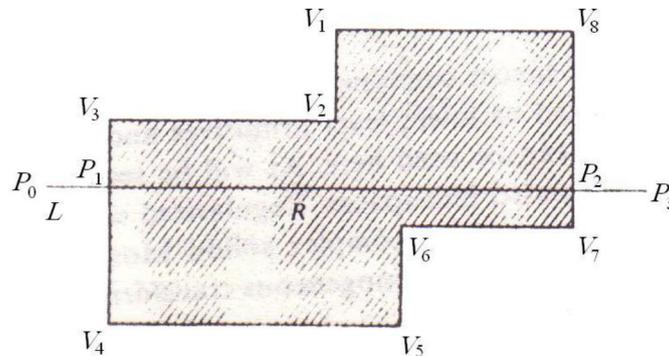
شکل ۲-۱۰۶ عملگرهای مجموعه‌ای باقاعده

مثال) نتایج اعمال عملیات مجموعه‌ای باقاعده در مورد بلوک‌های  $A$  و  $B$  در جدول ۱-۲ چیست؟

حل)  $A$  و  $B$  مجموعه‌های باقاعده ( $r$ -set) هستند. نتایج حاصل در جدول ۱-۲ برای هر حالت نشان داده شده است. نتایج عملیات اجتماع باقاعده معلوم است. برای حالت اول، اشتراک  $A$  و  $B$  و وجه مشترک است که در جریان باقاعده سازی حذف می‌شود. در حالت دوم اشتراکی وجود ندارد؛ لذا حاصل، مجموعه تهی یا خنثی است. یال مشترک  $A$  و  $B$  در حالت سوم حذف می‌شود. برای حالت چهارم،  $A$  اشتراک  $B$ ، بلوک و وجه مشترک است. در حالات اول، دوم و سوم تفاضل  $A$  از  $B$  خود بلوک  $A$  است. در حالت چهارم، نتیجه تفاضل یک جسم منفصل است. این جسم طی عملیات بعدی بصورت یک جسم یکپارچه عمل می‌کند.

جدول ۱-۲ نتایج عملیات بولی بلوک‌های  $A$  و  $B$

Case	Objects	Set operation	Result
1		$A \cup^* B$	
		$A \cap^* B$	$\emptyset$ (null object)
		$A -^* B$	
2		$A \cup^* B$	
		$A \cap^* B$	$\emptyset$ (null object)
		$A -^* B$	
3		$A \cup^* B$	
		$A \cap^* B$	$\emptyset$ (null object)
		$A -^* B$	
4		$A \cup^* B$	
		$A \cap^* B$	
		$A -^* B$	



شکل ۲-۱۰۷ طبقه‌بندی خط نسبت به چند ضلعی.

### ۲-۲۷-۳-۲ طبقه‌بندی عضویت

اغلب در مسایل مهندسی باید فصل مشترک دو مدل متقاطع معلوم باشد. در مورد تقاطع یک خط(منحنی) با حجم، سطح با حجم، یا حجم با حجم، بترتیب باید نقاط، پاره خطها، یا نواحی حجمی داخل، روی و خارج یک مرز را شناسایی کرد. مسائل فصل مشترک‌های هندسی کاربردهای عملی خوبی دارند؛ مثلاً اشتراک خط با مدل حجمی در سایه‌زنی و محاسبه خواص جرمی مدل‌ها از طریق تابع‌های (Ray tracing) و اشتراک حجم با حجم برای کنترل استنتاجی (interference checking) بین دو مدل استفاده می‌شود. در هر یک از این مسائل دو مجموعه از نقاط معلوم هستند: یک مجموعه مرجع  $S$  و یک مجموعه نامزد  $X$ . مجموعه مرجع معمولاً مدل حجمی مشخصی است که داخل و مرز آن بترتیب  $iS$  و  $oS$  هستند. خارج  $S$  مکمل آن یا  $cS$  است. مجموعه نامزد عنصر هندسی‌ای است که باید نسبت به  $S$  طبقه‌بندی شود. فرآیندی که بوسیله آن قسمت‌های مختلف عنصر  $X$  (نقاط، پاره خطها یا قسمت‌های حجمی) به  $iS$ ،  $oS$  و  $cS$  (complementary  $S$ ) نسبت داده می‌شوند طبقه‌بندی عضویت نامیده می‌شود.

بعنوان مثال می‌توان مسأله طبقه‌بندی خط در مقابل چند ضلعی را در نظر گرفت که چند ضلعی (حجم مرجع) در آن به صورت یک طرح  $B\text{-rep}$  دو بعدی ذخیره شده است. شکل ۲-۱۰۷ حالت نمایش  $B\text{-rep}$  را نمایش می‌دهد. خط  $L$  برای سهولت توری انتخاب شده که هیچ قسمت آن روی مرز قرار نگیرد. تابع این حالت بصورت زیر است:

الف) با استفاده از یک برنامه تقاطع خط با یال، نقاط تقاطع  $P_1$  و  $P_2$  پیدا می‌شوند.

ب) نقاط مرزی طبق یک جهت توافق شده برای  $L$  مرتب می‌شوند. مثلاً بصورت

$$(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

ج)  $L$  نسبت به  $R$  طبقه‌بندی می‌شود. برای این حالت ساده نقاط فرد شروع قطعه داخلی و نقاط

زوج شروع قطعه خارجی خط  $L$  است؛ بنابراین طبقه‌بندی  $L$  نسبت به  $R$  عبارت است از:

$$R \text{ خارج } (P_1 \text{ تا } P_2)$$

$$(2-159) \quad \begin{matrix} \text{از } P_1 \text{ تا } P_r \text{ داخل } R \\ \text{از } P_r \text{ تا } P_1 \text{ خارج } R \end{matrix}$$

تابع‌های طبقه‌بندی مدل‌های حجمی مراحل شیب به مراحل بالا را طی می‌کنند؛ با این تفاوت که جزئیات بیشتری از جمله همسایگی‌ها در آنها لحاظ می‌شود.

#### ۲-۲۷-۴ نمایش حجمی (Solid representation)

یک طرح نمایش حجمی، مجموعه نقاط معرف یک جسم را به مدل معتبر آن می‌انگارد. مثلاً طرح CSG عناصر اولیه را بوسیله عملیات بولی به مدل‌های معتبر می‌انگارد. طرحی واضح، کامل و یگانه است که مدل تولید شده بوسیله آن فقط و فقط یک جسم را نشان بدهد. طرحی را کامل و غیر یگانه می‌گویند که بیش از یک مدل بتواند جسم را نشان بدهد. از طرف دیگر طرح مبهم و ناکامل طرحی است که یک مدل بیش از یک جسم را نشان بدهد. خواص طرح‌های نمایش که درجه سودمندی آنها را در مدل‌سازی هندسی تعیین می‌کند عبارتند از:

- ۱- دامنه: دامنه یک طرح نمایش، کلاس اجسامی است که می‌تواند آنها را نشان بدهد. عبارت دیگر دامنه طرح، گستره هندسی تحت پوش طرح است.
- ۲- اعتبار: اعتبار یک طرح از روی بُرد آن، یعنی مجموعه مدل‌هایی که می‌تواند ایجاد کند، تعیین می‌گردد.
- ۳- کمال یا وضوح: این خصوصیت قابلیت طرح را برای پشتیبانی از توابع تحلیلی و مصارف مهندسی دیگر تعیین می‌کند. یک طرح کامل باید اطلاعات کافی در مورد مدل برای انجام محاسبات روی آنها بگذارد.
- ۴- یگانگی: این ویژگی برای تعیین برابری مدل‌ها مناسب است لیکن از آنجائیکه بررسی برابری هندسی در اینگونه مدل‌ها بسیار طولانی و مشکل است عملاً چنین کنترلی بعمل نمی‌آید.

۵- اختصار (Conciseness)، سهولت ایجاد و درجه سودمندی (Efficacy): معیار اختصار یک طرح، حجم اطلاعاتی است که برای تعریف یک جسم نیاز دارد. طرح‌هایی که در آنها اختصار رعایت شده دارای انبارهای داده مترکمی بوده و داده‌های اضافی کمی دارند. به این ترتیب ذخیره آنها ساده و کارایی انتقال داده از یک سیستم به سیستم دیگر، بالاست. سهولت ایجاد نمایش یک مدل حجمی، کار استفاده کننده را راحت می‌کند. بهمین دلیل در اکثر مدل‌سازهای حجمی وارد کردن اطلاعات بوسیله کاربر، بروش CSG انجام می‌گیرد. درجه سودمندی طرح در زمینه کاربردهایش، از چگونگی دستیابی تابع‌های کاربردی به آن تعیین می‌گردد. نمایش اجسام به تنهایی بی‌فایده است و باید به آن به دید منبع اطلاعات برای تابع‌های دیگر نگاه کرد. طرح‌های خوب طرح‌هایی هستند که تعداد زیادی از برنامه‌های کاربردی بتوانند از اطلاعات آنها استفاده کنند. متداول‌ترین طرح‌های نمایش موجود عبارتند از:

(Half- space)	نیم فضایی
(Boundary representation)	کرانه‌ای
(Constructive Solid Geometric)	هندسه حجمی ساختمانی
(Sweeping)	جاروبی
(Analytic Solid Modelling)	حجمی تحلیلی
(Cell decomposition)	تجزیه به شبکه‌ها
(Spatial enumeration)	شمارش فضایی
(Octree encoding)	کدگذاری هشت تایی
(primitive instancing)	نمونه آوری اولیه‌ای

از بین این طرح‌ها، سه طرح *B-rep*، *CSG* و جاروبی مشهورترین طرح‌ها هستند. اکثر نرم-افزارهای مدل‌ساز حجمی از یک یا چند طرح بالا استفاده می‌کنند. فهرست بعضی از این نرم-افزارها به‌مراه طرح نمایش مرکزی آنها در جدول ۲-۲ آمده است. در اینجا نظر به اهمیت چهار طرح اول، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

### ۲-۲۷-۱-۴ نمایش نیم فضایی

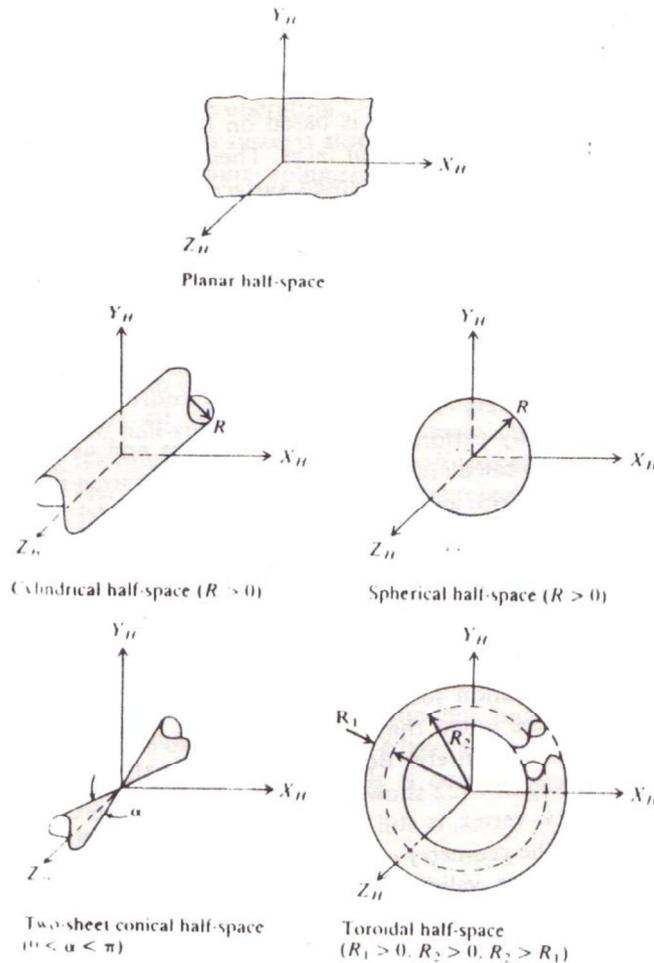
نیم فضا، عنصر هندسی غیرکراندار است که فضای نمایش را بدو قسمت نامحدود تقسیم می‌کند؛ یکی قسمت پرشده با ماده و دیگری قسمت تهی از ماده. نیم فضا مجموعه باقاعده‌ای از نقاط در فضای سه بعدی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 H &= \{(x, y, z): z < 0\} \\
 H &= \{(x, y, z): x^2 + y^2 < R^2\} \\
 H &= \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 < R^2\} \\
 H &= \{(x, y, z): x^2 + y^2 < [(tan \alpha / 2)z]^2\} \\
 H &= \{(x, y, z): (x^2 + y^2 + z^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 < 4R_1^2(R_2^2 - z^2)\}
 \end{aligned}
 \tag{۱۶۰-۲}$$

