چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشیم؟

یک همراه برای ریاضیات کارشناسی

- نویسنده: کِوین هیوستون

مترجمان: مریم اسماعیلی و جواد فتحی مورجانی

اعضای هیات علمی دانشگاه هرمزگان

چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشیم؟

اگر قصد دارید تحصیلات خود را در دوره کارشناسی رشته ریاضی شروع کنید یا شروع کرده اید و با توجه به موضوعی که قبلا به آن علاقه‌مند بودید احساس سردرگمی می کنید. نترسید! این همراه خوب, تفکر ریاضی را برای شما ساده خواهد کرد.

با مطالعه‌ی این کتاب، به انبوهی از روش‌ها دست خواهید یافت که در درک مفاهیم تعریف‌ها، قضیه‌ها، اثبات‌ها، حل مسائل و نوشتن درست ریاضیات کمک خواهند کرد. همه‌ی روش‌های اصلی اثبات، روش مستقیم، حالت‌ها، استقرا، تناقض و به‌طور ویژه عکس نقیض بیان می‌شود. از مثال‌های نقض در سراسر کتاب استفاده شده است، و تعداد زیادی تمرین در زمینه‌های مختلف مانند مقسوم‌علیه‌ها، حساب پیمانه‌ای، رابطه‌های هم‌ارزی، یک به یک بودن و پوشا بودن توابع خواهید داشت.

مباحث کتاب طی سال‌های متمادی توسط دانشجویان حقیقی مورد آزمایش قرار گرفته‌اند؛ لذا همه‌ی اصول و ضروریات پوشش داده می‌شود. این کتاب با بیش از ۳۰۰ تمرین به شما کمک می‌کند تا پیشرفت خودتان را بررسی کنید و خیلی زود یاد خواهید گرفت که چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید.

مطالعه کتاب برای هر دانشجوی کارشناسی ریاضی ضروری است، هر چند اگر در رشته مهندسی یا فیزیک تحصیل می‌کنید و نیاز به درک مفاهیم ریاضی کارشناسی دارید یا اگر به موضوعی مانند علوم کامپیوتر، فلسفه یا زبانشناسی که به منطق نیاز دارد می‌پردازید، باز هم این کتاب می‌تواند به شما کمک کند.

چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشیم.

یک همراه برای ریاضیات کارشناسی

نویسنده

کوین هوستون

مترجمان

مریم اسماعیلی و جواد فتحی مورجانی

اهل کام و ناز را در کوی رندی راه نیست
رهروی باید، جهان سوزی، نه خامی بی غمی

"حضرت حافظ"

ترجمه کتاب، پیشکش

جویندگان راستین راستی

پیش‌گفتار مترجمان

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

خدا را بسیار سپاس که عمر، صبر و توان بخشید تا ترجمه این کتاب به سرانجام رسد.

درحالِحاضر، بشر بیش از همه دوران‌ها به بزرگی و واگرایی هستی و کوچکی خانه‌اش زمین، پی برده است و شگفت آن که توانسته است از وطنش که در نقشه هستی نقطه‌ای هم نمی‌نماید، تا گوی‌های بسیار دورتر از آن پا نهد و رخداد "بینگ بنگ" را کمتر از سه دقیقه بعد از آن رصد کند و همچنان امید آن دارد که بتواند راز هستی را دریابد. بی‌شک همه بلندپروازی‌های انسان بر اندیشه‌اش بنا شده و می‌شود، اندیشه‌ای که در سختی‌های زندگی، بی‌نظیرترین یاریگر و قابل‌اعتمادترین همراه کاوشگری‌های او بوده و هست. لیکن این روزها، اندیشیدن جدا از درست یا غلط بودن آن، در زمره تجملی‌ترین داشته‌ها به شمار می‌رود و اندیشیدن سازگار با اصول منطقی دور از دسترس می‌نماید، درحالی‌که بشر برای درک، دریافت و توسعه هر گوشه از علم به آن نیازمند است.

کتاب "چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشیم؟" تلاش صادقانه استاد و نویسنده‌ای زبردست و خلاق برای هموارکردن راه علاقه‌مندان ورود به عالم ریاضیات است. این کتاب در گام نخست خواننده را در کلاس درس استادی به تمام معنی معلم می‌نشاند و در گام‌های بعد شاگرد را وادار به کنکاش، پرسش‌گری ، درست‌اندیشی و درست‌نویسی می‌کند. به گمان مترجمان، نیاز به مطالعه و تدریس این کتاب و کتاب‌هایی از این دست بیش از همیشه در جامعه آموزشی و پژوهشی کشور ما احساس می‌شود. امید آنکه مطالعه این اثر برای همه خوانندگان آن راهگشا باشد. کوتاه سخن آنکه انتقال شیوایی و جذابیت محتوای این کتاب، در ترجمه بسیار دشوار بود و گاهی یافتن جمله‌ای معادل، ساعت‌ها زمان می‌برد و ممکن است هنوز هم جای تغییر و اصلاح داشته باشد. از همه خوانندگان عزیز و بزرگوار خواهشمند است پیشنهادات سازنده خود را درباره ترجمه این کتاب به مترجمان گوشزد فرمایند، که بی‌گمان مورد تامل قرار خواهد گرفت.

آدرس پست الکترونیک مترجمان:

m.esmaeili@hormozgan.ac.ir

fathi@hormozgan.ac.ir

چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشیم.

آیا قصد دارید تحصیلات خود را در دوره کارشناسی رشته ریاضی شروع کنید؟ ممکن است شروع کرده باشید و باتوجه‌به موضوعی که قبلا به آن علاقه‌مند بودیده‌اید احساس سردرگمی کنید. نترسید! این همراه صمیمی، اندیشیدن حقیقی به ریاضی را برای شما ساده خواهد کرد.

با مطالعه این کتاب، به انبوهی از روش‌ها دست خواهید یافت که در درک مفاهیم تعریف‌ها، قضیه‌ها، اثبات‌ها، حل مسئله‌ها و نوشتن مؤثر ریاضیات به شما کمک خواهد کرد. همه روش‌های اصلی اثبات، شامل روش مستقیم، حالت‌ها، استقرا، تناقض و به‌طور ویژه عکس نقیض ارائه شده است. در سراسر کتاب از مثال‌های نقض استفاده شده است و تمرین‌های زیادی در زمینه‌های مختلف مانند مقسوم‌علیه‌ها، حساب پیمانه‌ای، رابطه‌های هم‌ارزی، یک‌به‌یک بودن و پوشا بودن توابع خواهید داشت.

این مباحث طی سال‌های متمادی توسط دانشجویان واقعی مورد آزمایش قرار گرفته‌اند؛ و درنتیجه تمام اصول و ضروریات پوشش داده شده‌اند. این کتاب، با بیش از ۳۰۰ تمرین کمک می‌کند تا پیشرفت‌تان را بررسی کنید، به زودی یاد خواهید گرفت که چگونه مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید.

این کتاب برای هر دانشجوی کارشناسی ریاضی ضروری است، هرچند اگر مهندسی یا فیزیک مطالعه می‌کنید و نیاز دارید که موضوعات ریاضی کارشناسی را درک کنید یا به موضوعی مانند علوم کامپیوتر، فلسفه یا زبان‌شناسی که به منطق نیاز دارد می‌پردازید، این کتاب می‌تواند به شما کمک کند.

پیش‌گفتار مؤلف

پرسش: چه تعداد از ماه‌های سال میلادی ۲۸ روز دارند؟

پاسخ ریاضی‌دان: همه آنها

قدرت ریاضیات

قدرتمندترین ابزاری که در اختیار داریم ریاضیات است که جهان را کنترل می‌کند. می‌توانیم برای رفتن به ماه از آن استفاده کنیم، یا برای اندازه‌گیری مقدار انسولین یک شخص دیابتی از آن بهره ببریم. یادگیری صحیح آن دشوار است.

و هنوز و هنوز ... و هنوز مردم کسانی که از ریاضیات استفاده می‌کنند یا به آن علاقه‌مند هستند را فردی غیراجتماعی یا آدم بی اثر می‌پندارند[1]. هنوز اکثر مردم فکر می‌کنند که ریاضیات استفاده‌ای ندارد. در طول تاریخ، دانش آموزان در مدرسه نالیده‌اند که ریاضیات چه کاربردی دارد؟

چرا یک فرد دوست دارد ریاضی‌دان شود؟ همانطور که قبلا گفتم ریاضیات ابزار قدرتمندی است. مشاغلی که در آنها از ریاضیات استفاده می‌شود اغلب درآمد خوبی دارند و مردم هم به این مشاغل تمایل دارند. برخی از واکنش‌های افراد غیر ریاضی‌دان در مواجهه با فرد ریاضی‌دان عبارت‌است از: من در مدرسه از ریاضیات متنفر بودم. من به هیچ وجه در ریاضیات خوب نبودم؛ و یا "شما باید واقعا باهوش باشید".

تصور کلی

هدف این کتاب فاش‌کردن این راز است که یک ریاضی‌دان واقعا چگونه فکر می‌کند. هنگامی که با حرفه ریاضیات سروکار داشتم خیلی وقتها فکر می‌کردم " ای‌کاش شخصی این مطالب را زودتر به من می‌گفت." این کتاب مجموعه‌ای از چنین مثال‌هاست. در حقیقت، امیدوارم این کتاب بیشتر از یک جمع‌آوری ساده از روش‌های خوب، راهنمای نگرش و روش اندیشیدن در ریاضیات با کارآیی مفید باشد.

اگر دانشجوی کارشناسی هستید، احتمالا مطالعه ریاضیات در سطح عالی برای شما شامل استفاده از مهارت‌های جدید است. در مورد مهارت‌های مطالعه عمومی برای مدیریت زمان، خلاصه‌نویسی، روش آزمون و غیره بحث نخواهد شد. این‌ها را باید جای دیگری جست‌وجو کنید.

تلاش خواهم کرد که بتوانید مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید، بنابراین می‌خواهم کتاب فشرده‌ای به شما ارائه دهم که شامل توصیه‌های عملی و تذکراتی مفید در مورد چگونگی به‌دست آوردن مهارت‌های خاص در راستای اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان باشد. برخی نکات، نامحسوس هستند؛ موارد دیگر، زمانی که آنها را بازگو می‌کنید روشن می‌شوند. برای مثال وقتی‌که تلاش می‌کنید نشان دهید معادله‌ای برقرار است باید طرف پیچیده‌تر را در نظر بگیرید و آن را ساده کنید تا به طرف دیگر برسید (صفحه ۱۸۴). این کتاب شامل توصیه‌هایی درباره تفکر در ریاضیات عالی است و برای یک فرد تازه‌کار بسیار پیچیده است؛ پس اگر همه مطالب آن را بلافاصله درک نمی‌کنید، نگران نباشید.

از این کتاب چگونه استفاده شود؟

از آنجا که هر قسمت از کتاب به یک ایده یا مجموعه‌ای از ایده‌های مجزا و متفاوت می‌پردازد، سبک‌های متفاوتی دارد. کتاب شامل اطلاعات زیادی است و مشابه اکثر کتاب‌های ریاضی نمی‌توانید آن را مانند یک رمان بنشینید و بخوانید.

چند توصیه دوستانه

و حالا چند توصیه دوستانه که احتمالا قبلا شنیده‌اید؛ اما ارزش تکرار دارد.

- این به شما بستگی دارد، فعالیت‌های شما احتمالا بزرگترین تعیین کننده نتیجه مطالعات شماست. یک ضرب‌المثل قدیمی می‌گوید: "معلم می‌تواند در را باز کند اما خودتان باید وارد شوید."

- فعال باشید، کتاب بخوانید، همه تمرین‌ها را انجام دهید.

[1] اصطلاح مورد علاقه و بدسلیقه خود را برای باهوش به آن اضافه کنید.

- "خودتان فکر کنید؛" همیشه توصیه خوبی است.
- سؤال کنید؛ همه نتایجی که ارائه می شود، باور نداشته باشید. آنها را نپذیرید تا وقتی که مطمئن شوید آنها را باور دارید.
- خوب ببینید؛ قدرت شرلوک هولمز از استنتاج‌هایش حاصل نمی‌شد، بلکه از مشاهداتش به‌دست می‌آمد.
- برای اشتباه آماده باشید، اغلب گفته می‌شود که در انجام فعالیت‌های ریاضی اشتباه می‌کنید. ناامید نباشید، ریاضیات سخت است اما دست‌آوردهای آن بزرگ هستند. آن را برای شگفت‌زده کردن خودتان به کار بگیرید.
- حفظ نکنید؛ به دنبال فهمیدن باشید، به خاطر سپردن چیزی که آن را به‌درستی درک می‌کنید، آسان است.
- بینش خود را گسترش دهید، اما به آن اعتماد نکنید.
- همکاری؛ اگر می‌توانید با دیگران کار کنید تا ریاضیات را درک کنید. این یک مسابقه نیست. فقط از دیگران کپی نکنید.
- تأمل کنید؛ برگردید و ببینید چه چیزی یادگرفته‌اید. از خودتان بپرسید که چطور می‌توانید بهتر یاد بگیرید.

اساتید و مدرسان، اندکی از زمان با ارزشتان را بگذارید.