جدول ۲-۲ فهرست چند مدل‌ساز حجمی موجود

Modeler	Vendor	Primary Representation		User modelling Input based	
		<i>B- rep</i>	CSG	<i>B- rep</i>	CSG
BMOD	Auto-trol	x		x	
CATIA	IBM	x		x	x
CMOD	Auto-trol		x		x
DDM SOLIDS	GE Calma	x		x	x
EUCLID	Matra Datavision	x		x	x
GEMSMIH	Vulcan	x		x	x
GEOMED	SDRC	x		x	x
GEOMETRIC					
MODELING SYSTEM	Graftek	x		x	
ICEM	CDC		x		x
ICM GMS	ICM	x		x	x
INSIGHT	Phoenix Data Systems	x		x	x
MEDUSA	Prime Computer	x		x	x
PADL-2	Cornell University		x		x
PATRAN-G	PDA Engineering	ASM*		Hyper Patches	x
ROMULUS	Evans and Sutherland	x		x	
SOLIDESING	Computer vision	x		x	x
SCLIDS MODELING II	Applicon		x	x	x
SOLID MODELING SYSTEM	Intergraph	x		x	x
SYNTHVISION	MAGI		x	x	x
TIPS-1	CAM-I		x		x
UNIS-CAD	Sperry Univac		x		x
UNISOLIDS	Mc Donnell Douglas		x	x	x

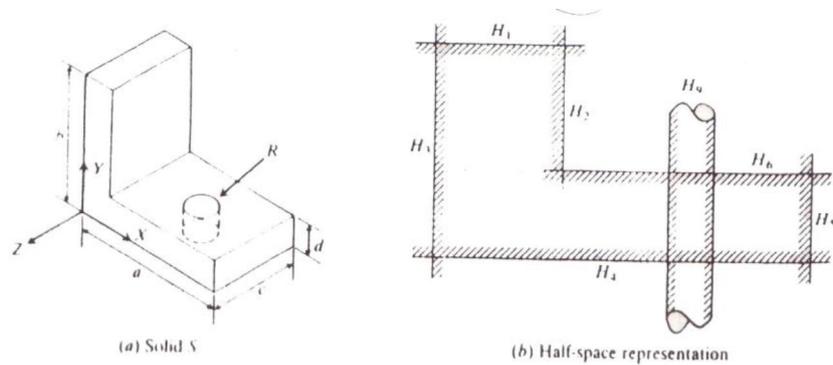
\* Analytic solid modeling



شکل ۲-۱۰۸ نیم فضاهای غیرکراندار.

در این تعریف  $p$  نقطه‌ای از فضا و  $f(p) = 0$  معادله سطح مرزی نیم فضا است. نیم فضاها را می‌توان با استفاده از عملیات مجموعه‌ای با هم ترکیب کرد و یک جسم پیچیده تولید نمود. پرکاربردترین نیم فضاها، نیم فضاهای صفحه‌ای، استوانه‌ای، کروی، مخروطی و چنبره‌ای هستند. این نیم فضاها در شکل ۲-۱۰۸ نشان داده شده‌اند.  $f(p)$  این نیم فضاها عبارتند از:

مدل حجمی  $S$  در شکل ۲-۱۰۹ با استفاده از ۹ نیم فضا ایجاد شده است. برای ایجاد این مدل بعضی از نیم فضاها را ابتدا باید با استفاده از تبدیلات هندسی همگن در موقعیت و جهت مناسب قرار داد. برای ترکیب این عناصر از عملیات بولی استفاده می‌شود.



شکل ۲-۱۰ نمایش نیم فضایی جسم S

مزیت اصلی این روش، مختصر بودن نمایش اجسام در مقایسه با طرح‌های دیگر است. ولی در صورت عدم دقت ممکن است مدل‌های حجمی غیرکرانداری تولید شوند. در نتیجه هنگام احضار انباره داده‌های آن توسط تابع‌های دیگر سیستم مختل خواهد شد. همچنین کار به این شیوه بسیار پرزحمت و طولانی خواهد بود. این سیستم فقط برای کارهای تحقیقاتی مفید است. مدل‌سازهایی مثل *PADL*, *TIP*, *SHAPS* از این شیوه استفاده می‌کنند.

### ۲-۲۷-۲-۴ نمایش کرانه‌ای

در شیوه نمایش کرانه‌ای مدل حجمی از یکسری وجوه و یال‌ها و رئوس تشکیل می‌شود. وجوه اولاً بسته‌اند؛ یعنی پیوسته و بلا انقطاعند. ثانیاً، قابل جهت دهی هستند؛ یعنی با جهت بردار عمود بر سطح، داخل و خارج جسم قابل تشخیص است. در این روش فقط سطوح مرزی جسم بصورت صریح ذخیره می‌شوند ولی با استفاده از قضیه واگرائی، خواص حجمی و جرمی محاسبه می‌شوند. سرعت و دقت این محاسبات به انواع سطوح بکار رفته توسط مدلساز بستگی دارد.

انباره داده‌های یک مدل کرانه‌ای شامل اطلاعات توپولوژی و هندسی آن است. توپولوژی با اجرای عملیات اولری و هندسه با اجرای عملیات اقلیدسی ایجاد می‌شوند. عملگرهای اولری ابزاری برای ترکیب مرزهای یک مدل هستند که از معادله اولر تبعیت می‌کنند. این معادله بفرم زیر است:

$$F - E + V - L = 2(B - G)$$

$F$ = تعداد وجوه	$L$ = تعداد حلقه‌ها
$E$ = تعداد یال‌ها	$B$ = تعداد بدنه‌ها
$V$ = تعداد رئوس	$G$ = تعداد دسته‌ها

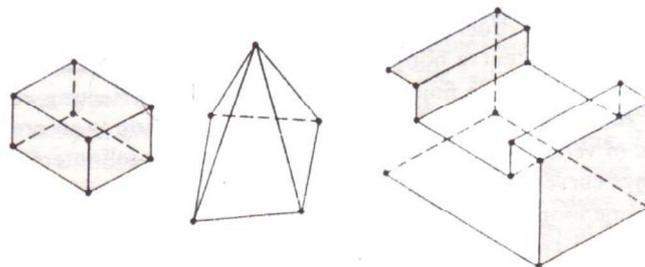
حلقه، یک منحنی بسته، تکه‌ای و غیرخود متقاطعی است که می‌تواند مرز یک وجه باشد. به سوراخ‌های راه بدر داخل جسم دستگیره یا دسته می‌گویند و بدنه یا شل، مجموعه‌ای از وجوه

است که یک حجم بسته را در برمی‌گیرد. در شکل ۲-۱۱۰ و جدول ۲-۳، تعدادی چند وجهی به‌مراه تعداد وجه، یال، راس، حلقه و بدنه و دسته آنها آورده شده است. در جداول ۲-۴ و ۲-۵ نیز چند عملگر اولری و عملکرد آنها نشان داده شده است.

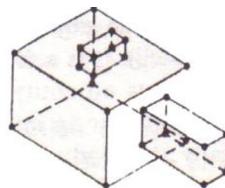
کاربر باید مقادیر  $F, E, V, L, B$  و  $G$  را بعنوان پارامترهای ورودی جسم وارد کند. سپس در صورت عدم تغییر با معادله اولر، جسم مورد نظر ایجاد خواهد شد. شکل ۲-۱۱۱ مراحل ساخت یک مدل  $B$ -rep را نشان می‌دهد. هر گاه اجسام انحنا دار بوسیله نخیره معادلات منحنی‌ها و سطوح اصلی مربوط به یال‌ها و وجوه جسم نمایش داده شوند به این نوع طرح کرانه‌ای، طرح کرانه‌ای دقیق گفته می‌شود. طرح دیگری بنام کرانه‌ای تقریبی وجود دارد که در آن وجوه انحنا دار، به پخ‌های مسطح تقسیم‌بندی می‌شوند. شکل ۲-۱۱۲ طرح تقریبی یک کره و یک استوانه را نشان می‌دهد. استوانه از دوران یک خط بطور زنجیره‌ای حول محور آن به تعداد پخ‌های دلخواه تولید می‌شود. این کار بوسیله یک عملگر جاروب دورانی انجام می‌شود. کره پخ‌دار نیز بهمین ترتیب با دروان ( $m$ ) پاره خط متصل بهم، حول محور کره به تعداد کل ( $n$ ) بار تشکیل می‌گردد. هر چه تعداد پخ‌ها افزایش یابد، نمایش دقیق‌تری بدست می‌آید. ولی از طرف دیگر زمان محاسبه نیز بطور قابل ملاحظه‌ای زیاد می‌شود.

مثال) مدل کرانه‌ای تقریبی جسم  $S$  چگونه ساخته می‌شود؟

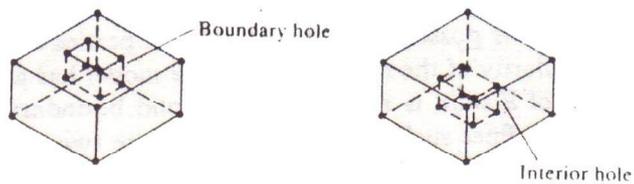
ابتدا باید مدل مرزی جسم را تهیه کرد (شکل ۲-۱۱۳). طبق این مدل جسم  $S$ ، ۱۶ وجه، ۲۸ راس، ۴۲ یال، ۲ حلقه، ۱ بدنه و ۱ دسته دارد. که این مقادیر در معادله اولر صدق می‌کنند. ادامه کار در شکل ۲-۱۱۴ تشریح شده است.



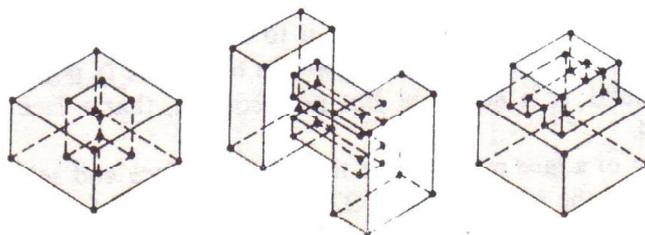
(a) Simple polyhedra



(b) Polyhedra with faces of inner loops



(c) Polyhedra with not through holes



(d) Polyhedra with handles (through holes)

شکل ۲-۱۱ انواع اشیای چند ضلعی.

جدول ۲-۳ مقادیر پارامترهای فرمول اولر برای اشیاء شکل ۲-۱۱

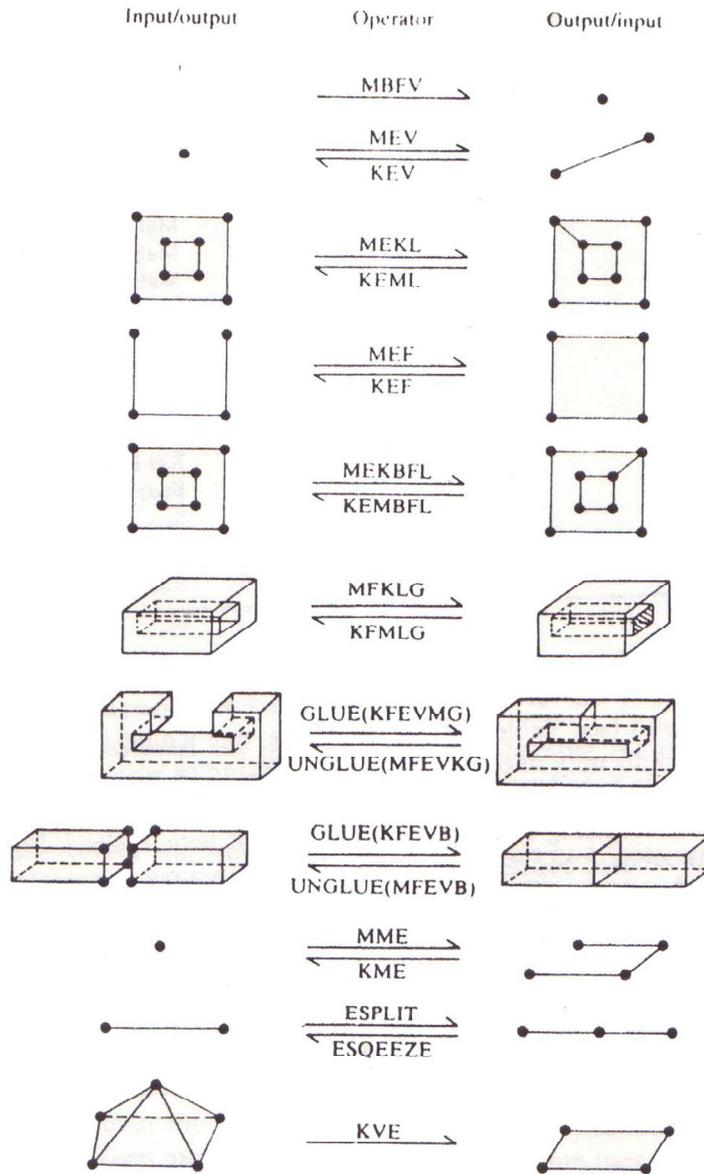
Object number	$F$	$E$	$V$	$L$	$B$	$G$
۱	۶	۱۲	۸	۰	۱	۰
۲	۵	۸	۵	۰	۱	۰
۳	۱۰	۲۴	۱۶	۰	۱	۰
۴	۱۶	۳۶	۲۴	۲	۱	۰
۵	۱۱	۲۴	۱۶	۱	۱	۰
۶	۱۲	۲۴	۱۶	۰	۲	۰
۷	۱۰	۲۴	۱۶	۲	۱	۱
۸	۲۰	۴۸	۳۲	۴	۱	۱
۹	۱۴	۳۶	۲۴	۲	۱	۱

جدول ۲-۴ عملیات اولری

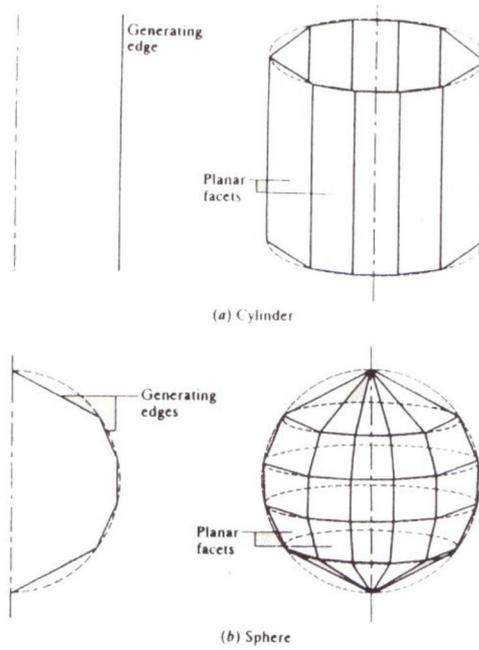
<i>Operation</i>	<i>Oprator</i>	<i>Complement</i>	<i>Description of operator</i>
<i>Initialize database and creation</i>	<i>MBFV</i>	<i>KBfV</i>	<i>Make Body , Face , Vertex</i>
<i>Create edges and vertices</i>	<i>MEV</i>	<i>KEV</i>	<i>Make Edge , Vertex</i>
<i>Crate edges and</i>	<i>MEKL</i>	<i>KEML</i>	<i>Make Edge , kill Loop</i>
<i>Faces</i>	<i>MEF</i> <i>MEKBFL</i> <i>MFKIG</i>	<i>KEF</i> <i>KEMBFL</i> <i>KFMLG</i>	<i>Make Edge Face</i> <i>Make Edge , Kill Body</i> <i>Face ,Loop</i> <i>Make Face , Kill Loop</i> <i>Genus</i>
<i>Glue</i>	<i>KFEVMG</i>  <i>KFEVB</i>	<i>MFEKG</i>  <i>MFEVB</i>	<i>Kill Face , Edge , Vertex</i> <i>Make Genus</i>  <i>Kill Face , Edge , Vertex</i> <i>Body</i>
<i>Composite operations</i>	<i>MME</i> <i>ESPLIT</i> <i>KVE</i>	<i>KME</i> <i>ESQUEEZE</i>	<i>Make Multiple Edges</i> <i>Edge - Split</i> <i>Kill Vertex , Edge</i>

جدول ۲-۵ حالات گذرای تعدادی از عملگرهای اولری

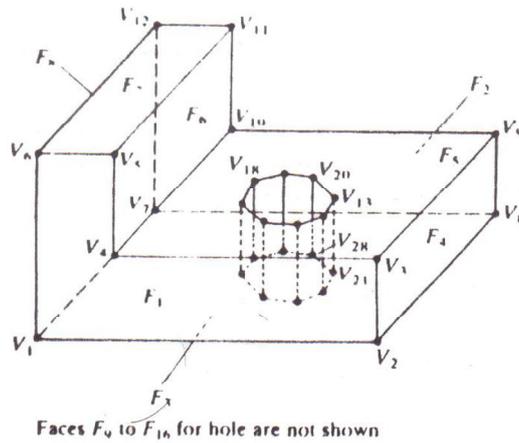
<i>Operator</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>V</i>	<i>L</i>	<i>B</i>	<i>G</i>
<i>MBFV</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>
<i>MEV</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>MEKL</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>MEF</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>MEKBFL</i>	<i>-1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>-1</i>	<i>-1</i>	<i>0</i>
<i>MFKLG</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>-1</i>	<i>0</i>	<i>-1</i>
<i>KFEVMG</i>	<i>-2</i>	<i>-n</i>	<i>-n</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>KFEVB</i>	<i>-2</i>	<i>-n</i>	<i>-n</i>	<i>0</i>	<i>-1</i>	<i>0</i>
<i>MME</i>	<i>0</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>ESPLIT</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>KVE</i>	<i>-(n-1)</i>	<i>-n</i>	<i>-1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>



شکل ۲-۱۱۱ ایجاد توپولوژی از طریق عملگرهای اولری



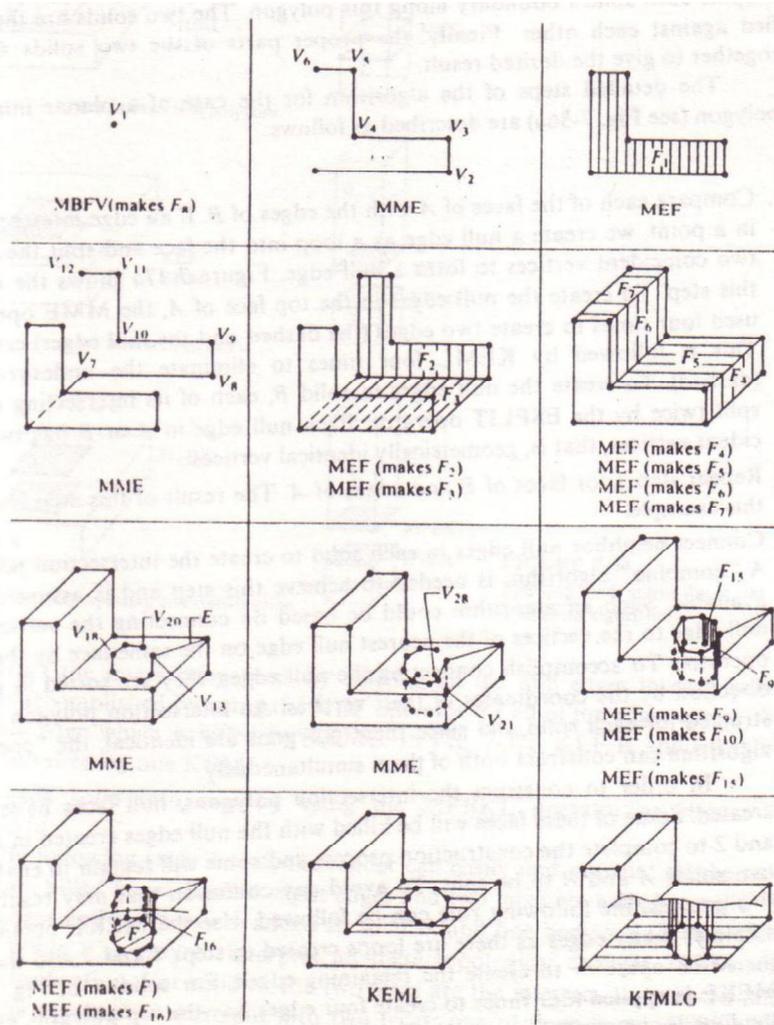
شکل ۲-۱۱۲ B-rep تقریبی استوانه و کره



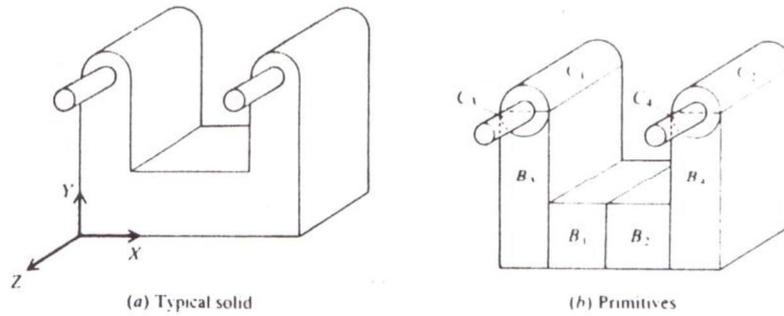
شکل ۲-۱۱۳ مدل مرزی جسم  $s$

طرح کرانه‌ای برای ساخت مدل‌های حجمی پیچیده که با استفاده از روش‌های دیگر مشکل و یا غیرممکن است روش بسیار کارآمدی است. مانند مدلسازی بدنه خودروها و پره‌های توربین.

همچنین این مدل‌ها را می‌توان برای تهیه نقشه‌های صنعتی، براحتی به مدل قاب سیمی تبدیل نمود. تابع‌های مربوطه نیز قابل اطمینان و رقابت با تابع‌های مبتنی بر CSG هستند. اما از آنجائیکه این مدل‌ها مرزها را بصورت صریح ذخیره می‌کنند به حجم حافظه زیادی نیاز دارند. از طرف دیگر، پروسه ساخت آنها طولانی است که باعث کندی ایجاد مدل می‌گردد. لذا اگر این سیستم دارای مکانیزم ارتباط کاربری CSG نباشد، استفاده از عملگرهای اولری در محیط‌های طراحی و ساخت، آن را ناکارآمد می‌سازد؛ بعلاوه در بسیاری از موارد مانند تولید مسیر ابزار برشی، طرح *B-rep* تقریبی مناسب نیست.