به‌تازگی یکی از همکارانم شاکی بود که وقتی دانشجو اثبات گزاره‌ای به شکل "A نتیجه می‌دهد B" را بیان می‌کند، روش اثبات کاملا ناقص است. به شوخی گفت دانشجو A را فرض می‌کند، کمی با آن کار می‌کند، از این حقیقت که B درست است استفاده می‌کند و نتیجه می‌گیرد که A درست است. چگونه است که به تعداد زیادی از دانشجویان، برای ساخت استدلال‌های منطقی در اثبات‌ها، این‌چنین سخت می‌گذرد؟

امیدوارم برای این پرسش، پاسخی داشته باشم. این کتاب، تلاشی برای رسیدن به یک پاسخ است. این یک شعار نیست. در سال‌های تدریس، برای بهبود تفکر ریاضی در دانشجویان، ایده‌ها را مورد آزمایش و امتحان قرار داده‌ام. امیدوارم روش‌های خوبی جمع‌آوری کرده باشم که آنها را به مسیر درک ریاضیات برساند.

اگر قصد استفاده از این کتاب را دارید، پیشنهاد می‌کنم برخی قسمت‌های منتخب یا مورد علاقه خود را که می‌دانید دانشجویان آنها را به‌سختی می‌فهمند بیان کنید. هرچند فکر می‌کنم دانشجویان نمی‌توانند همه ی توصیه‌های این کتاب را در یک دوره درسی، کاملا دریابند. یکی از اهداف شخصی‌ام در تدریس این است که برای دانشجویان الهام‌بخش باشم. ریاضیات باید جذاب باشد و اگر دانشجویان این جذابیت را احساس کنند، انگیزه پیدا می‌کنند که مطالعه کنند و به نقل از ضرب‌المثلی که پیش از این ذکر شد، خودشان ورود می‌کنند. هدف این است که آنها را برای جست‌وجو آزاد بگذارم. به آنها مسیر را نشان دهید و ابزارهای پیشرفت را در اختیارشان بگذارید، دراین‌صورت می‌توانند سایر عرصه‌های ریاضی را کشف کنند. همان‌طور که می‌دانید دست‌یابی به این مرحله، سخت و زمان‌بر است. در این راستا استفاده از منابع، کمک از دانشگاه یا همکاران هم می‌تواند مؤثر باشد. بیشتر اوقات خودشان مقصر نیستند، دانشجو هستندو متاسفانه فکر نمی‌کنند که باید ذاتی پرسشگر داشته باشند؛ بلکه فکر می‌کنند باید ذاتی پاسخگو داشته باشند. انتظار دارند که از آنها سؤال‌هایی بپرسیم تا پاسخ‌هایی ارائه دهند، زیرا این روشی است که یاد گرفته و با آن تحصیل کرده‌اند. هدف کتاب این است که آنها را به پرسش‌هایی برساند که نیاز است بپرسند؛ لذا بیشتر از این به من نیاز ندارند.

تشکر و سپاس

زمان نسبتا زیادی صرف تهیه و نگارش این کتاب شده است؛ بنابراین افراد زیادی هستند که به سبب تاثیرگذاری یا انتخاب محتوا باید از آنها سپاسگزار باشم. برخی از مطالب در جزوه‌ای با همین نام جمع‌آوری شد و در اختیار دانشجویان سال اول ریاضیات در دانشگاه لیدز قرار گرفت و طی آن سال‌ها، بسیاری از اساتید و دانشجویان در مورد آن اظهارنظر کردند. جزوه در سایت اینترنتی در دسترس بود و اشخاصی از سراسر دنیا توصیه‌هایی ارسال کردند. از احمد علی، جان بیبی، گراس دالس، توبیاس گلاپر، کریس رابسون، سیرگی گلاکو، کتی میلز، مایک روبینسون، راخائیل اسمیت و دانشجویان دانشگاه‌های لیدز و وارویک که اولین سوژه نظریه‌ها و آزمایشات امتحان شده من بودند (و کسانی که نامشان را فراموش کرده‌ام) سپاسگزارم. از دیوید فانکو، مارگیت مسمر، الان اسلامسون و ماریا ورتنیکو برای خواندن نوشته اولیه بسیار سپاسگزارم؛ به‌ویژه از مارگیت و الان که بحث‌های مفید زیادی با آنها داشته‌ام، متشکرم. از داور ناشناس و همه کسانی که در انتشارات دانشگاه کمبریج در چاپ این کتاب درگیر بوده‌اند و به‌ویژه پیتر تامسون سپاسگزارم.

در نهایت دوست دارم از همسرم کارل برای همراهیش در نوشتن این کتاب و روشنایی بخشیدن به زندگی‌ام تشکر کنم.

کوین هوستون

فهرست مطالب

بخش اول

مهارت مطالعه ریاضی‌دانان

فصل ۱
مجموعه‌ها و توابع

هر چیزی از جایی شروع می‌شود، گرچه بسیاری از فیزیک‌دانان با آن موافق نیستند.

” تری پرچت[۱]، ۱۹۹۶ “

فکر کردن مانند یک ریاضی‌دان به اندکی علم ریاضیات برای اندیشیدن نیاز دارد. با پیش‌نیاز حداقلی، مطالب این کتاب را پیش می‌بریم تا شکاف‌های موجود در دانسته‌ها روی درک شما سنگینی نکند. بی‌شک برخی از موضوعات ریاضی را برای ایفای نقش خواهیم داشت. در این فصل، مجموعه‌ها و توابع معرفی می‌شوند. این موضوعات، بسیار پایه‌ای و ابتدایی هستند اما برای رسیدن به هدف کفایت می‌کنند.

یک مجموعه، گردایه‌ای از چیزهاست و یک تابع، پیوندی بین اعضای یک مجموعه با اعضای مجموعه‌ای دیگر است. بیشتر موضوعات ریاضی پیشرفته در مورد مجموعه‌ها و توابع بین آن‌هاست. برای مثال، حساب دیفرانسیل و انتگرال، مطالعه توابع از مجموعه اعداد حقیقی به مجموعه اعداد حقیقی است و ویژگی آن‌ها این است که می‌توانیم از آن‌ها مشتق بگیریم. درنتیجه، می‌توانیم مجموعه‌ها و توابع را به‌عنوان بلوک‌های سازه ریاضی‌دانان تصور کنیم.

درحالی‌که این فصل را مطالعه و بررسی می‌کنید، در مورد روش مطالعه خود نیز بیندیشید. آیا هر کلمه را می‌خوانید؟ کدام یک از تمرین‌ها را انجام می‌دهید؟ به‌راستی تمرین را انجام می‌دهید؟ در فصل آینده بیشتر روی خواندن ریاضیات بحث می‌کنیم.

مجموعه‌ها

مجموعه، شیء بنیادی در علم ریاضیات است. ریاضی‌دانان یک مجموعه را می‌گیرند و آنچه با آن انجام می‌دهند شگفت‌انگیز است.

تعریف ۱.۰.۱.

یک مجموعه، گردایه‌ای خوش‌تعریف از چیزها است[۲]*. اشیا در مجموعه،* **عناصر** *یا* **اعضای** *مجموعه نامیده می‌شوند. یک مجموعه خاص، معمولا با قرار دادن فهرست عناصرش بین آکولادها ($\{\}$) مشخص می‌شود. (به ترتیب عناصر توجهی نداریم.)*

اگر x عضوی از مجموعه X باشد، می‌نویسیم $x \in X$. این را ”x عنصری (عضوی) از X“ یا ”x در X“ می‌خوانیم[۳]. اگر x عضو X نباشد، می‌نویسیم $x \notin X$.

---

[۱] ترنس دیوید جان ($Terence\ David\ John\ Pratchett$)، زاده ۲۸ آوریل ۱۹۴۸ـ درگذشته ۱۲ مارس ۲۰۱۵ نویسنده‌ای بریتانیایی در سبک خیال‌پردازی، علمی تخیلی و کتاب کودکان بود. کتاب ”جانی و بمب“یکی از کتاب‌های ایشان است.

[۲] تعریف ریاضی‌گونه مناسب برای مجموعه‌ها بسیار پیچیده است. کتاب‌های نظریه مجموعه‌ها را ببینید. این تعریف مبنی‌بر درک و انتقال است و در بسیاری از مسئله‌ها روشن‌گر نیست. البته یک دانشمندنما می‌پرسد: خوش‌تعریفی به چه معنی است؟

[۳] البته برای تشخیص x و X، با صدای بلند می‌خوانیم: x کوچک یک عضو از X بزرگ است.

مثال ۱.۱.

(آ) *مجموعه شامل اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به‌صورت* $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ *نوشته می‌شود. عدد ۳ عضو مجموعه است یعنی* $۳ \in \{۱,۲,۳,۴,۵\}$*، اما* $۶ \notin \{۱,۲,۳,۴,۵\}$*. توجه کنید که می‌توانیم مجموعه را به‌شکل* $\{۱,۴,۵,۲,۳\}$ *نیز، بدون توجه به ترتیب اعضا بنویسیم.*

(ب) *مجموعه {موش، گربه، سگ} مجموعه‌ای با سه عضو سگ، گربه و موش است.*

(ج) *مجموعه* $\big\{\{۲,۷,۵\}, \{\text{گربه، سگ}\}, ۱۲, ۵, ۱\big\}$ *مجموعه‌ای شامل اعداد ۱، ۵، ۱۲ و مجموعه‌های {گربه ، سگ} و* $\{۲,۷,۵\}$ *است. دقت کنید مجموعه‌ها می‌توانند مجموعه‌ها را به‌صورت عضو شامل شوند. درک این مطلب می‌تواند از اشتباهات بعدی جلوگیری کند.*

توجه به این که $\{۵\}$ و ۵ یکی نیستند دارای اهمیت حیاتی است. ما باید مجموعه بودن و عضو یک مجموعه بودن را تمیز دهیم. در مثال آخر $\{۲,۷,۵\}$ که خود یک مجموعه است، عضو یک مجموعه نیز هست. یعنی $\{۲,۷,۵\} \in \big\{\{۲,۷,۵\}, \{\text{گربه و سگ}\}, ۱۲, ۵, ۱\big\}$، ممکن است گمراه کننده باشد.
مثال بعد که با استفاده از مجموعه‌ها خلق شده است را ببینید.

مثال ۲.۱.

مجموعه $X = \{۱, ۲, \text{سگ}, \{۳,۴\}, \text{موش}\}$ *پنج عضو دارد. چهار عضو ۱، ۲، سگ، موش و عنصر دیگر مجموعه* $\{۳,۴\}$ *است. می‌توانیم بنویسیم* $۱ \in X$ *و* $\{۳,۴\} \in X$*. توجه به این که* $۳ \notin X$ *و* $۴ \notin X$ *بسیار بااهمیت است یعنی اعداد ۳ و ۴ اعضای* X *نیستند، مجموعه* $\{۳,۴\}$ *عضو* X *هست.*

چند مجموعه جذاب از اعداد

بیایید به انواع مختلفی از اعداد که در مجموعه‌های خود می‌توانیم داشته باشیم، نگاه کنیم.

- **اعداد طبیعی**

مجموعه **اعداد طبیعی** به‌صورت $\{۱,۲,۳,۴,\cdots\}$ است و با $\mathbb{N}$ نمایش داده می‌شود. نقطه‌ها به این معنی است که تا همیشه ادامه دارد و می‌توانیم آن را " همین‌طور ادامه دارد" بخوانیم.
برخی ریاضی‌دانان، به‌ویژه منطقیون، علاقه‌مندند که اعداد طبیعی شامل صفر باشد و برخی دیگر معتقدند که اعداد طبیعی، اعداد شمارش هستند و با صفر شروع نمی‌شوند (مگر اینکه یک برنامه‌نویس رایانه باشید.). به‌علاوه چطور یک عدد می‌تواند طبیعی باشد، درحالی‌که تا همین اواخر اختراع نشده بود؟
ازسوی‌دیگر، اگر فرض کنیم $۰ \in \mathbb{N}$، بعضی از قضیه‌ها شکل بهتری خواهند داشت. با دسته‌بندی اعداد صحیح نامنفی یا اعداد صحیح مثبت که در ادامه می‌آید، می‌توان بحث را کامل کرد.

- **اعداد صحیح**

مجموعه $\{\cdots, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \cdots\}$ مجموعه **اعداد صحیح** است و با $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شود. نشان $\mathbb{Z}$ از کلمه آلمانی زاهلن ($zahlen$) به‌معنی عدد گرفته شده است. مجموعه $\{۰,۱,۲,۳,۴,\cdots\}$، **اعداد صحیح نامنفی** گفته و اغلب با $\mathbb{Z}^+$ نمایش داده می‌شود. توجه کنید که همه اعداد طبیعی، صحیح هستند.

- **اعداد گویا**

مجموعه **اعداد گویا** که با $\mathbb{Q}$ نمایش داده می‌شود، شامل همه اعداد کسری است. یعنی $x \in \mathbb{Q}$، اگر بتوان x را به‌صورت $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q اعداد صحیح هستند و $q \neq ۰$. برای مثال $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۶}{۱}$ و $\frac{۸۰}{۵}$. دقت کنید که نمایش یکتا نیست، برای مثال $\frac{۱۶}{۱} = \frac{۸۰}{۵}$. همچنین، همه اعداد صحیح، گویا هستند، زیرا می‌توان $x \in \mathbb{Z}$ را به‌صورت $\frac{x}{۱}$ نوشت.

- **اعداد حقیقی**

مجموعه **اعداد حقیقی** با $\mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود و تعریف کردن آن به‌شدت سخت است. فعلا می‌توان آن‌ها را هر عددی که یک نمایش اعشاری (شامل نمایش‌هایی که تا بی‌نهایت پیش می‌روند.) یا یک نقطه روی خط اعداد که تا بی‌نهایت ادامه دارد، در نظر گرفت.
اعداد حقیقی شامل اعداد گویاست. (بنابراین اعداد صحیح و درنتیجه اعداد طبیعی را نیز شامل می‌شود.) همچنین π و e اعدادی حقیقی هستند که هیچ یک گویا نیستند[۴]. عدد $\sqrt{۲}$ نیز گویا نیست و در فصل ۲۳ این موضوع اثبات خواهد شد.
مجموعه اعداد حقیقی که گویا نیستند را اعداد گنگ می‌نامند.

- **اعداد مختلط**

با وانمودکردن به اینکه جذر -۱ موجود است می‌توان پیش‌تر رفت و **اعداد مختلط** را که با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شوند، معرفی کرد. این تعریف از قدرتمندترین ابزار موجود در جعبه‌ابزار ریاضی‌دانان است که می‌تواند در ریاضیات محض و کاربردی مورد استفاده قرار بگیرد. بااین‌وجود، در این کتاب از آن استفاده نخواهیم کرد.

کمی بیشتر درباره مجموعه‌ها

- **مجموعه تهی**

بنیادی‌ترین و شاید عجیب‌ترین مجموعه در ریاضیات مجموعه تهی است که هیچ عضوی ندارد.

تعریف ۱.۲.
مجموعه با هیچ عضو (خالی) را مجموعه تهی گوییم و آن را با $\emptyset$ نمایش می‌دهیم.

ممکن است برای تعریف کردن، عجیب به نظر برسد. مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، پس چه سودی می‌تواند داشته باشد؟ نسبتا شگفت‌انگیز است که این مجموعه اساس شکل‌گیری ایده‌هایی در مورد شمارش شود. در اینجا فرصتی برای تشریح کامل نداریم، اما این مجموعه برای بنیان ریاضیات، ضروری است. اگر علاقه‌مند هستید، کتابی پیشرفته در مورد نظریه مجموعه‌ها یا منطق ببینید.

مثال ۱.۳.
مجموعه $\{\emptyset\}$، مجموعه‌ای شامل مجموعه تهی است. این مجموعه یک عضو دارد. توجه کنید که می‌نویسیم $\emptyset \in \{\emptyset\}$ اما نمی‌توانیم بنویسیم $\emptyset \in \emptyset$، چرا که طبق تعریف، مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.

تعریف ۱.۳.
*دو مجموعه را **مساوی** گوییم، هرگاه عناصر یکسانی داشته باشند. اگر مجموعه X با مجموعه Y مساوی باشد، می‌نویسیم $X = Y$. اگرنه، می‌نویسیم $X \neq Y$.*

مثال ۱.۴.
(آ) *مجموعه‌های $\{۵, ۷, ۱۵\}$ و $\{۷, ۱۵, ۵\}$ مساوی هستند، یعنی*

$$\{۵, ۷, ۱۵\} = \{۷, ۱۵, ۵\}.$$

(ب) *مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳\}$ و $\{۲, ۳\}$ مساوی نیستند، یعنی $\{۲, ۳\} \neq \{۱, ۲, ۳\}$.*

(ج) *مجموعه‌های $\{۲, ۳\}$ و $\{\{۲\}, ۳\}$ مساوی نیستند.*

---

[۴] اثبات این ادعاها فراتر از سطح کتاب است. برای اثبات این ادعا در مورد π، کتاب نظریه گالوا اثر ایان استوارت و برای عدد e، کتاب اصول آنالیز ریاضی اثر والتر رودین را ببینید.

(د) *مجموعه‌های* $\mathbb{R}$ *و* $\mathbb{N}$ *مساوی نیستند.*

همان‌طور که در بالا استفاده شد، اگر نمادی مانند $=$ یا $\in$ داشته باشیم، می‌توانیم عکس آن را با رسم خطی روی آن نشان دهیم مانند $\neq$ و $\notin$.

تعریف ۴.۱.
اگر مجموعه X *تعداد* **متناهی** *عنصر داشته باشد، آنگاه* X *را یک مجموعه متناهی گوییم و در غیر این صورت آن را* **نامتناهی** *می‌نامیم. اگر* X *متناهی باشد، آنگاه تعداد عناصر آن را عدد اصلی* X *گویند و با* $|X|$ *نمایش داده می‌شود.*

اگر X تعداد نامتناهی عنصر داشته باشد، آنگاه سخت است که عدد اصلی X را تعریف کنیم. دلیلش را در فصل ۳۰ خواهیم دید. در اصل، چون بی‌نهایت‌ها، اندازه‌های متفاوتی دارند. فعلا، فقط می‌گوییم که عدد اصلی برای مجموعه‌های نامتناهی تعریف نشده است.

مثال ۵.۱.

(آ) *عدد اصلی مجموعه* $\{\emptyset, ۳, ۴, \text{گربه}\}$*،* ۴ *است.*

(ب) *عدد اصلی مجموعه* $\{\emptyset, ۳, \{\text{گربه و ۴}\}\}$*،* ۳ *است.*

تمرین ۱.۱.
عدد اصلی مجموعه‌های زیر چیست؟

(آ) $\{۱, ۲, ۵, ۴, ۶\}$

(ن) $\Big\{\pi, ۶, \{\pi, ۵, ۸, ۱۰\}\Big\}$

(ب) $\Big\{\pi, ۶, \{\pi, ۵, ۸, ۱۰\}, \{\{۵\}, \text{گربه}, \text{سگ}\}\Big\}$

(و) $\emptyset$

(ج) $\mathbb{N}$

(ه) $\Big\{\emptyset, \text{سگ}\Big\}$

(د) $\Big\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$

(ی) $\Big\{\emptyset, \{۲۰, \pi, \{\emptyset\}\}, ۱۴\Big\}$

حالا تعریف بسیار مهم زیرمجموعه بودن را داریم.

تعریف ۵.۱.
فرض کنید X *یک مجموعه است. مجموعه* Y *زیرمجموعه* X *است اگر هر عضو* Y*، عضوی از* X *باشد و می‌نویسیم* $Y \subseteq X$*. این مانند این است که بگوییم اگر* $x \in Y$*، آنگاه* $x \in X$*.*

مثال ۶.۱.

(آ) *مجموعه* $Y = \Big\{۱, \{۳, ۴\}, \text{موش}\Big\}$ *زیرمجموعه* $X = \Big\{۱, ۲, \text{سگ}, \{۳, ۴\}, \text{موش}\Big\}$ *است.*

(ب) *مجموعه اعداد زوج، زیرمجموعه* $\mathbb{N}$ *است.*

(ج) *مجموعه* $\{۱, ۲, ۳\}$ *زیرمجموعه* $\{۲, ۳, ۴\}$ *یا* $\{۲, ۳\}$ *نیست.*

(د) *برای هر مجموعه* X*،* $X \subseteq X$*.*

(و) *برای هر مجموعه* X*،* $\emptyset \subseteq X$*.*

✍ **توجه ۱.۱.**
تشخیص عضو یک مجموعه بودن و زیرمجموعه یک مجموعه بودن از اهمیت بالایی برخوردار است. بیشتر دانشجویان در این مورد دچار اشتباه می‌شوند. اگر $x \in X$*، آنگاه* $\{x\} \subseteq X$*. به آکولادها توجه کنید. معمولا و تأکید می‌کنم معمولا، اگر* $x \in X$*، آنگاه* $\{x\} \notin X$*، اما گاهی* $\{x\} \in X$*. مثال خاص زیر را ببینید.*

مثال ۷.۱.
مجموعه $X = \Big\{x, \{x\}\Big\}$ *را در نظر بگیرید. پس* $x \in X$ *و* $\{x\} \subseteq X$ *ولی همچنین* $\{x\} \in X$.

بنابراین، نمی‌توان قانون ساده‌ای مانند "اگر $a \in A$، آنگاه اینکه بنویسیم $a \subseteq A$ غلط خواهد بود" را بیان کرد و برعکس.
اگر با مثال قبل اندکی دچار اشتباه می‌شوید، برگردید و در مورد آن بیشتر فکر کنید، تا اینکه آن را واقعا درک کنید. این نوع مثال‌های پیش‌پا افتاده و روشن که مقابل درک مستقیم قرار می‌گیرند و از استفاده احکام ساده جلوگیری می‌کنند، یک بحث مهم از ریاضی پیشرفته هستند.

تعریف ۶.۱.
زیر مجموعه Y از X، **زیرمجموعه سره** *X نامیده می‌شود، هرگاه Y با X مساوی نباشد. این را با $Y \subset X$ نمایش می‌دهیم. برخی از $Y \subsetneq X$ استفاده می‌کنند.*

مثال ۸.۱.
(آ) *مجموعه* $\{۱,۲,۵\}$ *یک زیرمجموعه سره از* $\{-۶,۰,۱,۲,۳,۵\}$ *است.*

(ب) *برای هر مجموعه X، X زیرمجموعه سره X نیست.*

(ج) *برای هر مجموعه $X \neq \emptyset$، مجموعه $\emptyset$ یک زیرمجموعه سره X است.*

توجه کنید، اگر $X = \emptyset$، آنگاه مجموعه $\emptyset$ نمی‌تواند زیرمجموعه سره X باشد.

(د) *برای مجموعه اعداد داریم،* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

توجه داشته باشید که می‌توان از نمادهای $\nsubseteq$ برای نمایش "زیرمجموعه نبودن" استفاده کرد.

توجه دشته باشید نمادگذاری از کجا می‌آید. روشن است که برای یک مجموعه متناهی دو گزاره اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $|X| \leqslant |Y|$، و اگر $X \subset Y$، آنگاه $|X| < |Y|$، درست هستند. بنابراین $\subseteq$ با $\leqslant$ و $\subset$ با $<$ نه تنها از نظر نمادها بلکه مفاهیم نیز مشابه هستند.
نکته مهمی که اینجا باید توجه کرد این است که همه ریاضی‌دانان بین $\subseteq$ و $\subset$ تمایز قائل نیستند. بعضی تنها از $\subset$ به معنی "زیرمجموعه" استفاده می‌کنند. هر چند احساس می‌کنم استفاده از $\subseteq$ بسیار بهتر است، چون باعث تمایز بین زیرمجموعه و زیرمجموعه سره می‌شود.
تصور کنید اگر تنها از $\subset$ استفاده کنیم دو گزاره بالا مشابه می‌شوند. آن‌ها خیلی روشن نیستند و یکی از آن دو درست نیست؛ تصور کنید چه اتفاقی رخ می‌دهد اگر ریاضی‌دانان همیشه از $<$ به جای $\leqslant$ استفاده کنند!

•تعریف مجموعه‌ها

می‌توان مجموعه‌ها را با استفاده از یک نماد متفاوت تعریف کرد:

$$\Big\{x | \text{ در خاصیت } p \text{ صدق کند } x\Big\}.$$

نماد "|"، "به‌طوری‌که" خوانده می‌شود. گاهی نشان " : " به جای "|" استفاده می‌شود.

مثال ۹.۱.
(آ) *مجموعه* $\{x | x \in \mathbb{N}, x < ۵\}$ *با* $\{۱,۲,۳,۴\}$ *مساوی است.*
آن را چنین می‌خوانیم، مجموعه "xهایی که x در $\mathbb{N}$ است و x کمتر از ۵ است."

(ب) *مجموعه* $\{x \mid ۵ \leqslant x \leqslant ۱۰\}$ *مجموعه اعداد بین ۵ و ۱۰ است. پس قرار است که x را یک عدد حقیقی فرض کنیم. این قرارداد بدی است و باعث بی‌نظمی نویسندگان می‌شود، باید استفاده از این قرارداد را کنار بگذاریم. بنابراین، می‌توان قبل از نماد |، مانند مثال بعد محدودیت‌هایی روی x تعیین کرد.*

(ج) *مجموعه‌ی* $\{x \in \mathbb{N} | ۵ \leqslant x \leqslant ۱۰\}$، *مجموعه اعداد طبیعی از ۵ تا ۱۰ را شامل می‌شود که مجموعه* $\{۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ *است.*

(د) *معمول است که نماد* $[a, b]$ *را برای مجموعه* $\{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$ *و* (a, b) *را برای مجموعه* $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ *به کار ببریم.*

توجه کنید (a, b) *می‌تواند به معنی زوج مرتب اعداد* a *و* b *نیز باشد.*

مجموعه‌ها را به‌صورت زیر نیز می‌شود توصیف کرد. $\{x^۲ | x \in \mathbb{N}\}$، مجموعه اعداد $\{۱, ۴, ۹, ۱۶, \cdots\}$ است. راه‌های زیادی برای توصیف مجموعه‌ها وجود دارد که معمولاً مقصود را روشن می‌کند.