شکل ۲-۱۱۴ ایجاد مدل مرزی جسم  $S$



شکل ۲-۱۱۵ یک جسم نمونه و عناصر اولیه آن.

### ۲-۲۷-۳-۴ طرح نمایش هندسه حجمی ساختمانی

در این نوع مدلسازی حجمی، یک جسم به چندین عنصر اولیه تقسیم شده و سپس این عناصر با استفاده از عملیات بولی با هم ترکیب می‌شوند. عناصر اولیه هم مدل‌های CSG معتبری هستند. بعنوان مثال برای ایجاد مدل حجمی جسم شکل ۲-۱۱۵ یک عنصر اولیه بلوک و یک استوانه کافی هستند. برای این کار یکی از روش‌های تجزیه جسم، بصورت شکل ۲-۱۱۵b است. مراحل ایجاد شکل فوق عبارتست از:

$$\begin{array}{l}
 B_{\tau} = \text{block positioned properly} \\
 B_{\tau} = \text{block} \\
 B_{\varepsilon} = B_{\tau} \text{ moved properly in } X \text{ direction} \\
 C_{\gamma} = \text{cylinder positioned properly} \\
 C_{\tau} = C_{\gamma} \text{ moved properly in } t \square e X \text{ direction} \\
 C_{\varepsilon} = \text{cylinder positioned properly} \\
 C_{\varepsilon} = C_{\tau} \text{ moved properly in } t \square e X \text{ direction}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} B_{\tau} \\ B_{\tau} \\ B_{\varepsilon} \\ C_{\gamma} \\ C_{\tau} \\ C_{\varepsilon} \\ C_{\varepsilon} \end{array}} \right\} \text{Primitives definitions}$$

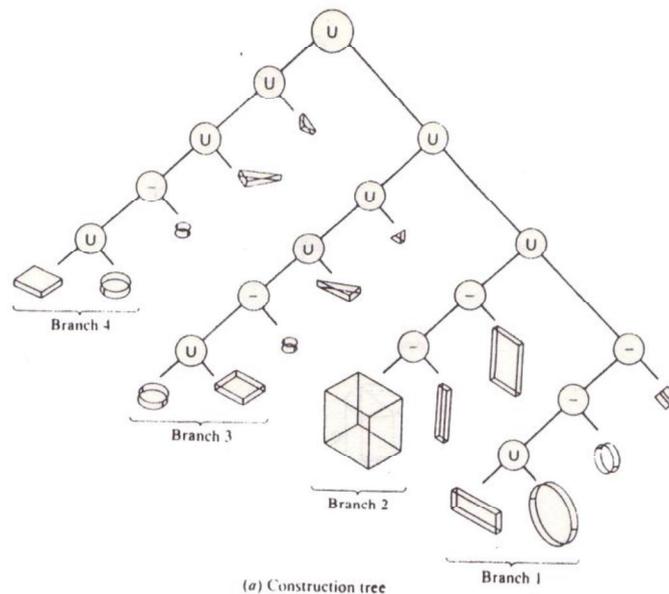
$$\begin{array}{l}
 S_{\gamma} = B_{\gamma} \cup B_{\tau} \\
 S_{\tau} = S_{\gamma} \cup C_{\gamma} \\
 S_{\tau} = S_{\tau} \cup C_{\tau}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} S_{\gamma} \\ S_{\tau} \\ S_{\tau} \end{array}} \right\} \text{Construct left half}$$

$$\begin{array}{l}
 S_{\varepsilon} = B_{\varepsilon} \cup B_{\tau} \\
 S_{\delta} = C_{\varepsilon} \cup S_{\varepsilon} \\
 S_{\varepsilon} = C_{\varepsilon} \cup S_{\delta}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} S_{\varepsilon} \\ S_{\delta} \\ S_{\varepsilon} \end{array}} \right\} \text{Construct right half}$$

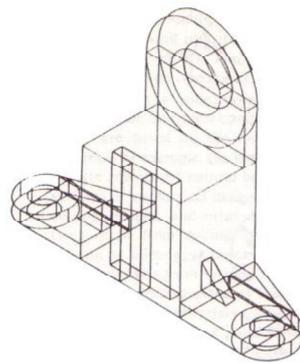
$$S = S_{\tau} \cup S_{\varepsilon}$$

$$\left. \vphantom{S} \right\} \text{Model}$$

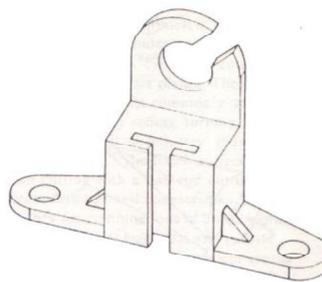
در شکل ۲-۱۱۶، نمونه دیگری از نحوه کار با این روش نشان داده شده است. عناصر اولیه با دو دسته داده‌های هندسی تعریف می‌شوند: پارامترهای پیکره بندی و پارامترهای حرکتی. متداول‌ترین عناصر اولیه در شکل ۲-۱۱۷ نشان داده شده‌اند. بعنوان مثال پارامترهای پیکره بندی یک مکعب مستطیل، طول، عرض و ارتفاع آن هستند و پارامترهای حرکتی، از مبدأ  $p$  آن نسبت به یک سیستم مرجع (مانند  $MCS$ )، با مقادیر صریح (انتقال یا دوران) مشخص می‌شوند. پارامترهای پیکره بندی هر عنصر دارای محدوده معینی است که توسط مدلساز نگهداری می‌شود.



(a) Construction tree

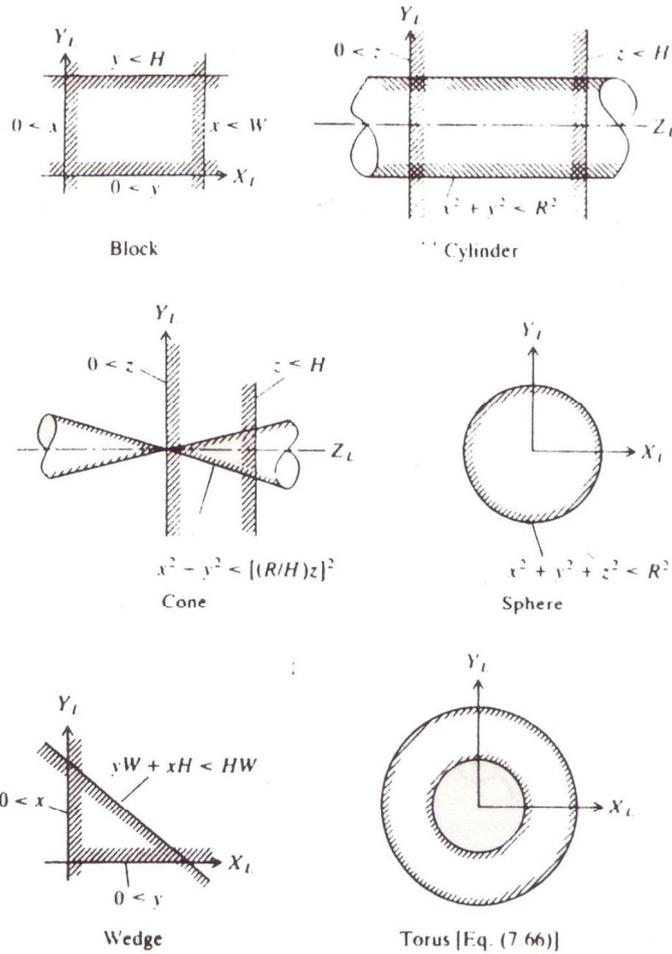


(c) Primitives in their proper locations and orientations



(d) Final solid model

شکل ۲-۱۱۶ مدل حجمی یک بست هادی.



شکل ۱۱۷-۲ نیم فضاهای عناصر اولیه کراندار.

از لحاظ ریاضی هر عنصر اولیه یک مجموعه از نقاط با قاعده است. برای عناصر شکل

۱۱۷-۲ این مجموعه‌ها عبارتند از:

$$\text{Block: } \{(x, y, z): 0 < x < w, 0 < y < H, \text{ and } 0 < z < D\}$$

$$\text{Cylinder: } \{(x, y, z): x^2 + y^2 < R^2, \text{ and } 0 < z < H\}$$

$$\text{Cone: } \{(x, y, z): x^2 + y^2 < [(R/H)z]^2, \text{ and } 0 < z < H\}$$

$$\text{Sphere: } \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

$$\text{Wedge: } \{(x, y, z): 0 < x < w, 0 < y < H, 0 < z < D, \text{ and } yW + xH < Hw\}$$

$$\text{Torus: } \{(x, y, z): (x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^2 < 4R^2(R^2 - z^2)\}$$

چون محاسبه فصل مشترک‌های سطوح متقاطع بسیار حجیم است و از طرفی یک طرح CSG خاص مجموعه سطوح مشخصی را نمایش می‌دهد بنابراین مسائل تقاطع سطح با سطح بطور جبری از پیش حل شده و در مدلساز مربوطه ذخیره می‌گردد. تقاطع سطح با سطح در مدلسازی هندسی بطور اعم و در مدلسازی حجمی بطور خاص مسئله حادی است؛ بطوریکه باعث محدود شدن دامنه مدلسازی و کند شدن اجرای سطوح پیچیده می‌گردد. باید توصیف دقیقی از منحنی فصل مشترک وجوه داشته باشد. باید دانست که کدام زوج‌ها از سطوح، دارای منحنی‌های یکسانی هستند. می‌توان چنین نتیجه گرفت که اگر تعریف جامعی مثل یک معادله از هر منحنی فصل مشترک برحسب پارامترهای دو سطح متقاطع وجود داشته باشد، تقاطع سطح با سطح فقط یک بار و برای همیشه حل خواهد شد. جزئیات کامل تقاطع سطح با سطح درجه دو بسیار مفصل است ولی بطور خلاصه بشرح زیر است:

هر یک از سطوح درجه دو را می‌توان بفرم چند جمله‌ای زیر بازنویسی کرد:

$K, \dots, B, A$  اعداد ثابت اختیاری هستند. این معادله بفرم ماتریسی زیر هم قابل نوشتن است:

$$F(x, y, z) = V^T [Q] v = 0$$

در معادله بالا  $V$ ، ترانهاد ماتریس مختصات همگن نقاط  $[x, y, z, 1]$  و  $[Q]$ ، ماتریس متقارن ضرایب است. تقاطع دو سطح درجه دو را می‌توان به شکل زیر حل کرد: اگر یک سطح ماتریس ضرایب  $[Q_1]$  و سطح دیگر دارای  $[Q_2]$  باشند، معادله منحنی فصل مشترک آنها عبارت خواهد بود از:

$$V^T ([Q_1] - [Q_2]) v = 0$$

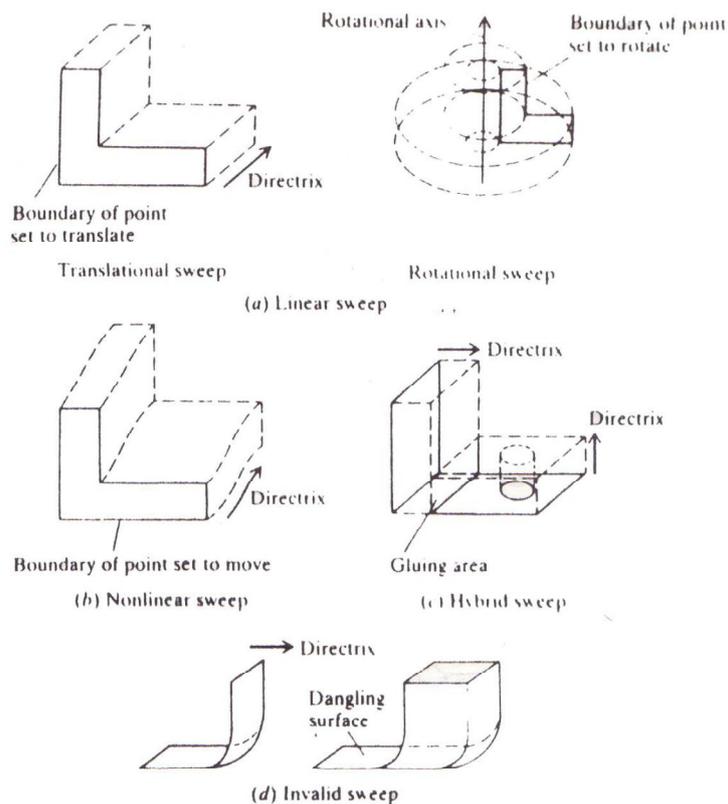
ساختن یک مدل CSG از عناصر اولیه و عناصر بولی آسان است. اختصار در این طرح رعایت شده و به حداقل حافظه برای ذخیره تعاریف حجمی نیاز دارد. تابع‌های مبتنی بر CSG بسیار قابل اطمینان و رقابت با نمونه‌های  $R$ -rep هستند. ولی این طرح قادر به نمایش سطوح پیچیده نیست. از طرفی بازیابی مدل در این طرح بدلیل پروسه ارزیابی مرزی از درخت CSG آهسته انجام می‌گیرد. تولید مدل‌های قاب سیمی یعنی نقشه‌های خطی، از این مدل‌ها بسیار آهسته انجام می‌شود.