اعمال بر مجموعه‌ها

در ریاضیات، اغلب یک تعریف، از تعدادی شی ساخته می‌شود، برای مثال یک مجموعه، و سپس روش‌هایی برای تعریف چیزی جدید با استفاده از قدیمی‌ها ایجاد می‌کنیم؛ برای مثال زیرمجموعه‌ها از مجموعه‌ها ساخته می‌شوند. حال به اشتراک و اجتماع، به‌عنوان دو روش برای ساخت چیزی نو از قبلی‌ها می‌رسیم.

تعریف ۱.۷.
فرض کنید که X *و* Y *دو مجموعه هستند.* **اجتماع** X *و* Y *که با* $X \bigcup Y$ *نشان داده می‌شود، مجموعه‌ای است شامل اعضایی که در* X *یا* Y *یا در هر دو هستند. می‌توان آن را به‌صورت* $X \bigcup Y = \Big\{x | x \in X \text{ یا } x \in Y\Big\}$ *تعریف کرد.*

مثال ۱.۱۰.

(آ) *اجتماع* $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ *و* $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$، *مجموعه* $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸\}$ *است.*

(ب) *اجتماع* $\{x \in \mathbb{R} | x < ۵\}$ *و* $\{x \in \mathbb{Z} | x < ۸\}$، *مجموعه* $\{x \in \mathbb{R} | x \leq ۵ \text{ یا } x = ۶ \text{ یا } x = ۷\}$ *است.*

تمرین ۱.۲.

(آ) *فرض کنید* $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ *و* $Y = \{-۱, ۱, ۳, ۵, ۷\}$. $X \bigcup Y$ *را بیابید.*

(ب) *مجموعه* $\mathbb{Z} \bigcup \mathbb{Z}$ چیست؟

تعریف ۱.۸.
فرض کنید X *و* Y *دو مجموعه هستند.* **اشتراک** X *و* Y *که با* $X \bigcap Y$ *نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است شامل اعضایی که هم در* X *و هم در* Y *هستند. می‌توان آن را به‌صورت* $X \bigcap Y = \Big\{x | x \in X \text{ و } x \in Y\Big\}$ *نیز تعریف کرد.*

مثال ۱.۱۱.

(آ) *اشتراک* $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ *و* $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$، $\{۲, ۴\}$ *است.*

(ب) *اشتراک* $\{-۱, -۲, -۳, -۴, -۵\}$ *و* $\emptyset$، $\emptyset$ *است.*

تمرین ۱.۳.

(آ) *مجموعه* $X \bigcap Y$ *را برای موارد زیر بیابید:*

(۱) $X = \{x \in \mathbb{R} | ۰ \leq x < ۶\}$ *و* $Y = \{x \in \mathbb{Z} | -\pi \leq x \leq ۷\}$،

(۲) $X = \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸\}$ *و* $Y = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$،

(۳) $X = \mathbb{Q}$ *و* $Y = \{۰, ۱, \pi, ۵\}$.

(ب) *مجموعه‌های* $\mathbb{Z} \bigcap \mathbb{Z}$، $\mathbb{Z} \bigcap \mathbb{Q}$ *و* $\mathbb{Z} \bigcap \mathbb{R}$ *را بیابید.*

در فصل‌های بعد، از این تعریف‌ها برای بیان مثال‌هایی از گزاره‌هایی همچون $X\bigcap(Y\bigcup\mathbb{Z})=(X\bigcap Y)\bigcup(X\bigcap\mathbb{Z})$ استفاده خواهیم کرد.

تمرین ۴.۱.
اجتماع و اشتراک $\{x\in\mathbb{R}|x>۷\}$ *و* $\{x\in\mathbb{N}|x>۵\}$ *را بیابید.*

تعریف ۹.۱.
تفاضل X و Y، که با $X\setminus Y$ نمایش داده می‌شود، مجموعه اعضایی است که در X هستند ولی در Y نیستند.

درواقع اعضای X را در نظر می‌گیریم و همه آن‌هایی که در Y هستند را دور می‌ریزیم. نیازی نیست که Y زیرمجموعه X باشد. اگر Y زیرمجموعه X باشد، اغلب $X\setminus Y$ را متمم Y در X می‌نامیم و آن را با Y^c نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۲.۱.
(آ) *فرض کنید* $X=\{۱,۲,۳$ *،سگ، گربه*$\}$ *و* $Y=\{$*موش، گربه*$،۳\}$ *بنابراین* $X\setminus Y=\{۱,۲$ *،سگ*$\}$.

(ب) *فرض کنید* $X=\mathbb{R}$ *و* $Y=\mathbb{Z}$*، بنابراین*

$$X\setminus Y=\cdots\cup(-۳,-۲)\cup(-۲,-۱)\cup(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲)\cup\cdots.$$

حاصل‌ضرب مجموعه‌ها

حاصل‌ضرب مجموعه‌ها، مثال دیگری از ساخت چیزی جدید با استفاده از قدیمی‌ها توسط ریاضی‌دانان است.

تعریف ۱۰.۱.
فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. **حاصل‌ضرب** *X و Y که با $X\times Y$ نمایش داده می‌شود، مجموعه همه زوج‌های (x,y) است که $x\in X$ و $y\in Y$، یعنی*

$$X\times Y=\Big\{(x,y)|x\in X \text{ و } y\in Y\Big\}.$$

توجه کنید که (x,y) اینجا یک زوج است و ارتباطی با قسمت د مثال ۹.۱ ندارد.

مثال ۱۳.۱.
(آ) *فرض کنید* $X=\{۰,۱\}$ *و* $Y=\{۱,۲,۳\}$*. بنابراین* $X\times Y$ *شش عضو دارد.*

$$X\times Y=\Big\{(۰,۱),(۰,۲),(۰,۳),(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳)\Big\}.$$

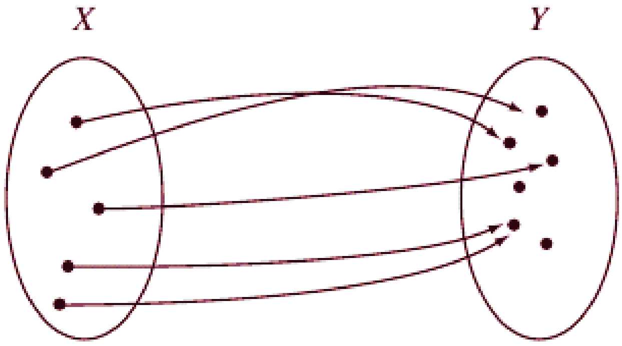
(ب) *مجموعه $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}^۲$ نمایش داده می‌شود. مجموعه $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}^۳$ نمایش داده می‌شود. به این دلیل که اعضایش می‌تواند به‌شکل سه تایی‌ها از اعداد حقیقی بیان شوند. یعنی اعضای آن به‌شکل (x,y,z) هستند که x، y و z اعداد حقیقی می‌باشند.*

توجه کنید که $X\times Y$ زیرمجموعه هیچ یک از X و Y نیست.

نگاشت‌ها و توابع

مجموعه‌ها تعریف شدند. اینک تعریفی برای ارتباط‌دادن اعضای مجموعه‌ها با اعضای مجموعه‌های دیگر ساخته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.
فرض کنید X و Y مجموعه هستند. یک **تابع** *یا* **نگاشت** *از X به Y یک پیوند بین اعضای مجموعه‌هاست. دقیق‌تر اینکه برای هر عضو از X، عضوی یکتا از Y وجود دارد.*



شکل ۱.۱: یک تابع از X به Y.

اگر f یک تابع از X به Y باشد، آنگاه می‌نویسیم $f : X \longrightarrow Y$، و عضو یکتایی از Y که با x پیوند می‌خورد با $f(x)$ نمایش داده می‌شود. این عضو **مقدار** x **تحت** f نامیده می‌شود یا یک مقدار f گفته می‌شود. مجموعه X، **منبع** (یا **دامنه‌ی**) f نامیده می‌شود و Y، **هدف** (یا **هم‌دامنه**) f گفته می‌شود.

برای توصیف تابع f معمولا یک قانون استفاده می‌شود که $f(x)$ را برای هر x تعریف می‌کند و در مورد رساندن f به اعضای یک مجموعه، یا به یک مجموعه کمک می‌کند.

یک تصویر کلی در شکل ۱.۱ نشان داده شده است. توجه کنید که هر عضو باید به یکی در Y مرتبط شود اما نه برعکس، یعنی ممکن است دو عضو مجزا از X به یک عضو یکسان در Y نگاشته شوند.

مثال ۱۴.۱.

(آ) *فرض کنید $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ برای هر $x \in X$، با $f(x) = x^۲$ تعریف شده باشد. آنگاه مقدار x تحت f، مربع x است. توجه کنید که اعضایی در هم‌دامنه وجود دارند که مقادیر f نیستند. برای مثال ۱− یک مقدار f نیست چون که هیچ عدد صحیحی مانند x وجود ندارد که $x^۲ = -۱$.*

(ب) *فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = ۰$ داده شده باشد. پس تنها مقدار f، صفر است.*

(ج) *عدد اصلی یک مجموعه، یک تابع روی مجموعه‌های متناهی است که به شکل*

$$|\ | : \text{مجموعه‌های متناهی} \longrightarrow \{۰\} \cup \mathbb{N}$$

است. توجه کنید که نیاز است ۰ در هم‌دامنه باشد در غیر این صورت مجموعه نمی‌تواند تهی باشد.

(د) *نگاشت همانی روی X نگاشت $I : X \longrightarrow X$ است که برای هر $x \in X$ با $I(x) = x$ داده شده است.*

مثال بعد نشان می‌دهد که داشتن یک فرمول، الزاما یک تابع را تعریف نمی‌کند.

مثال ۱۵.۱.

فرمول $f(x) = \dfrac{۱}{x-۱}$ تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف نمی‌کند. چرا که در $x = ۱$ تعریف نشده است.

با محدود کردن دامنه به $\mathbb{R}$ بدون عدد ۱ می‌توان تابع را تعریف کرد. یعنی دامنه را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq ۱\right\},$$

آنگاه $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = \dfrac{۱}{(x-۱)}$ یک تابع تعریف می‌کند.

چندجمله‌ای‌ها، مرجع خوبی از مثال‌ها برای توابع فراهم می‌کنند.

مثال ۱۶.۱.

(آ) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ برای هر $x \in X$، داده شده است. دوباره توجه کنیم، هر چند هم‌دامنه، همه $\mathbb{R}$ است؛ اما هر عضو از آن یک مقدار f نیست. برای مثال، هیچ xی وجود ندارد که $f(x) = -۲$ باشد. این را می‌توانید با حل $x^۲ + ۲x + ۳ = -۲$ بررسی کنید.

(ب) به‌طورکلی به کمک چندجمله‌ای می‌توان تابع f را با

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰,$$

برای برخی اعداد حقیقی $a_۰ , \cdots , a_n$ و متغیر حقیقی x، تعریف کرد.

(ج) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، برای مثال یک چندجمله‌ای باشد. آنگاه مشتق که با f' نمایش داده می‌شود نیز یک تابع است.

تمرین ۵.۱.

(آ) بزرگترین دامنه‌ای که $f(x) = \dfrac{x}{x^۲ - ۵x + ۳}$ را یک تابع می‌سازد، بیابید.

(ب) بزرگترین دامنه‌ای که $f(x) = \dfrac{x^۳ + ۲}{x^۲ + x + ۲}$ را یک تابع می‌سازد، بیابید.

(ج) یک مثال از چندجمله‌ای‌ها بسازید که نمودارش از نقاط $(-۱, ۵)$ و $(۲-, ۳)$ بگذرد.

تمرین

۱. فرض کنید $X = \{x \in \mathbb{Z} | ۰ \leqslant x \leqslant ۱۰\}$ و A و B زیرمجموعه‌هایی باشند که $A = \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ و $B = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$. دراین‌صورت $A \bigcap B$، $A \bigcup B$، $A - B$، $B - A$، $A \times B$، $X \times B$، A^c و B^c را بیابید.

۲. اجتماع و اشتراک مجموعه‌های

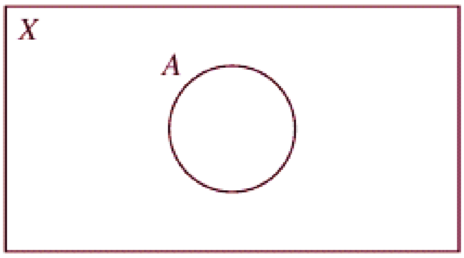
$\{x \in \mathbb{R} | x^۲ - ۹x + ۱۴ = ۰\}$ و $\left\{y \in \mathbb{Z} \middle| ۲ \leqslant y < ۱۰\right\}$ را بیابید.

۳. فرض کنید A، B و Cزیرمجموعه‌های X هستند. با استفاده از مثال‌هایی از این مجموعه‌ها قسمت‌های زیر را بررسی کنید:

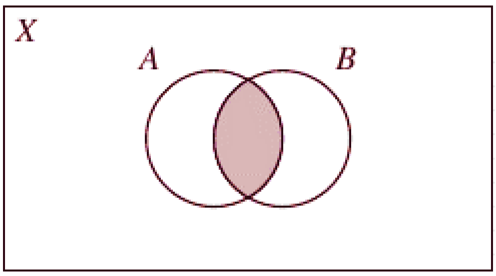
(آ) $(A \cap B) \bigcup (A \cap C)$ و $A \bigcap (B \cup C)$.
(ب) $(A \cup B) \bigcap (A \cup C)$ و $A \bigcup (B \cap C)$.
(ج) $(A \cup B)^c$ و $A^c \bigcap B^c$.
(د) $(A \cup B)^c$ و $A^c \bigcup B^c$.
(و) $(A \cap B)^c$ و $A^c \bigcup B^c$.
(ه) $(A \cap B)^c$ و $A^c \bigcap B^c$.

آیا متوجه چیزی شدید؟

۴. **نمودار ون** برای نمایش دادن مجموعه‌ها مفید است. اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه می‌توان شکل زیر را رسم کرد.



در حقیقت، تعیین شکل A، اهمیت ندارد. اما اغلب از یک دایره استفاده می‌شود. اگر B زیرمجموعه دیگری باشد، آنگاه می‌توان B را نیز در نمودار رسم کرد. در شکل زیر تقاطع $A \cap B$، تیره شده است.



(آ) برای حالتی که A و B اشتراکی ندارند نمودار ون را رسم کنید.
(ب) نمودارهای ونی رسم کنید و مجموعه‌های $A \cup B$، A^c و $(A \cap B)^c$ را تیره نمایید.
(ج) سه دایره‌ی (متقاطع) برای نمایش سه مجموعه A، B و C رسم کنید. تقاطع $A \cap B \cap C$ را تیره نمایید.
(د) با استفاده از تمرین ۳ نمودارهای ونی را رسم نمایید و مجموعه‌های مربوط را تیره نمایید.

۵.چگونگی مطالعه‌ی این فصل را بررسی کنید.

(آ) اگر قبلا به آنچه در این فصل آمد برخورد نکرده‌اید، آیا برای اینکه همه چیز را در مورد آن درک کنید تلاش کردید؟
(ب) اگر قبلا به کلیت این فصل برخورد کرده‌اید، آیا بررسی کردید اشتباهی نکرده باشید؟

چکیده

- یک مجموعه، گردایه‌ای خوش‌تعریف از چیزهاست.
- مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.
- عدد اصلی یک مجموعه متناهی، تعداد اعضای آن مجموعه است.
- مجموعه Y زیرمجموعه X است، هرگاه هر عضو Y در X باشد.
- زیرمجموعه Y از X یک زیرمجموعه سره است، هرگاه با X مساوی نباشد.
- اجتماع X و Y، گردایه‌ای از اعضایی است که در X یا Y هستند.
- اشتراک X و Y، گردایه‌ای از اعضایی است که هم در X و هم در Y هستند.
- حاصل‌ضرب X و Y، مجموعه همه جفت‌های (x, y) است که $x \in X$ و $y \in Y$.
- یک تابع، اعضای یک مجموعه را به مجموعه دیگری ارجاع می‌دهد.

فصل ۲

مطالعه ریاضیات

هر چیزی که می‌خوانید باور نکنید.

”آنون[۱]“

روشن است که قادر به خواندن هستید و احتمالا، طی یک دوره کسبِ مهارت‌های مطالعه برای اهداف دانشگاهی، روش‌های خواندن به شما آموزش داده شده است. خواندن ریاضیات نیاز به ریزبینی و مهارت‌های خاصی دارد که متأسفانه در کلاس‌ها و منابع آموزشی روش‌های مطالعه، فراموش شده است. برای مثال، سریع‌خوانی به‌عنوان یک روش ارزشمند یادگیری در بسیاری از رشته‌ها توصیه می‌شود؛ بااین‌وجود در ریاضیات سریع‌خواندن روش مناسبی نیست، ریاضیات کمتر به‌شکل رونویسی است، صفات اضافیِ اندکی دارد، هر واژه و کلام مهم است و ممکن است حذف آن‌ها منجر به بدفهمی و یا نادرستی شود.

نکات و راهنمایی‌هایی که در اینجا ارائه می‌شود نه تنها یک فهرست سفت و سخت از دستورالعمل‌هانیست، بلکه دربرگیرنده روشی اصولی برای تقسیم فرآیند خواندن به بخش‌های قابل درک و پیشنهادهای عملی است. نکات اصلی به شرح زیر است:

- در روشهای درس خواندن انعطاف داشته باشید؛ یک موضوع را به روش‌های مختلفی بخوانید.
- خواندن باید یک فرآیند پویا باشد و شما نیز باید فعال باشید نه منفعل؛ خواننده باید در هنگام درس‌خواندن یک کاغذ به همراه داشته باشد، متن را بررسی کند و هر ادعایی از نویسنده را اثبات کند.

تفکر در بسیاری از سایر موضوعات دیگر، نظیر جامعه‌شناسی و تاریخ متفاوت است. بررسی جزئیات هم‌زمان با پیش‌رفتن ضروری است. در تاریخ (با فرض اینکه ماشین زمانی در اختیار شما نیست) نمی‌توانید بررسی کنید که ۵۵ سال قبل از میلاد، سزار به بریتانیا حمله کرده است! فقط می‌توانید آنچه را دیگران در مورد کارهای او مدعی شده‌اند، بررسی کنید. در ریاضیات درستی حقایق را می‌توانید و باید بررسی کنید.

در ادامه نه‌تنها از کتاب‌ها بلکه از یادداشت‌ها، سخنرانی‌ها و صفحات وب نیز استفاده می‌کنیم، اما برای شرح ساده‌تر فقط به کتاب‌ها ارجاع می‌دهیم. نکاتی درباره شرایطی خاص در خواندن یک تعریف، قضیه[۲] یا اثبات در فصل بعد بیان می‌شود.

---

[۱] *Anon*

[۲] قضیه، یک گزاره درست ریاضی است، در بخش سه به بیان جزئیات بیشتری در مورد قضیه‌ها می‌پردازیم.

پیشنهادهای اساسی مطالعه

- **هدفمند بخوانید.**

هدف اصلی مطالعه، آموختن است. اما ممکن است قصد ، اثبات، تاکید،روشن سازی یا بررسی اجمالی مطالب کلی باشد.
قبل از مطالعه دقیقا مشخص کنید که باتوجه به متن چه چیزی خواسته شده است. ممکن است یادگیری یک تعریف خاص یا چگونگی حل نوع خاصی از یک مسئله مانند محاسبه انتگرالِ حاصلضرب دو تابع، هدف باشد. هدف، هرچه باشد! نباید به امید اینکه همه چیز هنگام مطالعه مشخص شود، شروع به خواندن کنید.
فصل قبلی کتاب را چگونه خوانده‌اید؟ چه اهدافی داشتید؟ آیا از ابتدا طرحی از آنچه که اکنون می‌دانید در نظر داشتید؟ آیا می‌خواستید جزئیات را تا جایی ادامه دهید که اطمینان یابید همه چیز را می‌دانید؟ پاسخ‌دادن به چنین سؤالاتی بینشی به شما می‌دهد که بدانید در هنگام مطالعه واقعا به چه چیزی نیاز دارید.

- **کتابی با سطح مناسب انتخاب کنید.**

برخی کتاب‌ها خوب نوشته نشده‌اند و برخی ممکن است برای سبک یادگیری شما مناسب نباشند. در انتخاب یک کتاب دو نکته مرتبط با هم را باید در نظر گرفت. هر کتاب برای یک مخاطب و یک هدف خاص نوشته شده است. ممکن است شما مخاطب این کتاب نباشید یا هدف شما متفاوت از هدف کتابی باشد که برای آموزش یک مبتدی یا به‌عنوان یک مرجع تخصصی نوشته شده است.
از سوی دیگر نمی‌توان کتاب‌های کاملا تخصصی را به‌طور کامل نادیده گرفت، زیرا فصل‌های اولیه چنین کتاب‌هایی چکیده سودمندی از کتاب‌های غیر تخصصی هستند.

- **با کاغذ و قلم درس بخوانید.**

فعال باشید و با در دست داشتن کاغذ و قلم درس بخوانید. اولین دلیل برای همراه داشتن کاغذ و قلم، این است که از آنچه می‌خوانید نکته‌برداری کنید. به‌ویژه آنچه معنی می‌دهد، نه آنچه گفته می‌شود. همچنین برای ثبت ایده‌هایی که به ذهنتان می‌رسد. وقتی کتابی را برای بار اول می‌خوانید یادداشت برداری نکنید، زیرا امکان دارد بدون اینکه بفهمید نسخه‌برداری کرده باشید.
دومین دلیل خیلی مهم است. قضیه‌ها و فرمول‌ها را می‌توانید با مثال‌ها یا با رسم اشکال هندسی مانند رسم نمودارها و با حل کردن بررسی کنید. حتی می‌توانید پرسش‌هایی را مطرح کنید. این کار شکل مهمی از اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان است. فیزیک‌دانان و شیمی‌دانان دارای تجربیات آزمایشگاهی هستند، این شیوه بررسی‌ها تجربه ریاضی‌دانان است.
خواندن با کاغذ و قلم در این مرحله چیزی متفاوت بااستفاده از ماژیک‌های فسفری برای پررنگ کردن است. وقتی از چنین قلم‌هایی استفاده می‌کنید همواره تمایل دارید که هر جمله‌ای را پررنگ کنید. بنابراین تا زمان خلاصه کردن متن صبور باشید.

- **متون ریاضی را مانند داستان نخوانید.**

ریاضیات را مانند داستان نخوانید. مجبور نیستید که مطالب را از شروع تا پایان و یک‌باره یا به‌ترتیب ارائه شده در کتاب بخوانید. کاملا قابل درک است که گاهی عمیق و گاهی سطحی بخوانید. مشخص کنید چه مواردی با موضوع مورد مطالعه شما مرتبط است. گاهی از صفحه‌ای به صفحه دیگر بروید. شاید این پیشنهاد شگفت‌انگیزی باشد که با وجود اینکه ریاضیات یک موضوع خطی است و هر ایده‌ای از روی ایده‌های قبل ساخته می‌شود؛ ولی مطمئن باشید مفاهیم نه به‌شکل خطی تولید و نه آموخته می‌شوند.
این واقعیت را در نظر بگیرید مفاهیمی که توسط پیشگامان و متخصصان یک موضوع ارائه می‌شود، به‌نحوی ساخته و پرداخته می‌شود که برای استفاده عموم قابل فهم باشد.
احتمالا متوجه شده‌اید که برای فهمیدن یک مطلب باید به مطالب قبل و بعد مراجعه کنید. علاوه‌براین بعید است که همه جزئیات را با یک‌بار خواندن بفهمید، گاهی قبل از روشن شدن یک موضوع ناگزیر هستید که چند مرتبه آن را بخوانید.

•یک روش اصولی

اینک یک روش اصولی پنج مرحله‌ای برای درگیر شدن با یک متن طولانی ارائه می‌دهیم.

۱. نگاهی اجمالی بیندازید و موارد مهم را مشخص کنید.

۲. سوال بپرسید.

۳. کل متن را با دقت بخوانید، اگر مایل بودید ابتدا احکام و سپس اثبات‌ها را بخوانید.

۴. فعال باشید، یعنی متن را بررسی کنید و تمرین‌ها را انجام دهید.

۵. بیندیشید.

این ساده‌ترین روش مطالعه است، با این که شماره‌گذاری شده است ولی لزومی ندارد که چشم‌بسته تقلید کنید و ترتیب را رعایت کنید. گاهی لازم است انعطاف داشته باشید و از بخشی به بخش دیگر (که به موضوع مرتبط است) مراجعه کنید.

•نگاه اجمالی

ابتدا برای یافتن دیدگاه کلی، نگاه مختصری به متن بیندازید.
اغلب در کتاب‌های مربوط به مهارت‌های مطالعه به دانشجویان پیشنهاد می‌شود که برای دریافت نتایج اصلی دو فصل شروع و پایان کتاب را بخوانند. این روش معمولا در کتاب‌های ریاضی کاربرد ندارد، زیرا کتاب‌های ریاضی به‌این‌صورت خلاصه نمی‌شوند ولی ارزشمند است که این کار را نیز انجام دهید.
آیا این روش را در فصل اول به کار گرفته‌اید؟ اگر این کار را انجام دهید می‌توان گفت نکات اصلی فصل اول مجموعه‌ها، اعداد، اعمال روی مجموعه‌ها (مانند اجتماع و اشتراک)، توابع و چندجمله‌ای‌ها هستند.

•موارد مهم را مشخص کنید.