## ۲-۲۷-۴- نمایش جارویی (Sweeping)

طرح‌های مبتنی بر نمایش جارویی برای ایجاد مدل‌های حجمی اجسام دو و نیم بُعدی مفیدند. اجسام دو و نیم بُعدی شامل دو گروه اجسام دارای ضخامت یکنواخت در یک جهت و اجسام متقارن محوری هستند. اجسام گروه اول از طریق جاروب خطی یا انتقالی یک سطح ایجاد می‌شود و اجسام گروه دوم که احجام دوار هستند، از جاروب دروانی سطح مورد نظر بدست می‌آیند. از این قابلیت می‌توان بعنوان یک پروسه تعریف جسم ورودی به مدلسازی‌های دیگر استفاده کرد. عملاً بخاطر دامنه مدلسازی محدود نمایش‌های جارویی و فقدان یک تئوری اساسی هیچ مدلسازی مبتنی بر جاروب کردن وجود ندارد.

پروسه جاروب کردن با حرکت یک نقطه منحنی، یا یک سطح در امتداد یک مسیر مشخص انجام می‌شود. سه نوع جاروب کردن وجود دارد: جاروب خطی، غیرخطی و نامتجانس. در جاروب خطی، مسیر حرکت خطی یا دایره‌ایست در صورتیکه در جاروب غیرخطی، مسیر حرکت یک منحنی دارای معادله از درجه بالاتری (درجه دو، سه و یا بالاتر) می‌باشد. جاروب خطی و یا غیرخطی را از طریق عملیات مجموعه‌ای ترکیب می‌کنند و بدین ترتیب دامنه مدلسازی نمایش-های جاروبی افزایش می‌یابد (شکل ۲-۱۱۸).

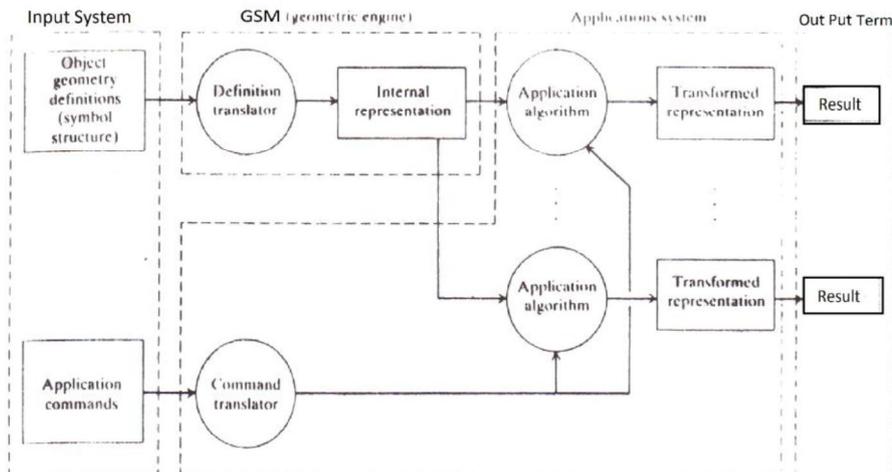
عناصر اولیه این روش منحنی‌های قاب سیمی اعم از تحلیلی و مصنوعی هستند. خطوط، کمان-های دایره‌ای، دایره و منحنی‌های بی اسپلاین گسترده‌ترین المان‌های مورد استفاده در عملیات جاروب کردن هستند. دامنه نمایش جاروبی با ایجاد قابلیت جاروب غیرخطی از مرز اجسام دو و نیم بُعدی فراتر خواهد رفت. قطعات مکانیکی پیچیده مثل انواع پیچ‌ها و فنرها را می‌توان به این روش نمایش داد.



شکل ۲-۱۱۸ انواع جاروب کردن

## ۲-۲۷-۵ سازمان مدل‌سازهای حجمی

هر یک از طرح‌های نمایش حجمی فوق‌الذکر مزایا و معایب خاص خود را دارند. بعضی از این طرح‌ها برای مصارف خاصی از بقیه مناسب‌ترند. این امر باعث تدوین مدل‌سازی‌هایی شد که بیش از یک طرح نمایش داخلی دارند. با این‌کار دامنه مدل‌سازی یک مدل‌ساز توسعه پیدا می‌کند ولی تدوین و نگهداری چنین مدل‌سازی، زمان و زحمت بیشتری می‌طلبد. سازمان عمومی یک مدل‌ساز حجمی در شکل ۲-۱۱۹ نشان داده شده است. از این سبک در اکثر سیستم‌های CAD/CAM نیز استفاده می‌شود. همانطوریکه در این شکل نشان داده شده، یک مدل‌ساز حجمی را می‌توان به چهار سیستم اصلی تقسیم کرد. سیستم ورودی (input system) شامل ارتباط کاربری و فرمان‌های مربوط به آن است. کاربران می‌توانند فرمان‌های لازم برای تعریف یک جسم جدید یا فرمان‌های کاربردی برای احضار تابع‌های کاربردی را توسط این سیستم وارد کنند. سیستم مدل‌سازی هندسی (geometric modelling system) قلب مدل‌سازی حجمی بشمار می‌آید. این سیستم فرمان‌های کاربردی را به نمایش داخلی مدل‌ساز انتقال می‌دهد. سیستم کاربردها (application system) شامل تابع‌های کاربردی مختلفی است. هر تابع روی نمایش داخلی مدل‌ساز عمل کرده و آن را به فرم هندسی صحیح (نمایش تبدیل یافته) مورد نیاز روال تجزیه و تحلیل مربوط به آن کاربرد تبدیل می‌کنند. در مورد مدل‌سازی اجزای محدود، تابع مش‌بندی، گره‌ها و اجزا را تولید می‌کند. ارزش مهندسی یک مدل‌ساز حجمی معمولاً از قابلیت‌های سیستم کاربردهای آن ارزیابی می‌شود. سیستم خروجی (output system) نتایج را بفرم گرافیکی نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱۱۹ شمایی از سازمان یک مدل‌ساز حجمی.

مدلسازهای حجمی را بر اساس سیستم‌های مدلسازی و هندسی آنها به سه دسته زیر تقسیم می‌کنند:

۱- مدلسازی تک نمایشی (*single representation*): این مدلسازها فقط دارای یک نمایش داخلی هستند. معمولاً این طرح، *B-rep* است. تمام مدلسازهای مبتنی بر *B-rep* در این دسته قرار می‌گیرند. این مدلسازها غالباً برای ایجاد تسهیلات لازم برای کاربر، دارای ورودی شبیه *CSG* و عملیات جاروب کردن هستند.

این فرم‌های ورودی بطور داخلی ذخیره می‌شوند ولی قبل از ذخیره بفرمت *B-rep* تبدیل می‌شوند (شکل ۲-۱۲۰a).

۲- مدلسازهای دو نمایشی (*dual representation*): بعضی از مدلسازها هر دو طرح نمایش *CSG* و *B-rep* را دارند ولی *B-rep* بطور داخلی بوسیله مدلساز از *CSG* استخراج می‌گردد و کاربر کنترلی روی آن ندارد. بعلاوه، مدلساز معمولاً *R-rep* را ذخیره نمی‌کند و تنها درخت *CSG* ذخیره می‌شود که می‌تواند *B-rep* را مورد ارزیابی مجدد قرار دهد. تبدیل *CSG* برای نمایش و کارهای گرافیکی دیگر لازم است (شکل ۲-۱۲۰b).

۳- مدلسازی نامتجانس (*hybrid modelers*): این نوع مدلسازها از دو نمایش داخلی مستقل (معمولاً *B-rep* و *CSG*) استفاده می‌کنند. کاربر می‌تواند نوع نمایش و فرم ورودی اطلاعات خود را انتخاب کند. علاوه بر این، کاربر می‌تواند از هر دو طرح برای حل یک مساله استفاده کرده و آنها را با هم مقایسه کند. بدین وسیله دامنه مدلسازی مدلساز افزایش می‌یابد. بعنوان مثال سطوح پیچیده را می‌توان با استفاده *B-rep* یک مدلساز نامتجانس مدل کرد در حالیکه این کار با یک مدلساز دو نمایشی انجام پذیر نیست. (شکل ۲-۱۲۰c).

## ۲-۲۷-۶ کاربردهای مدلسازی حجمی

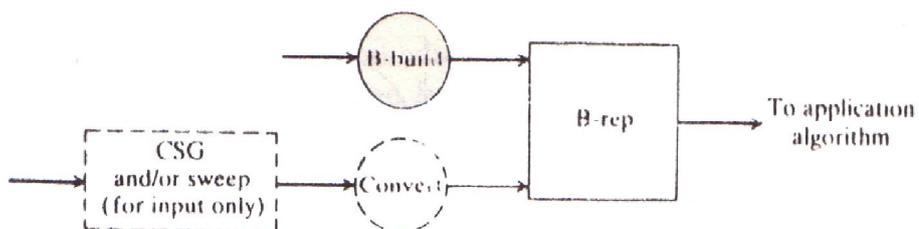
کاربردهای مدلسازی حجمی بسرعت رو به افزایش است. مشخصه اصلی تمام این مصارف تمام اتوماتیک بودن آنهاست. کاربردهای حال حاضر را می‌توان به چهار گروه تقسیم کرد:

۱- گرافیک: کامل‌ترین گروه بوده و شامل تولید نقشه‌های خطی با یا بدون حذف خطوط ندید، سایه‌زنی و انیمیشن است.

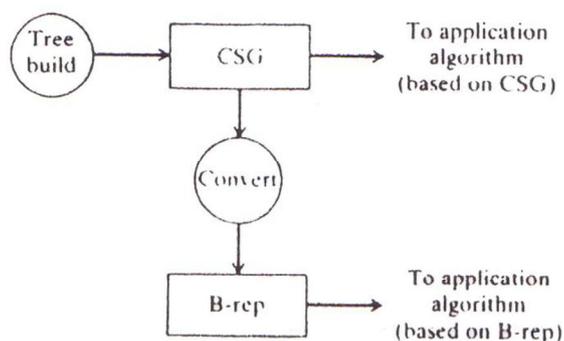
۲- طراحی: شناخته شده‌ترین کاربرد در این گروه محاسبات خواص جرمی است. از جمله کاربردهای دیگر آن آنالیزهای استنتاجی (*interference analysis*)، مدلسازی اجزای محدود (*finite element modelling*)، آنالیزهای سینماتیکی و مکانیزی هستند. شکل ۲-۱۲۱ مدل حجمی یک قالب پلاستیک را نشان می‌دهد. از این مدل برای آنالیز زمان بهینه ماندن قطعه در قالب و سایر پارامترهای تزریق پلاستیک استفاده می‌شود.

۳- ساخت: فعال‌ترین کاربرد در این گروه تولید و شناسایی مسیر ابزار است. برنامه‌ریزی پروسه (*process planning*)، بازرسی ابعادی، نمایش خصوصیات هندسی تیرانس‌ها و پرداخت سطحی از دیگر مصارف حجمی در این گروه هستند.

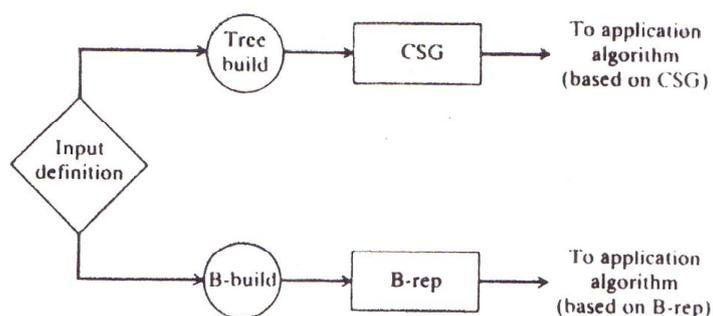
۴- مونتاژ: این گروه از کاربردها برای رباتیک و سیستم‌های ساخت انعطاف‌پذیر مفیدند. کاربردهایی نظیر طراحی مونتاژ، تابع‌های بینایی مبتنی بر مدل‌سازی حجمی و غیره در این گروه جای دارند.



(a) Single representation modeler

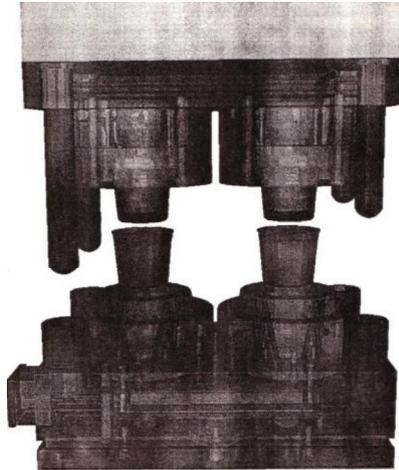


(b) Dual representation modeler



(c) Hybrid modelers

شکل ۲-۱۲ انواع مدل‌سازی حجمی.



شکل ۲-۱۲۱ تصویر مدل حجمی یک قالب پلاستیک برای تولید دو فنجان در یک مرحله. در این تصویر به کمک روش *translucency* می‌توان قسمت‌های داخلی را دید.

### ۲-۲۸ تبدیلات هندسی (geometric transformations)

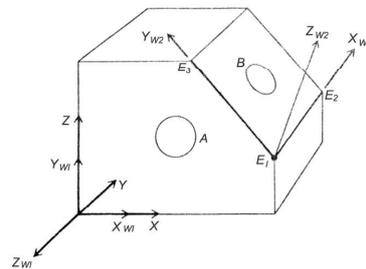
بمجرد تعریف *WCS*، مختصات ورودی کاربر نسبت به این سامانه تعبیر شده ولی در سامانه *MCS* ذخیره می‌گردند. نرم افزار ماتریس تبدیل همگن نظیر *WCS* و *MCS* را برای تبدیل مختصات بین دو سامانه مختصات استفاده می‌کند. معادله تبدیل عبارت است از:

$$P = [T]P_w \quad (۱۶۶-۴)$$

$$\text{where } P = [x \quad y \quad z \quad 1]^T$$

$$= [T] \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^M_w[R] & {}^M P_{w,org} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۶۷-۴)$$

ستون‌های  ${}^M_w[R]$  کسینوس‌های هادی بردارهای یکه درجه‌های  $X_w$ ،  $Y_w$  و  $Z_w$  نسبت به *MCS* را بیان می‌کنند (شکل ۲-۱۲۲)



شکل ۲-۱۲۲ دو نمونه سامانه مختصات کاری *W1* و *W2*.

تمرین: اگر مختصات  $E_1$ ,  $E_2$  و  $E_3$  طبق شکل ۲-۱۲۲ به صورت زیر باشند مطلوبست محاسبه  $[R]_W^M$  و  $[T]$ .

$$E_1(2,0,0.5), E_2(2,1,0.5), E_3(1,0,2)$$

$$e_1^2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 = E_1E_2$$

$$e_2^2 = \frac{E_1E_3}{|E_1E_3|} = -0.556e_1 - 0e_2 + 0.833e_3$$

$$e_3^2 = e_1^2 \times e_2^2 = 0.833e_1 - 0e_2 + 0.556e_3$$

$${}^M_W[R] = \begin{bmatrix} 0 & -0.556 & 0.833 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.833 & 0.556 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -0.556 & 0.833 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.833 & 0.556 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ۲-۲۹ استانداردها و تبادل داده‌ها

### ۲۹-۱ بردار گره‌ها

بردار گره‌ها جزو یکی از دو گروه زیر است: گیردار (*clamped*) و غیرگیردار (*unclamped*). داخل هر یک از این دو گروه نیز بردار گره‌ها می‌تواند یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. چند نمونه از این بردارها عبارتند از:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

یکنواخت گیردار

$$\{-0.5, -0.5, -0.5, 1, 2.5, 4, 4, 4, 4\}$$

$$\{0, 0, 0, 2, 3, 6, 7, 7, 7\}$$

غیریکنواخت گیردار

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5\}$$

$$U_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

یکنواخت غیرگیردار

$$U_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$\{0, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

غیریکنواخت غیرگیردار

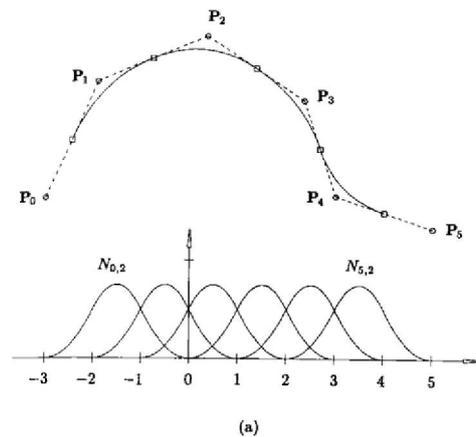
$$\{-2, -1, 0, 4, 5, 6, 7\}$$

به این ترتیب گیرداری و یا غیرگیرداری به این بستگی دارد که آیا مقادیر گره‌ی اول و آخر به تعداد یکی بیشتر از درجه منحنی تکرار شده باشد یا نه و یکنواختی و غیریکنواختی بردار به فاصله بین گره‌ها برمی‌گردد. با این تعاریف آنچه تا اینجا مورد بحث قرار گرفته است به

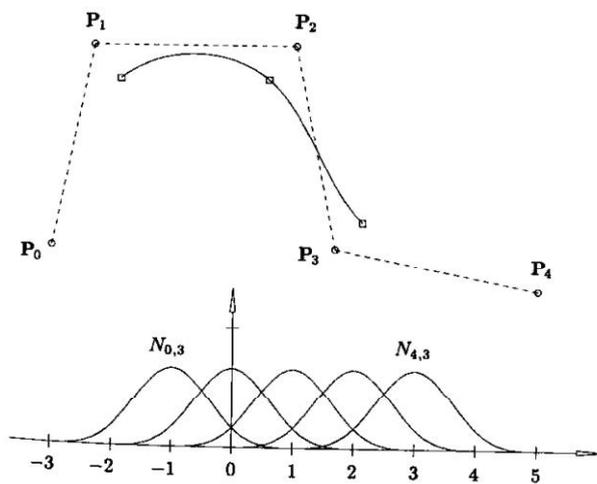
بردارهای گرهی گیردار مربوط بوده است. قبل از پرداختن به بردارهای گرهی غیرگیردار نکات زیر لازم به نکرند:

- اگر بردار گرهی دارای  $m+1$  گره بوده و گره‌های انتهایی، تعدد  $p+1$  داشته باشند، برای تعریف یک منحنی درجه  $p$  به  $(m-p)n+1$  نقطه کنترل نیاز است؛ یعنی، بردار گره‌ها درجه، تعداد نقاط کنترل و محدوده معتبر پارامتر را تعیین می‌کند؛
- منحنی‌های گیردار می‌توانند از نظر هندسی باز یا بسته باشند. اگر منحنی بسته باشد خواه با پیوستگی  $C^k$  بسته باشد یا خیر، به  $k$  بازه گرهی داخلی اول و  $k$  تای آخر،  $k+1$  وزن ابتدایی و انتهایی و نقاط کنترل وابسته است.

بردارگره‌های یکنواخت غیرگیردار  $UI$  از مثال‌های بالا را در نظر بگیرید. طبق معادله (۲-۹۴) می‌توان  $8-p$  تابع پایه‌ی درجه  $p$  را به ازای  $p=0, \dots, 7$  محاسبه کرد. توابع پایه درجه ۲ و ۳ به‌مراه منحنی‌های درجه ۲ و ۳ی نظیر آنها در شکل ۲-۱۲۳ نشان داده شده‌اند. محل گره روی منحنی‌ها علامت‌گذاری شده است. لازم بذکر است که منحنی‌ها در انتهاها گیردار نیستند یعنی نقاط ابتدا و انتهای آنها بر نقاط کنترل منطبق نیستند. بعلاوه ارزیابی منحنی‌ها در  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  نیازمند توابع  $N_{i,p}(u), \dots, N_{i-p,p}(u)$  است؛ لذا منحنی‌ها همانند منحنی‌های گیردار فقط روی محدوده پارامتر  $u \in [u_p, u_{m-p}]$  تعریف می‌شوند. بنابراین منحنی درجه دو شکل ۲-۱۲۳a روی  $u \in [-1, 3]$  و منحنی درجه سه شکل ۲-۱۲۳b روی  $u \in [0, 2]$  تعریف می‌شوند. شکل ۲-۱۲۳ نشان می‌دهد که یک منحنی بسته درجه سه چگونه با بردار گرهی غیریکنواخت غیرگیردار  $U2$  تعریف می‌شود. چون  $m=11$  و  $p=3$ ، به هشت نقطه کنترل ( $n=7$ ) نیاز خواهد بود. حول  $(3=p)$  نقطه کنترل انتهایی یعنی  $P_0 = P_5, P_1 = P_6, P_2 = P_7$   $warp$  می‌کنیم. محدوده پارامترهای معتبر  $u \in [3, 8]$  است. این امر بسته بودن منحنی ضمن پیوستگی  $C^2$  را تضمین می‌کند.