در یک مطالعه دقیق‌تر و البته بدون پرداختن به جزئیات خیلی ریز، نکات مهمی مشخص می‌شود. در جستجوی فرضیه‌ها، تعریف‌ها، قضیه‌ها و مثال‌هایی باشید که به‌طور مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا این‌ها کلید روشن‌شدن موضوع هستند. اگر تعریفی چندبار در گزاره‌ها تکرار شد یعنی مهم است، پس آن را بخوانید (البته با دقت!).
به‌عنوان‌مثال، در فصل اول، به نظر می‌رسد که مجموعه تهی مهم باشد. همچنین ضرورت تمایز بین $\subset$ و $\in$، به‌ویژه تفاوت ظریف آن‌ها، بااهمیت است.
در جستجوی قضیه‌ها و فرمول‌هایی باشید که به شما فرصت محاسبه می‌دهند، زیرا برای درک یک موضوع، محاسبه روشی مؤثر است. مکث کنید و دوباره آخرین جمله را بخوانید، فکر می‌کنم این یکی از مفیدترین نکاتی باشد که به من مشاوره داده شده است. اغلب وقتی در تلاش برای دانستن برخی نظریات هستم، سعی می‌کنم به کمک محاسبات آن را درک کنم. توجه داشته باشید مواردی که برای محاسبه در اختیار شما قرار می‌گیرند خیلی مهم هستند.
در فصل اول روشن‌ترین مفهوم محاسباتی، عدد اصلی یک مجموعه بود، بااین‌وجود در هیچ قضیه‌ای نمایان نشد. صرف‌نظر از این، باید آن را به‌عنوان چیزی که بعدا مورد استفاده قرار می‌گیرد در نظر گرفت، زیرا شامل محاسبات احتمالی است. در فصل ۵، به محاسبات مربوط به عدد اصلی خواهیم پرداخت.
مثال‌هایی خیلی معمولی‌تر در این زمینه قواعد، مشتق حاصلضرب، مشتق زنجیره‌ای و غیره در حسابان است. این قوانین به ما کمک می‌کنند تا مشتق توابع را بدون استفاده از تعریف (که کار کردن با آن سخت است) محاسبه کنیم.

•سؤال بپرسید.

در این مرحله طرح پرسش‌هایی در مورد متن سودمند است. مثلا چرا نظریه به این تعریف یا قضیه خاص وابسته است؟ نتیجه مهم حاصل از این متن چیست و چگونه به این نتیجه منجر می‌شود؟ فهرستی کامل از آنچه از متن انتظار دارید را به کمک پرسش‌هایتان می‌توانید فراهم کنید.

نکته اصلی متن، فراهم کردن زمینه برای مواردی است که درادامه به‌عنوان مثال به کار می‌بریم.

- **مطالعه‌ی دقیق**

اینک زمانی است که متعهد شوید دقیق بخوانید. این دقیق‌خوانی باید اصولی، همراه با تفکر، انجام تمرین و حل مسئله باشد.

مطالعه، چیزی فراتر از خواندن واژه‌هاست. باید به معانی آنچه می‌خوانید بیندیشید. به‌ویژه باید از دانستن معانی هر کلمه و نشانه‌ای که می‌خوانید اطمینان حاصل کنید. اگر نمی‌دانید یا فراموش کرده‌اید به عقب برگردید و آن را پیدا کنید.

به‌عنوان‌مثال، ضروری است که با دقت بخوانید تا اطمینان بیابید که تفاوت بین یک مجموعه و عضوی از یک مجموعه را به‌درستی درک کرده‌اید.

- **به‌طور متناوب برای مرور کردن توقف کنید.**

سعی کنید در هر بار مطالعه، مطالب زیادی نخوانید. به‌طور مداوم مکث کنید، آنچه را خوانده‌اید مرور کنید و در مورد آن بیندیشید. درباره‌ی یک تصویر کلی از موضوع فکر کنید. به کجا می‌رویم و چگونه یک نتیجه مشخص ما را به آنجا می‌برد؟

- **ابتدا گزاره‌ها و سپس اثبات‌ها را بخوانید.**

بسیاری از متون ریاضی به‌شکلی نوشته شده‌اند که برای بار اول می‌توان اثبات‌ها را نادیده گرفت. البته به این معنی نیست که اثبات‌ها کم اهمیت هستند، آن‌ها در قلب ریاضیات جا دارند، اما معمولا، نه همیشه! می‌توان بعدا آن‌ها را خواند. در برخی موارد باید با اثبات‌ها درگیر شوید.

هیچ اثباتی در فصل قبل نبود، نگران نباشید در ادامه اثبات‌های زیادی در این کتاب معرفی می‌کنیم.

- **متن را بررسی کنید.**

ضرورت بررسی متن منجر به همراه داشتن کاغذ و قلم می‌شود. به دو دلیل به کاغذ و قلم نیاز دارید؛ اول اینکه برای پرکردن شکاف‌هایی که توسط نویسنده به‌جا مانده است و اغلب با عبارت هایی نظیر « با یک محاسبه مستقیم» یا « جزئیات به خواننده واگذار می شود» مواجه می‌شویم. در چنین مواقعی، آن محاسبه را انجام دهید یا آن جزئیات را بیان کنید. درحقیقت این کار به شما کمک می‌کند که عمق مفهوم را درک کنید.

به‌عنوان‌مثال در صفحه ۹ از فصل اول گفته‌ام « روشن است که..... اگر $X \subset Y$، آنگاه $|X| \leq |Y|$. » آیا بررسی کردید که ببینید آیا واقعا روشن است؟ آیا سعی نمودید که چند مثال برای آن ارائه دهید؟

به‌طور مشابه آیا روی حقایق غیرشهودی مانند این حقیقت که ممکن است به‌طور هم زمان داشته باشیم $\{x\} \in X$ و $\{x\} \subset X$ تمرکز کرده‌اید؟

دومین دلیل این است که بدانیم چگونه قضیه‌ها، فرمول‌ها و غیره به کار گرفته می‌شوند. اگر متن می‌گوید از قضیه ۵.۳ یا فرمول Y استفاده شده است، آنگاه بررسی کنید که آیا می‌توان قضیه ۵.۳ را به کار برد یا ببینید در این حالت در قضیه ۵.۳ چه اتفاقی رخ می‌دهد. به همین ترتیب فرمول‌ها را اثبات کنید و شکاک باشید؛ به سادگی حرف‌های نویسنده را نپذیرید.

- **تمرین‌ها و مسئله‌ها را حل کنید.**

اکثر کتاب‌های ریاضی امروزی شامل تمرین و مسئله هستند. بیان اینکه حل تمرین‌ها چقدر مهم است کار سختی است. ریاضی یک فعالیت است. فکر نکنید که ریاضی می‌خوانید بلکه فکر کنید که ریاضی را انجام می‌دهید.

فرض کنید شما دارای عضلات ریاضی هستید، رشد آن‌ها به تمرین نیاز دارد. خواندن منفعلانه مانند تماشای تمرین وزنه برداری سایرین است، این کار عضلات شما را نمی‌سازد. مجبورید که تمرین کنید.

به‌علاوه اینکه چیزی را فقط بخوانید به‌معنای درست‌فهمیدن آن نیست. پاسخ‌دادن به تمرین‌ها و مسئله‌ها، اشتباهات و بدفهمی‌های شما را مشخص می‌کند . همیشه از دانشجویان می‌شنوم که آن‌ها می‌توانند یک موضوع را بفهمند، اما نمی‌توانند تمرین‌ها را انجام دهند یا نمی‌توانند مواردی را به کار ببرند . اساس این است: اگر نمی‌توانم تمرین‌ها را انجام دهم، پس

موضوع را درک نکرده‌ام.

•اندیشیدن

برای درک کامل چیزی، باید آن را با داشته‌های قبلی مرتبط سازیم. آیا این با چیز دیگری مشابه است؟ به‌عنوان‌مثال، توجه کنید که نشانه $\subset$ وقتی که با نشانه $\leq$ مقایسه می‌شود، چه مفهومی را می‌رساند؟ عدد اصلی را ببینید. آیا می‌توانید فکر کنید که اجتماع و اشتراک چه شباهتی می‌توانند داشته باشند؟

سوال دیگر این است که این چه چیزی می‌گوید یا اجازه انجام چه کاری را می‌دهد که دیگری نمی‌دهد؟ به‌عنوان‌مثال مجموعه توابع (چیزی که توضیح داده نشده است اما در فصل اول به آن اشاره شد.) اجازه می‌دهند که مجموعه‌ها را به هم ارتباط دهیم. عدد اصلی اجازه می‌دهد که درباره اندازه نسبی مجموعه‌ها صحبت کنیم. بنابراین وقتی با یک موضوع مواجه می‌شوید بپرسید: این اجازه انجام چه کاری را می‌دهد؟

آنچه در ادامه باید انجام داد.

•دوباره و دوباره نخوانید، پیش بروید.

بعید است که خواندن بیش از حد یک متن پیچیده به فهمیدن آن منجر شود. اگر مطلبی را دوباره می‌خوانید، احتمالا، نشاندهنده فعالیت کم شماست. بنابراین چند تمرین حل کنید و چند پرسش مطرح کنید.

اگر نتوانستید چنین کنید، وقت آن است که یک روش جایگزین را جست‌وجو کنید. به‌عنوان‌مثال از کتاب دیگری کمک بگیرید. در نهایت باید صرف‌نظر کرد و به بخش بعد رفت. همواره می‌توان به عقب بازگشت.

با رفتن به قسمت بعد، ممکن است در درک مفاهیم بعدی نیز با مشکل مواجه شوید. اما ممکن است با روشن شدن چند قسمت مهم بعدی، آن متن پیچیده نیز قابل فهم شود.

ریاضیات موضوعی است که درک و فهم آن نیازمند زمان است. ایده‌ها نیازمند نفوذند و برای رشد و توسعه به زمان نیاز دارند.

•بازخوانی

باتوجه‌به بند قبل که توصیه می‌کرد دوباره‌خوانی نکنید، عنوان بازخوانی ممکن است عجیب به نظر بیاید. تفاوت در این است که در آینده برای دوباره‌خوانی به عقب برمی‌گردیم و مطلب را بازخوانی می‌کنیم، به‌عنوان‌مثال وقتی که احساس کردید مطالب را آموخته‌اید. این روش بسیاری از نکات ریزی که قبلا ندیده‌ایم را آشکار می‌کند یا تصویر واضح‌تری از موضوع به ما ارائه می‌دهد.

• خلاصه‌نویسی کنید.

وقتی که خواندن مطلبی را به پایان رساندید ممکن است برایتان واضح باشد، اما آیا در مراجعات بعدی نیز چنین است؟ اینک زمانی مناسب برای خلاصه‌نویسی است. به زبان خویش بنویسید.

تمرین

۱. به فصل ۱ نگاهی بیندازید، سپس چگونه خواندن و درک خود از مطالب آن را تحلیل کنید.

۲. یک مجله یا مجله علمی را که شامل ریاضی باشد انتخاب کنید (به‌عنوان‌مثال، خبرنامه انجمن ریاضی ایران یا مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی) مقاله‌ای از آن را بخوانید. هدف مقاله چیست و مخاطب آن چه کسانی هستند؟ چگونه از ریاضی استفاده شده است؟ در یک جمله هدف چیست؟ سه نکته اصلی آن را بیان کنید.

۳. سه کتاب درسی ریاضی که در سطح توانمندی‌های ریاضی خودتان باشد انتخاب کنید. به‌طور اجمالی آن‌ها را نگاه کنید، بررسی کنید که کدام کتاب خودمانی‌تر است و دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.

۴. سه کتاب دربرگیرنده موضوعی یکسان را انتخاب کنید، یک موضوع ریاضی را از هر سه کتاب انتخاب کنید، آن‌ها را به‌عنوان یک مجموعه در نظر بگیرید، آیا تعریف‌ها در کتاب‌های مختلف متفاوتند؟ بهترین کدام است؟ کدام تعریف را می‌پسندید؟ آیا از هیچ نموداری برای شرح موضوع استفاده شده است؟ رسم نمودارها چه فایده‌ای دارند؟ نمودارها چگونه می‌توانند شما را دچار اشتباه کنند؟

چکیده

- هدفمند بخوانید.
- فعالانه بخوانید! همواره کاغذ و قلم به همراه داشته باشید.
- اجباری نیست که پشت سر هم بخوانید اما، اصولی بخوانید.
- سوال بپرسید.
- در ابتدا تعریف‌ها، قضیه‌ها و مثال‌ها را بخوانید، اثبات‌ها را می‌توانید بعدا بخوانید.
- با به‌کارگیری فرمول‌ها و غیره، متن را بررسی کنید.
- تمرین‌ها را انجام دهید و مسئله‌ها را حل کنید.
- اگر جایی با مشکل مواجه شدید به جلو بروید.
- خلاصه نویسی کنید.
- بیندیشید! چه چیزی آموخته‌اید؟

فصل ۳

نوشتن ریاضیات ۱

در نوشتن مقاله‌هایی که در مجلات علمی منتشر می‌شود، عادت داریم کار را تا سر حد امکان به پایان برسانیم، به‌طوری‌که همه حالت‌های ممکن را پوشش دهد و نگران نقاط کور فراموش‌شده یا شرح اینکه در ابتدا ایده غلطی داشته‌ایم نباشیم و این همین‌طور ادامه دارد.

” ریچارد فاینمن [1]، سخنرانی نوبل ۱۹۶۶“

به‌عنوان یک مدرس، سخت‌ترین کار برای تبدیل دانشجویان مشتاق به ریاضی‌دانانی توانمند، اجبار آن‌ها (بله، اجبار) به درست نوشتن ریاضیات است. اولین ارزیابی دریافت شده از آن‌ها شامل مجموعه‌ای نامفهوم از نشانه‌هاست که فاقد جمله یا نشانه‌گذاری است. آن‌ها می‌پرسند، ”منظور از نوشتن جمله چیست؟“، ”من درست پاسخ داده‌ام“، پاورقی را ملاحظه کنید. می‌توانم اظهار همدردی کنم، اما در ریاضیات مجبوریم که با روشی درست به پاسخ صحیح برسیم، و باید بتوانیم به دیگران نشان دهیم که روش ما درست است.