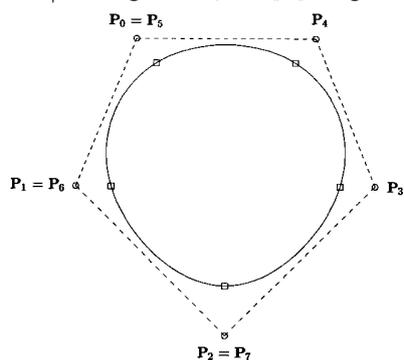


(a)

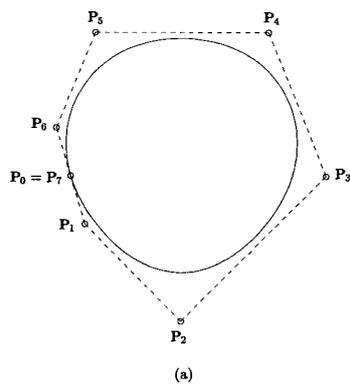


(b)

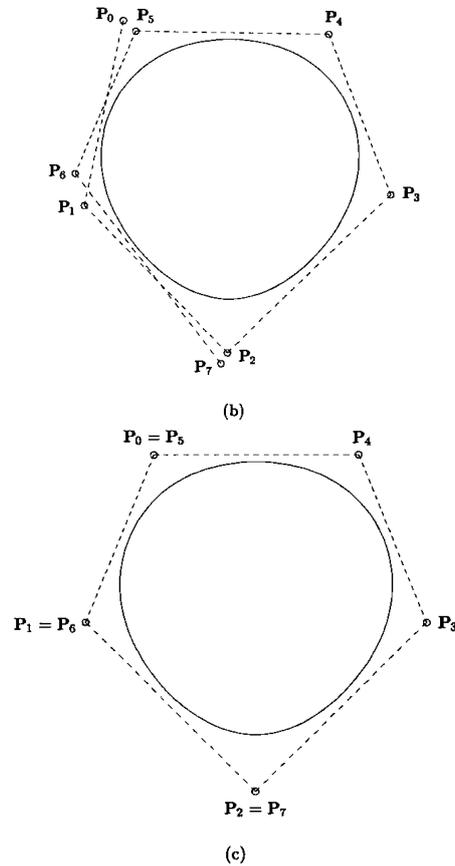
شکل ۱۲۳-۲ منحنی‌های غیرگیردار نرینز (a) منحنی درجه دوم (b) منحنی مکعبی.



شکل ۱۲۴-۲ منحنی مکعبی غیرگیردار بسته با پیوستگی  $C^2$ .



(a)



شکل ۲-۱۲۵

Examples of unclamping a closed curve with different knot vectors. (a) Closed clamped curve; (b) unclamping with no wraparound; (c) unclamping with wraparound

هر آنچه قبلاً برای منحنی‌های یکنواخت غیرگیردار بیان شد به استثنای پیوستگی  $C^{p-1}$  در ابتدا و یا انتهای یک منحنی بسته، برای منحنی‌های غیریکنواخت غیرگیردار هم صادقند. چون پیوستگی به مقادیر گرهی و نیز به محل نقاط کنترل وابسته است، پیوستگی  $C^{p-1}$  یک منحنی غیریکنواخت بسته، لزوماً به *warp* دقیق حول نقاط کنترل دلالت نمی‌کند. شکل 2-125a یک منحنی درجه سه بسته را نشان می‌دهد که روی بردار گرهی یکنواخت گیردار

$$U = \{3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8\}$$

تعریف شده است. منحنی در نقاط دو انتها پیوستگی  $C^2$  دارد. شکل‌های 2-125b و 2-125c انواع غیرگیردار دقیقاً همان منحنی هستند؛ منحنی 2-125b از بردار

$$U = \{0, 0.5, 2.3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8.7, 10.5, 11\}$$

و منحنی شکل 2-125c از بردار

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

استفاده می‌کنند.

نکته لازم به ذکر این است که از نظر تابعی، تفاوت اندکی بین منحنی‌های گیردار و غیرگیردار وجود دارد. با کمی تغییرات، تمام تابع‌های اساسی ارائه شده برای منحنی‌های غیرگیردار قابل استفاده خواهد بود.

امروزه سامانه‌های زیادی فقط از بی‌اسپلاین‌های گیردار استفاده می‌کنند. تبدیل دقیق هر دو حالت بهم امکان‌پذیر است. گیردار کردن یک منحنی کاری غیر از درج گره‌های  $u_p$  تا  $u_{m-p}$  تا عدد  $p$  و سپس حذف گره‌ها و نقاط کنترل بیرون منطقه گیردار نیست. فرمول درج گره، برای منحنی‌های غیرگیردار هم صادق است. به شرطی که گره‌های خارج از محدوده  $0$  تا  $m$  ضمیمه نشوند.

گیردار کردن الزاماً فرآیند حذف گره است. گرچه غیرگیردار کردن به ندرت لازم می‌شود. تابع 2-168 نحوه محاسبه  $p-1$  نقطه کنترل جدید در هر انتها و  $p$  گره جدید در هر انتها را نشان می‌دهد. گره‌های جدید بصورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$u_{p-i-1} = u_{p-i} - (u_{n-i+1} - u_{n-i}) \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (2-168)$$

$$u_{n+i+2} = u_{n+i+1} + (u_{p+i+1} - u_{p+i}) \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (2-169)$$

منحنی‌ها و سطوح نریز در چندین استاندارد بین‌المللی و آمریکایی شناخته شده‌اند. استانداردهایی از قبیل *STEP IGES* و *PHIGS* نریز را بعنوان جزئی از اشیای استاندارد خود می‌شناسند. هر دو *STEP* و *IGES* امکان تبادل بی‌اسپلاین‌های غیرگیردار را فراهم می‌کنند. در اینجا هدف انتقال مفهومی نحوه تعریف نریز در این استانداردها برای خوانندگان محترم است. برای مطالعه جامع‌تر، توصیه می‌شود به متن استانداردهای مربوطه مراجعه شود.

#### IGES 2-29-2

این استاندارد پُرکاربردترین فرمت تبادل داده‌ها بین سامانه‌های *CAD/CAM* است. با این استاندارد می‌توان داده‌های گرافیکی و هندسی مربوط به منحنی‌ها، سطوح و احجام سه بعدی را مبادله کرد. در *IGES* یک منحنی نریز با داده‌های زیر مشخص می‌شود:

(۱) درجه ( $p$ ) و تعداد نقاط کنترل ( $n+1$ ):

(۲) نقاط کنترل اقلیدسی ( $P_i$ ) و وزن آنها ( $w_i$ ):

(۳) یک بردار گره‌ی ( $U$ ) شامل  $m+1=n+p+2$  گره؛

(۴) مقادیر پارامتر شروع و خاتمه ( $s_0$  و  $s_1$ ).

(۵) سایر اطلاعات غیرضروری ولی مفید مانند اینکه آیا منحنی مسطح است یا خیر، باز است یا بسته، کاملاً نسبی (تمام وزن‌ها یکی نیستند) است یا غیرنسبتی، گیردار است یا غیرگیردار: علاوه

بر اینها منحنی می‌تواند دارای یک برچسب منبسطی بر خاص بودن آن باشد؛ مثلاً بر چسبی دال بر خط، دایره و یا مقطع مخروطی بودن.

سطوح نریز *IGES* به روشی مشابه تعریف می‌شوند. نقاط کنترل و وزن‌ها مجزا از هم تعریف می‌شوند. وزن‌ها باید مثبت باشند. در صورتیکه  $p$  و  $n+1$  و  $q$  و  $m+1$  به ترتیب درجات و تعداد نقاط کنترل در جهات  $u$  و  $v$  باشند تنها محدودیت گره‌های  $u$  و  $v$  این است که  $r=n+p+1$  و  $u_{i-1} \leq u_i$  برای  $i=1, \dots, r$  و  $v_{j-1} \leq v_j$  برای  $j=1, \dots, s$ . پارامترهای  $t_0, s_1, s_0$  و  $t_1$  معرف سطح مورد نظر هستند که می‌تواند زیر سطح مناسبی باشد که با گره‌ها، وزن‌ها و نقاط کنترل معلوم تعریف می‌شود. پرچم‌های اطلاعاتی هم وجود دارند که نشان‌دهنده باز یا بسته بودن، گیرداری و نسبتی و غیرنسبتی بودن سطح هستند. یک سطح نریز می‌تواند جزو یکی از نوع خاص زیر باشد: صفحه، استوانه مدور، مخروط، کره، چنبره، سطح دورانی، استوانه عمومی، سطح غلتانده شده (*ruled surface*) یا سطح درجه چهار عمومی.

### STEP ۳-۲۹-۲

منحنی‌ها و سطوح نریز در بخش ۴۲ استاندارد *STEP* تعریف می‌شوند. این بخش شامل منحنی‌ها، سطوح و احجام سه بعدی می‌شود. منحنی نریز در *STEP* با اطلاعات زیر مشخص می‌شود:

(۱) درجه ( $p$ ) و تعداد نقاط کنترل ( $n+1$ ):

(۲) نقاط کنترل اقلیدسی ( $P_i$ ) و وزن‌ها ( $w_i$ ). فقط وزن‌های مثبت مجازند؛

(۳) یک بردار گره‌ها ( $U$ ) شامل  $m+1=n+p+2$  گره با شرط  $u_{i-1} \leq u_i$  برای  $i=1, \dots, m$  تعداد گره‌ها را محدود می‌کند. اولین و آخرین گره می‌توانند دارای تعدد حداکثر  $p+1$  باشند و تعدد حداکثر گره‌های داخلی  $p$  است؛

(۴) اطلاعات دیگر شامل نوع بردار گره‌ها، باز یا بسته بودن منحنی، خود متقاطع بودن و برچسب نوع منحنی مانند برچسب چند خطی، دایره یا مخروطی بودن منحنی.

مفهوم ترمینینگ (*trimming*) یک منحنی با پارامترهای  $s_0$  و  $s_1$ ، با شرط  $u_0 \leq s_0 < s_1 \leq u_m$  در *STEP* نیز وجود دارد اما در سطح بالاتری از *IGES* بسته به شکل بردارهای گره‌ها، منحنی‌های نریز را به چهار نوع تقسیم می‌کنند: یکنواخت، شبه یکنواخت، بزییر و غیریکنواخت. بردار گره‌ها در صورتی یکنواخت است که به ازای  $i=1, \dots, m$  و عدد ثابت  $d$   $u_i - u_{i-1} = d$  براساس مطالب بخش قبل این تعریف معادل غیرگیردار و یکنواخت بودن بردار گره‌هاست. حالت شبه یکنواخت نظیر حالت گیرداری و یکنواختی بردار گره‌هاست؛ یعنی  $u_0 = \dots = u_p = u_{m-p} = \dots = u_m$  و به ازای یک عدد ثابت مثبت  $d$   $u_i - u_{i-1} = d$  حالت بزییر به این صورت است که مقادیر گره‌ها مجزا هم فاصله بوده و اولین و آخرین گره‌ها دارای تعدد  $p+1$  و تمام گره‌های داخلی تعدد  $P$  دارند؛ یعنی منحنی بطور تکه‌ای از نوع بزییر است. اگر بردار گره‌ها جزو این سه گروه نباشد غیریکنواخت نامیده می‌شود.

سطح نریز *STEP* مشابه منحنی آن تعریف می‌شود.

**PHIGS. ۴-۲۹-۲**

*IGES* و *STEP* استانداردهای تبادل داده‌ها هستند اما *PHIGS* یک استاندارد بین‌المللی برای ارتباط برنامه‌نویسی گرافیک تعاملی مستقل از دستگاه است. با *PHIGS* برنامه‌نویس می‌تواند منحنی‌ها و سطوح نرَبز را مستقیماً برای واحد نمایش ارسال نماید. در این استاندارد یک منحنی نرَبز با اطلاعات زیر تعریف می‌شود:

(۱) مرتبه ( $n+1$  درجه)، تعداد نقاط کنترل و تعداد گره‌ها؛

(۲) نقاط کنترل اقلیدسی ( $P_i$ ) اگر منحنی غیرنسبتی باشد؛ در غیر این صورت، نقاط کنترل

همگن  $P_i^H$  با پرچمی دال بر نسبی بودن منحنی. وزن‌ها باید مثبت باشند؛

(۳) گره‌ها: فقط بردارهای گرهی گیردار مجازند، خواه یکنواخت یا غیریکنواخت باشند. محدودیتی از نظر تعدد گره‌ها وجود ندارد؛

(۴) پارامترهای ترمینگ ( $s_0$  و  $s_1$ ) معرف شروع و خاتمه واقعی منحنی مورد نظر. سطوح نرَبز نیز مشابه منحنی‌های آن تعریف می‌شوند با این استثنا که پارامترهای ترمینگ وجود ندارند.