در مواجهه با ادعایی بی‌معنی در یک کار دانشجویی می‌توانید واکنشی معمول داشته باشید، اما شما یک مدرس هستید، می‌دانید منظورم چیست. از این دیدگاه نیز اظهار همدردی می‌کنم اما دو مشکل وجود دارد.

(آ) اگر خواننده برای درک نظر نویسنده(دانشجو)، مجبور است هوش خود را به کار گیرد، آنگاه نمره‌ای که دانشجو کسب می‌کند به‌دلیل تیزهوشی خودش نیست بلکه حاصل ذکاوت خواننده است[2].

(ب) شاید نکته دوم برای دانشجو مهم‌تر باشد. نظم‌دادن به مجموعه‌ای از نشانه‌های بی‌نظم و ایده‌های ناقصی که بد بیان شده است، به‌احتمالِ‌زیاد، هر ارزیابی را، ناامید و آزرده‌خاطر می‌کند؛ این روش مناسبی برای کسب نمره خوب نیست.

دانشجویان در دانشگاه، خوب فیلم بازی می‌کنند؛ بیش از آنکه جزئیات برایشان مهم باشد از عدم کسب نمره ناامیدند. بااین‌وجود به‌طور معمول، در پایان سال می‌پذیرند که خوب نوشتن عملکرد آن‌ها را بهبود می‌بخشد. باید اعتماد کنید که این روش مؤثر است! علاوه‌براین، خوب نوشتن مهارت سودمندی است که شخص کسب می‌کند.

[1] ریچارد فیلیپس فاینمن (*Richard Phillips Feynman*)، زاده ۱۱ مه ۱۹۱۸، نیویورک ـ درگذشته ۱۵ فوریه ۱۹۸۸کالیفرنیا، از تأثیرگذارترین فیزیکدانان آمریکایی قرن بیستم بود. او در گسترش نظریه الکترودینامیک کوانتومی سهم مهمی داشت و از دانشمندان پروژه منهتن، پروژه‌ای که به ساخت نخستین بمب اتمی انجامید، بود. در سال ۱۹۶۵، به‌دلیل پژوهش‌هایش در زمینه الکترودینامیک کوانتومی، جایزه نوبل فیزیک را به همراه جولیان شووینگر و سین‌ایترو تومونوجا دریافت کرد. در سال ۱۹۹۹، در یک نظرخواهی از ۱۳۰ فیزیکدان مطرح از کشورهای مختلف توسط نشریه بریتانیایی(*Physics World*) فاینمن به‌عنوان یکی از ده فیزیکدان برتر تمام اعصار انتخاب شد.

[2] صادقانه بگویم، دانشجویان آن را نمی‌فهمند!

خوب نوشتن شایسته شماست.

دلایل متعددی برای نوشتن وجود دارد. ممکن است یادداشتی برای آینده باشد یا بخواهید درباره یک ایده با دیگری مکاتبه کنید. به هر دلیل، نوشتن ریاضیات، هنری دشوار است و نوشتن متنی واضح و مؤثر، نیازمند تمرین است. البته اگر بخواهید درک شوید.

خوب نوشتن، فوق‌العاده مهم است؛ این کار پاداشی نیز به همراه دارد و در واقع موارد مورد مکاتبه را روشن می‌کند و درنتیجه به درک شما می‌افزاید. در واقع، اعتقاد بر این است که اگر نتوانم یک ایده را با نوشتن تشریح کنم، پس نمی‌توانم آن را درک کنم. این دلیلی است بر اینکه چرا خوب نوشتن به شما کمک می‌کند که مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید.

به‌طورکلی برای توضیح‌دادن به دیگران، می‌نویسیم و لذا این شخص دیگر را همواره در خاطر داشته باشید. دو نکته را فراموش نکنید:

- نسبت به خوانندگان مهربان باشید، کار را بر آن‌ها سخت نکنید ، به‌ویژه کسی که قرار است کار شما را ارزیابی کند.
- مسئولیت ارتباط با شماست، اگر فردی در سطح معلومات شما، نمی‌تواند نوشته شما را درک کند، مشکل مربوط به نوشتن شماست!

آنچه در ادامه می‌آید، مجموعه‌ای از ایده‌ها برای بهبود کیفیت نوشته‌های شماست. ایده‌های ارائه شده صرفا ایده‌های نظری نیستند بلکه در طول سال‌ها با دانشجویان مورد ارزیابی و عیارسنجی قرار گرفته است. ممکن است سختگیرانه و موشکافانه به نظر آید، اما اگر این روش را ادامه دهید، به نوشته‌های واضح‌تری دست می‌یابید و در ارزیابی‌ها نمرات بهتری کسب خواهید کرد.

ذکر این نکته ضروریست که بین یافتن پاسخ یک مسئله و ارائه آن تفاوت زیادی وجود دارد. این دستورالعمل‌ها به محصول نهایی جلا می‌دهند. در هنگام تلاش برای حل یک مسئله یا انجام یک تمرین، نقض کردن همه این قوانین نیز ایرادی ندارد. آنچه مهم است به‌کارگیری این دستورالعمل‌ها در هنگام نوشتن پاسخ برای دیگران است.

•یک مثال

قانون کسینوس درس هندسه را بیان می‌کنیم.

قانون کسینوس:

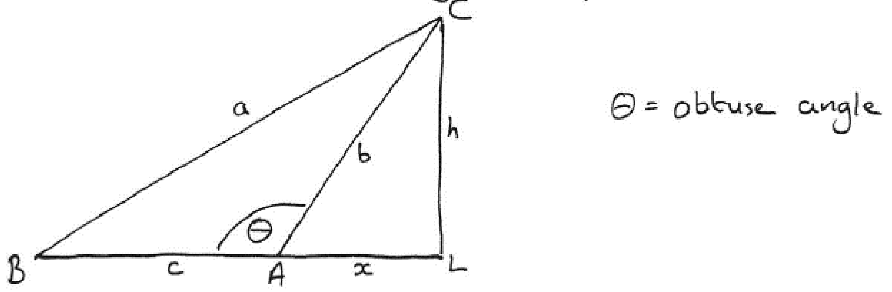
فرض کنید مثلثی با اضلاعی به طول‌های a، b و c در اختیار داشته باشیم و زاویه روبه‌روی ضلع a برابر θ باشد. لذا

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\theta.$$

اگر این قانون را نمی‌دانید، زمان مناسبی است که متن را همان‌طور که در صفحه ۲۲ شرح داده شده است بررسی کنید. سعی کنید چند شکل رسم کنید و چند نمونه عددی را امتحان کنید. اغلبِ مهارت‌های مورد نیاز برای تحقیق در مورد این گزاره در فصل ۱۶ پیدا می‌شود.

قانون کسینوس، نتیجه مفیدی است که با فرض $\theta = \frac{\pi}{۲}$ می‌توان آن را تعمیمی از قضیه فیثاغورس در نظر گرفت (متن را بررسی کنید). در درس هندسه، این قضیه را در حالتی که θ یک زاویه تند باشد، اثبات کردم و در حالتی که θ زاویه باز باشد به‌عنوان تمرین رها کردم. شکلی که در ادامه می بینید یکی از جواب‌هایی را که به دستم رسیده است، نشان می‌دهد. در ادامه به این مثال، به‌عنوان کاری که انجام شده است، ارجاع می‌دهیم. به‌عنوان یک تمرین به آن نگاه کنید و سعی کنید خطاهای احتمالی موجود در آن را بیابید. آیا با معنی است؟ آیا خواندنش راحت است؟ مهم‌تر از این، آیا درست است؟

Geometry Examples 1



$\triangle CBL$

$$a^2 = (c+x)^2 + h^2$$
$$a^2 = c^2 + 2cx + \underbrace{h^2 + x^2}_{b^2}$$

$\triangle CLA$

$$b^2 = h^2 + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

In $\triangle CLA$ $\quad \dfrac{x}{b} = \cos(180 - \Theta)$

$$\Rightarrow x = -b\cos\Theta \quad \text{Sub into}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\Theta$$

•قواعد اساسی

قاعده اولیه این است که جملات را ساده و نشانه‌گذاری شده بنویسیم. بیایید در این مورد به جزئیات بیشتری بپردازیم.

•جمله بنویسید.

جمله بنویسید، جمله بنویسید و یک‌بار دیگر به‌طور واقعی بر دیوار خانه خود نصب کنید: جمله بنویسید.
این توصیه بر سایر توصیه‌ها برتری دارد و به‌طور واقعی بر روش ارائه کار شما مؤثر است.

یکی از رایج‌ترین تصورات غلط ریاضی‌دانان مبتدی این است که به‌دلیل فوق‌العاده نمادین بودن زبان ریاضی، چنین می‌پندارند که برای پاسخ دادن به یک مسئله، باید فهرستی از نشانه‌ها را فراهم کنند. این تفکر اشتباه است، نشانه‌ها، صرفا خلاصه‌شده برخی از مفاهیم خاص هستند که باید به جملات افزوده شوند تا بامعنی شوند. به پاسخ زیر دقت کنید. دانشجویی جواب نهایی یک مجموعه از معادلات را به‌صورت زیر نوشته است.

" مجموعه تهی ($\emptyset$)، بدون جواب، ۱ = ۰"

منظور دانشجو روشن است؛ چون معادلات به معادله ۱ = ۰ منجر شده، پس دستگاه معادلات ناسازگار و بدون جواب است.

این واقعیت حیاتی که ، مجموعه جواب تهی است، در جواب نهفته است. همچنین دانشجو نشان داده است که می‌داند مجموعه تهی را با نشانه $\emptyset$ نشان می‌دهند. درهرصورت گنجاندن این نشانه در پاسخ غیرضروری است. اما آنچه او نوشته است یک جمله نیست. این رشته‌ای از نمادها است که به‌تنهایی هیچ معنایی ندارد. جواب باید روشنتر و به‌صورت زیر بیان شود. "چون معادله ۱ = ۰ حاصل شده است، پس دستگاه معادلات ناسازگار و بدون جواب است. " می‌توان این جمله " یعنی مجموعه جواب تهی است" را نیز اضافه کرد، اما ضروری نیست. دانش دانشجو به روشنی در پاسخ نشان داده شده است. بنابراین دانشجو در آینده نمرات بهتری کسب خواهد کرد.

تمامی قوانین معمول نوشتاری مانند بخش‌ها و نشانه‌گذاری‌ها به کار گرفته می‌شود، به‌عنوان‌مثال، استفاده از قواعد دستور زبان نیز به همان نسبت مهم است. هر جمله باید یک فعل داشته باشد و فاعل باید با فعل هماهنگ باشد.

به مثال اثبات فرمول کسینوس نگاه کنید. دو سطر اول از پاسخ دانشجو را بررسی می‌کنیم.

$$\triangle CBL \qquad\qquad \triangle CLA$$
$$a^2 = (c+x)^2 + h^2 \qquad\qquad b^2 = h^2 + x^2$$

اگر به روش استاندارد از چپ به راست بخوانیم:

$$\triangle CLB \ \ \triangle CLA \ a^{۲} = (c+x)^{۲} + h^{۲} \ b^{۲} = h^{۲} + x^{۲}.$$

این چه معنایی دارد؟ واضح است که منظور چیست. اما چرا باید مجبور شویم منظور نویسنده را استخراج کنیم؟ بهتر است از ابتدا منظور خود را بیان کند.

صرف‌نظر از این که چرا مثلث را با نماد $\triangle$ نمایش می‌دهند. در مثلث $\triangle CBL$ داریم $a^{۲} = (c+x)^{۲} + h^{۲}$ و در مثلث $\triangle CLA$ داریم $b^{۲} = h^{۲} + x^{۲}$. این جمله‌ای مناسب است. اینک به کلمات بعد از علامت $\Longrightarrow$ در پاسخ توجه کنید:

$$\frac{x}{b} = \cos(180-\Theta)$$
$$\Rightarrow x = -b\cos\Theta \quad \text{Sub into.}$$

این نمونه‌ای کامل از مثالی است که می‌توانیم منظور دانشجو را درک کنیم، اما خوب نوشته نشده است. اگر به‌صورت زیر بنویسیم خیلی واضح‌تر است. چون $x = -bcos\Theta$...، آن را در ... جایگزین می‌کنیم.