## Exercises

Of all affine maps, shears seem to be the least familiar to most people.<sup>7</sup> Construct a matrix that maps the unit square with points  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  to the parallelogram with image points  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1)$ .

In the definition of the variation diminishing property, we counted the crossings of a polygon with a plane. Discuss the case when the plane contains a whole polygon leg.

We have seen that affine maps leave the ratio of three collinear points constant, i.e., they are ratio-preserving. Show that the converse is also true: every ratio-preserving map is affine.

We defined the convex hull of a point set to be the set of all convex combinations formed by the elements of that set. Another definition is the following: the convex hull of a point set is the intersection of all convex sets that contain the given set. Show that the two definitions are equivalent.

Show that the  $n + 1$  functions  $f_i(t) = t^i$ ;  $i = 0, \dots, n$  are linearly independent.

Our definition of barycentric combinations gives the impression that it needs the involved points expressed in terms of some coordinate system. Show that this is not necessary: draw five points on a piece of paper, assign a weight to each one, and *construct* the barycenter of your points using a ruler (or compass and straightedge, if you are more classically inclined).

Remark: For this construction, it is not necessary for the weights to sum to one. This is so because the geometric construction remains the same if we multiplied all weights by a common factor. In fact, one may replace the concept of points (having mass one and requiring barycentric combinations as the basic point operation) by that of *mass points*, having arbitrary weights and yielding their barycenter (with the combined mass of all points) as the basic operation. In such a setting, vectors would also be mass points, but with mass zero.<sup>8</sup>

Let a triangulation consist of  $b$  boundary points and of  $i$  interior points. Show that the number of triangles is  $2i + b - 2$ .

Fix two distinct points  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  on the  $x$ -axis. Let a third point  $\mathbf{x}$  trace out all of the  $x$ -axis. For each location of  $\mathbf{x}$ , plot the value of the function  $\text{ratio}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b})$ , thus obtaining a graph of the ratio function.

Suppose a planar Bézier curve has a control polygon that is symmetric with respect to the  $y$ -axis. Is the curve also symmetric with respect to the  $y$ -axis? Be sure to consider the control polygon  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ . Generalize to other symmetry properties.

Use the de Casteljau algorithm to design a curve of degree four that has its middle control point on the curve. More specifically, try to achieve

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_0^4 \left( \frac{1}{2} \right).$$

Five collinear control points are a solution; try to be more ambitious!

The de Casteljau algorithm may be formulated as

$$\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n; t] = (1-t)\mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{n-1}; t] + t\mathcal{B}[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; t].$$

Show that the computation count is exponential (in terms of the degree) if you implement such a recursive algorithm in a language such as C.

Show that every nonplanar cubic in  $\mathbb{E}^3$  can be obtained as an affine map of the *standard cubic* (see Boehm [64]):

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}.$$

Consider the cubic Bézier curve given by the planar control points

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

At  $t = 1/2$ , this curve has a *cusp*: its first derivative vanishes and it shows a sharp corner. You should verify this by a sketch. Now perturb the  $x$ -coordinates of  $\mathbf{b}_1$  and  $\mathbf{b}_2$  by opposite amounts, thus maintaining a symmetric control polygon. Discuss what happens to the curve.

Show that a nonplanar cubic Bézier curve cannot have a cusp. Hint: use the fact that  $\mathbf{b}_0^{n-1}$ ,  $\mathbf{b}_1^{n-1}$ ,  $\mathbf{b}_0^n$  are identical when we evaluate at the cusp.

Show that the Bernstein polynomial  $B_i^n$  attains its maximum at  $t = i/n$ . Find the maximum value. What happens for large  $n$ ?

Show that the Bernstein polynomials  $B_i^n$  form a basis for the linear space of all polynomials of degree  $n$ .

Use subdivision to create *smooth fractals*. Start with a degree four Bézier curve. Subdivide it into two curves and then perturb the middle control point  $\mathbf{b}_2$  for each of the two subpolygons. Continue for several levels. Try to perturb the middle control point by a random displacement and then by a controlled displacement. Literature on fractals: [30], [346].

Use subdivision to approximate a high-order ( $n > 2$ ) Bézier curve by a collection of quadratic Bézier curves. You will have to write a routine that determines if a given Bézier curve may be replaced by a quadratic one within a given tolerance. Literature on approximating higher order curves by lower order ones: [290], [294].

Consider the parabolic arc  $\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u)) = (-1 - u + 2u^2, -2u + u^2)$ ,  $0 \leq u \leq 1$ . Sketch this curve. The curve is rotated and translated by applying the transformations to the functions  $x(u)$  and  $y(u)$ . Apply the two transformations

- (1)  $90^\circ$  rotation about the origin. The rotation matrix (applied from the left) is

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (2) translation with the vector  $(-1, -1)$ .

The implicit equation of the underlying parabola is  $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - y - 5 = 0$ . Sketch this curve. Apply the previous rotation and translation to this equation. Hint: let  $\bar{x}, \bar{y}$  be the transformed coordinates. Find expressions  $x = f(\bar{x}, \bar{y})$  and  $y = g(\bar{x}, \bar{y})$  and substitute these into the implicit equation to obtain the implicit equation of the transformed parabola.

Determine formulas for the number of additions and multiplications necessary to compute a point on an  $n$ th-degree three-dimensional power basis curve.

Construct a cubic power basis curve with a loop. Hint: think about what end-points and end derivatives,  $\mathbf{C}'(0)$  and  $\mathbf{C}'(1)$ , are necessary.

Construct a cubic power basis curve with a cusp. Hint: think about  $\mathbf{C}'(u)$  and  $\mathbf{C}''(u)$ . Sketch what  $x'(u)$ ,  $y'(u)$ ,  $x''(u)$ , and  $y''(u)$  need to look like as functions of  $u$ . Determine a suitable  $\mathbf{C}''(u)$ , and then integrate to obtain  $\mathbf{C}'(u)$  and  $\mathbf{C}(u)$ .

Construct a cubic power basis curve with an inflection point.

Let  $\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u)) = (1 + u - 2u^2 + u^3, 1 - 2u + u^3)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ . Let  $u = 2v - 1$ . Derive the curve  $\mathbf{C}(v)$  by substituting  $2v - 1$  for  $u$  in  $\mathbf{C}(u)$ . What degree is the curve  $\mathbf{C}(v)$ ? Compute  $\mathbf{C}(u)$  for  $u = -1, 0, 1$ . Compute  $\mathbf{C}(v)$  for  $v = 0, 1/2, 1$ . What can you say about the curves  $\mathbf{C}(u)$  and  $\mathbf{C}(v)$ ?  $\mathbf{C}(v)$  is called a *reparameterization* of  $\mathbf{C}(u)$ .

It is sometimes necessary to reverse a curve, i.e., given  $\mathbf{C}_1(u)$ ,  $0 \leq u \leq 1$ , produce  $\mathbf{C}_2(v)$ ,  $0 \leq v \leq 1$ , such that the two curves are the same geometrically, but  $\mathbf{C}_1(0) = \mathbf{C}_2(1)$  and  $\mathbf{C}_1(1) = \mathbf{C}_2(0)$ . How would you do this using the Bézier form? The power basis form?

Consider the circle

$$\mathbf{C}(u) = \left( \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right)$$

Determine which ranges of the parameter  $u$  yield which quadrants of the circle. Do these equations yield the entire circle? What can you say about the parameterization?

Find the rational Bézier representation of the circular arc in the second quadrant, i.e., determine the  $\mathbf{P}_i$  and  $w_i$ . Hint: use symmetry and check your result by showing that  $(x(u))^2 + (y(u))^2 = 1$  for all  $u \in [0, 1]$ .

1.90. The circular arc in the first quadrant is also given by the equation

$$\mathbf{C}(u) = \left( \frac{1 + (\sqrt{2}-2)u + (1-\sqrt{2})u^2}{1 + (\sqrt{2}-2)u + (2-\sqrt{2})u^2}, \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}u((\sqrt{2}-2)u+2)}{1 + (\sqrt{2}-2)u + (2-\sqrt{2})u^2} \right)$$

Determine the rational Bézier representation corresponding to these equations. Hint: the  $\mathbf{P}_i$  must be the same as before  $-(1, 0), (1, 1), (0, 1)$ ; Why? Compute the weights  $w_i$  by equating polynomials and substituting  $u = 0, 1/2, 1$ , as done previously. Compute the point  $\mathbf{C}(1/2)$ , using any method. What is interesting about  $\mathbf{C}(1/2)$ ?

Why do quadratic curves touch their control polygons at knots?

If a quadratic curve has an inflection point, it must be at a knot (see the figures). Why?

Construct a  $C^2$  continuous cubic curve with a cusp.

Let a cubic curve be defined by  $\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^3 N_{i,3}(u)\mathbf{P}_i$  and the knot vector  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/4, 2/3, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ .

- Assume some arbitrary locations for the  $\mathbf{P}_i$  and sketch the curve.
- Where is the point  $\mathbf{C}(1/4)$ ?
- If  $\mathbf{P}_2$  is moved, on what subinterval of  $[0, 1]$  is  $\mathbf{C}(u)$  affected? If  $\mathbf{P}_5$  is moved, what subinterval is affected?
- Which control points are affecting curve shape on the interval  $u \in [1/4, 2/3]$ ? On the interval  $u \in [2/3, 3/4]$ ?

Let  $\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^3 N_{i,2}(u)\mathbf{P}_i$ , where  $U = \{0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1\}$  and  $\mathbf{P}_0 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_1 = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (1, 1)$ , and  $\mathbf{P}_3 = (1, 0)$ . Sketch  $\mathbf{C}(u)$ . Compute  $\mathbf{C}'(u)$ , i.e., its control points and knot vector. Sketch  $\mathbf{C}'(u)$ .

Consider the B-spline surface  $\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 N_{i,2}(u)N_{j,2}(v)\mathbf{P}_{i,j}$

where

$$U = \{0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1\}$$

$$V = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

and

$$\mathbf{P}_{0,0} = (0, 0, 0) \quad \mathbf{P}_{1,0} = (3, 0, 3) \quad \mathbf{P}_{2,0} = (6, 0, 3) \quad \mathbf{P}_{3,0} = (9, 0, 0)$$

$$\mathbf{P}_{0,1} = (0, 2, 2) \quad \mathbf{P}_{1,1} = (3, 2, 5) \quad \mathbf{P}_{2,1} = (6, 2, 5) \quad \mathbf{P}_{3,1} = (9, 2, 2)$$

$$\mathbf{P}_{0,2} = (0, 4, 0) \quad \mathbf{P}_{1,2} = (3, 4, 3) \quad \mathbf{P}_{2,2} = (6, 4, 3) \quad \mathbf{P}_{3,2} = (9, 4, 0)$$

Compute  $\mathbf{S}(3/10, 6/10)$  by evaluating the nonzero B-spline basis functions and multiplying these by the appropriate control points.

Let  $\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 N_{i,1}(u)N_{j,1}(v)\mathbf{P}_{i,j}^w$ , where  $\{\mathbf{P}_{0,0}, \mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{0,1}, \mathbf{P}_{1,1}\} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 3), (2, 1, 1), (2, 0, 3)\}$ ,  $\{w_{0,0}, w_{1,0}, w_{0,1}, w_{1,1}\} = \{2, 1, 1, 1\}$ , and  $U = V = \{0, 0, 1, 1\}$ . Derive the four rational basis functions,  $R_{i,j}(u, v)$ ,  $0 \leq i, j \leq 1$ , and the rational coordinate functions  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ , and  $z(u, v)$  of the surface  $\mathbf{S}(u, v)$ .