نمادها

هدف از نمادگذاری، فهماندن جملات است. نمادگذاری باید منطبق بر عرف و استاندارد باشد. به‌ویژه هر جمله باید با یک نقطه تمام شود. حتی اگر جمله به زبان ریاضی بیان شود در پایان آن باید نقطه گذاشت. به‌عنوان‌مثال، "فرض کنید $x = y^{۴} + y^{۲}$. آنگاه x مثبت است." دقت کنید که بعد از $x = y^{۴} + y^{۲}$ باید نقطه گذاشته شود؛ زیرا قسمت بعدی یک جمله جدید است. این مورد برای فهرستی از عبارت‌های برابر نیز درست است.

$$x = y^{۲} + ۲y$$
$$= \ y(y+۲)$$

عبارت فوق باید با یک نقطه پایان یابد، به این شکل اشتباه است[۳]. عبارات ریاضی باید نقطه‌گذاری شوند. برای مثال: "فرض کنید $x = ۴a + ۳b$ هرگاه $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{Z}$" باید به‌شکل زیر نشانه‌گذاری شود "فرض کنید $x = ۴a + ۳b$ هرگاه $a \in \mathbb{R}$، $b \in \mathbb{Z}$." به سه ویرگول و توقف کامل و نهایی در مثال زیر توجه کنید.

$$f(x) := \begin{cases} x^{۲}, & x \geq ۰, \\ ۰, & x \leq ۰. \end{cases}$$

به‌عنوان‌مثالی دیگر به اثبات فرمول کسینوس رجوع کنید. همان‌طور که می‌بینید هیچ نشانه‌گذاری ندارد! احتمالا در "در $\triangle CLA$ ..." یک جمله شروع شده است ولی با یک نقطه پایان نیافته است، چه کسی می‌داند؟

- **آن را ساده نگه دارید.**

ریاضیات به روشی بسیار اقتصادی نوشته می‌شود. برای رسیدن به چنین مهارتی، از کلمات و جملات کوتاه استفاده کنید. خواندن جملات کوتاه آسان است. برای جلوگیری از ابهامات، از نوشتن جملات پیچیده با تناقضات زیاد بپرهیزید. به مثال زیر که به‌سختی خوانده می‌شود توجه کنید:

[۳] برخی از مردم فکر می‌کنند این یک موضوع بحث‌برانگیز است. "تا زمانی که شما با آن مشکلی ندارید، چه اهمیتی دارد؟" بسیار خوب، می‌توانیم این استدلال را برای هر جمله‌ای اعمال کنیم و از تمام وقف‌های کامل خلاص شویم! اما نظر اکثریت این است که جملات با توقف کامل پایان می‌یابد؛ با آن همراه شوید.

"توابع f و g طوری تعریف شده‌اند که برابر با تابع تعریف شده روی مجموعه اعداد صحیح منفی می‌باشند که به ترتیب x را به مربع آن و x را به منفی مربع آن می‌برند."

بهتر است که به‌صورت زیر بنویسیم.

"در نظر بگیرید $\mathbb{Z}^{\leq 0} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$، مجموعه اعداد صحیح منفی باشد. فرض کنید $f : \mathbb{Z}^{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ و $g : \mathbb{Z}^{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x) = -x^2$ داده شده باشد."

دقت کنید که دامنه نگاشت‌ها را با جملات مجزا تعریف کرده‌ایم. همچنین مجموعه را بر حسب کلمات تعریف کردیم و با نوشتن به روشی متفاوت به توضیح آن پرداختیم. در جمله اول با به‌کارگیری کلمه "به‌ترتیب " تعریف‌های f و g را درهم بیان کردیم. درحالی‌که در جمله دوم آن‌ها از هم جدا شده‌اند و با استفاده از نشانه‌ها تعریف شده‌اند. گاهی اوقات استفاده از نشانه‌ها روشن‌تر است و گاهی هم چنین نیست؛ صفحه ۳۶را ببینید.

- **هدف خود را به‌طور روشن بیان کنید.**

هدف از نوشتن ارتباط برقرارکردن است. قرار است که شما تفکری را به شخص دیگری (در آینده به خودتان) انتقال دهید. متأسفانه(تجربه‌ی زیادی در این زمینه دارم) یک ایده نادرست یا غیرمنتظره را می‌توان به‌راحتی به اشتراک گذاشت. برای جلوگیری از چنین اتفاقی مشاوره زیر داده می‌شود.

- **آنچه را می‌خواهید انجام دهید، توضیح دهید، خواننده را آگاه کنید.**

خوانندگان روح نیستند. توضیح دادن آنچه را می‌خواهید انجام دهید، الزامیست. تصور کنید وقتی این کار را انجام می‌دهید، در حال تفسیر مطالب خود هستید. همان‌طور که قبلا گفته شد فراهم کردن فهرستی از نشانه‌ها، فرمول‌ها و گزاره‌های نامرتبط کافی نیست. یک توصیف خوب، ضمن نمایش میزان فهم شما، در کسب نمره نیز کمک می‌کند.
استدلال خود را با بیان آنچه می‌خواهید انجام دهید، آغاز کنید. به‌عنوان‌مثال:

" اینک نشان می‌دهیم که Xیک مجموعه متناهی است،"

"باید ثابت کنیم که..."

به‌طور مشابه می‌توانید استدلال خود را با عباراتی مانند

" این استدلال نشان می‌دهد که X مجموعه‌ای متناهی است،"
یا
" ثابت کردیم که...."

به پایان برسانید.
ادعاهای خود را روشن و مشخص بیان کنید. از به‌کارگیری عباراتی مانند " باید ممکن باشد" یا " امکان دارد یا ندارد" بپرهیزید. بنابراین ادعا کنید که " این امکان وجود دارد". مثبت اندیش باشید.
البته از توضیح زیادی درباره هر چیز جزئی خودداری کنید. با تمرین کردن و نقد نوشته‌های خود، یک توازن برقرار کنید.
اگر به انتهای پاسخ نگاه کنیم، عبارت زیر را می بینیم.

$$\Rightarrow \; x = -b\cos\theta \quad \text{Sub into} \perp$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\theta$$

بهتر بود پاسخ خود را به‌صورت زیر به پایان می‌رساند.

$$\text{“}...x = -b\cos\Theta\text{”}$$

با جایگزینی این عبارت در رابطه بالا نتیجه می‌گیریم که $a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\Theta$. قطعا این خیلی بهتر است؛ زیرا به‌طور ضمنی ادعا می‌کند که آنچه را باید ثابت می‌کردیم، ثابت شده است. در غیر این صورت، چنین برداشت می‌شود که برای فریب مصحح ، فرمول کسینوس‌ها را در انتهای مطلب نوشته‌ایم تا فکر کند به جواب رسیده‌ایم. همچنین با استفاده از کلمه "نتیجه می‌شود" در جمله نهایی، توضیح دهید که چه چیزی حاصل شده است.

- **ادعاهای خود را توضیح دهید.**

به‌جای اینکه فقط ادعا کنید، بگویید از کجا به‌دست آمده است. یعنی از جملاتی شامل

" به‌عنوان، به‌دلیل، ازآنجا، به‌علت، با توجه به اینکه، بااستفاده‌از، داریم" و غیره

استفاده کنید. برای مثال، روشن است که عبارت

"با به‌کارگیری قضیه ۴ (الف) می‌بینیم که مجموعه جواب ناتهی است"

نسبت به عبارت

" مجموعه جواب ناتهی است"

بهتر است. و عبارت

"$x^3 > 0$ زیرا x مثبت است،"

از عبارت تنهای

" $x^3 > 0$ "

گزینه بهتری است. زیرا برای x دلخواه متعلق به $\mathbb{R}$، $x^3 > 0$ برقرار نیست. نکته در این است که اگر مثبت بودن x را ذکر نکرده باشند، ممکن است خواننده گمراه شود و فکر کند که گزاره "مسلما نادرست" است. چنین توضیحات سودمندی، زیانی ندارد.

مثال دیگر این است که بگوییم چه زمانی از فرمول استفاده شده است.

" بنا به قاعده زنجیره‌ای $f'(x) = 2x\cos(x^2)$. "

به این ترتیب دانسته‌های خود را شرح داده‌اید.

به چند سطر اول اثبات دانشجو از قانون کسینوس‌ها برمی‌گردیم.

$$\triangle CLA \qquad b^2 = h^2 + x^2 \qquad\qquad \triangle CBL \qquad a^2 = (c+x)^2 + h^2$$

قبلا دیدیم که بهتر است گفته شود:

در مثلث $\triangle CBL$ داریم $a^2 = (c+x)^2 + h^2$ و در مثلث $\triangle CLA$ داریم $b^2 = h^2 + x^2$.

اما سطر بعدی چیست؟ به‌طور ساده می گوید:

$$a^2 = c^2 + 2cx + h^2 + x^2$$

آیا از شکل، چنین نتیجه‌ای را به‌دست آورده‌اید؟ قطعا در مورد دو معادله اول یعنی $a^2 = (c+x)^2$ و $b^2 = h^2 + x^2$ بله ولی در مورد آخر از اینطور نیست، بلکه از بسط پرانتز در معادله اول حاصل شده است. بنابراین باید بگوییم با بسط پرانتز داریم:

$$a^2 = c^2 + 2cx + h^2 + x^2.$$

وقتی به سطر بعد نگاه می‌کنیم، متوجه می‌شویم که نیازی به بیان عبارت زیر نیست.

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

این از جایگذاری معادله دوم $a^2 = (c+x)^2 + h^2$ در فرم مبسوط معادله اول $a^2 = c^2 + 2cx + h^2 + x^2$ به‌دست آمده است.
باید چنین بگوییم:

"در مثلث $\triangle CBL$ داریم $b^2 = h^2 + x^2$ و در مثلث $\triangle CLA$ داریم $a^2 = (c+x)^2 + h^2$. معادله اول را بسط داده و با جایگزینی b^2 از معادله دوم داریم: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$."

دقت کنید که عبارت داخل کمانک را بسط ندادیم. درصورت تمایل می‌توانید بسط دهید، اما محاسبات آنقدر ساده است که ارزش جوهر مصرف کردن ندارد. اگر موافق نیستید، بررسی کند.

- **منظور خود را بیان کنید.**

در هر نوشتاری بیان منظور نویسنده مهم و دشوار است. استفاده دقیق از دستور زبان می‌تواند در این کار کمک کند.
اولین قاعده این است که خواننده نباید مجبور شود منظورتان را از متن کشف کند. تمام اطلاعات ضروری باید در نوشته شما موجود باشد. هیچ چیزی نباید مبهم باشد.
ریاضی‌دان واقعی عاشق است و دوست دارد ریاضیات صریح باشد. ریاضیات بدون صراحت، چیزی نیست! بدون صراحت نمی‌توان یک مفهوم را از روی مفهوم دیگری ساخت. اگر یکی از ایده‌ها مبهم باشد یا گروه‌های مختلف برداشت‌های متفاوتی داشته باشند، آنگاه خطاها فرصت ظهور پیدا می‌کنند و تلاش‌های ما برای جلوگیری از بروز آن‌ها بی‌حاصل است. پس دقیق باشید!
به‌عنوان‌مثال، از سورهای "وجودی" و "عمومی" استفاده کنید.
به جای نوشتن

$$\text{“}f(x) = 5\text{”}$$

که مبهم است ممکن است خواننده بپرسد که این برای یک x، حداقل یک x، یا همه xها برقرار است؟ باتوجه‌به شرایط ،عبارات زیر را بنویسید.

برای بعضی $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = 5$ یا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = 5$.

فصل ۱۰ درمورد سورهایی است که اهمیت دقت در این زمینه را شرح می دهند.

- **استفاده از نشانه‌ها**

اینک به نکاتی در مورد نشانه‌ها می‌پردازیم. از اینکه ریاضیات به‌شدت نمادین است، راه گریزی نیست. ولی استفاده زیاد از نشانه‌های ریاضی، باعث ایجاد یک استدلال ریاضی نمی‌شود.

- **واژه‌ها یا نشانه‌ها**

علامت‌های اختصاری یا نشانه‌ها کوتاه هستند. به‌عنوان‌مثال قضیه مشهور اویلر در نظریه اعداد،

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$$

به‌طور خلاصه برحسب نشانه‌ها بیان شده است[4]. عبارت معادل آن که با واژه‌ها نوشته شده است تأثیر کمتری دارد.

[4] قضیه مهمی است که بسیاری از ثابت‌های معروف ریاضی مانند e، π، ریشه عدد دوم ۱ــ و البته دو عدد طبیعی مهم یعنی ۱ و تنها عدد اول زوج را به هم پیوند می‌زند. در سال ۱۹۹۰ مجله $IntellingencerMathematical$ (جلد ۱۲) این قضیه را به‌عنوان زیباترین قضیه در کل ریاضیات معرفی کرده است.

"عدد e به توان دو برابر محیط دایره تقسیم بر قطرش در ریشه دوم ۱ـ برابر ۱ است."

بااین‌وجود، استفاده از واژه‌ها، یک قاعده عمومی خوب را رقم می‌زند. برای مثال، به‌جای نشانه « $\therefore$ » بنویسید " بنابراین". تعداد خیلی محدودی کتاب از آن استفاده می‌کنند. به‌طور مشابه

"عدد x گویا است $\Longrightarrow$ $x^۲$ حقیقی است."

را می توان به‌شکل زیر نوشت.

"عدد x گویا است نتیجه می‌دهد $x^۲$ حقیقی است."

در بعضی از جملات بهتر است که به‌طور هم‌زمان از نشانه‌ها و واژه‌ها استفاده کنیم، مثلا به‌جای

" پاسخ=۱"

باید نوشته شود

" پاسخ برابر ۱ است."

در غیر این صورت جملاتی مانند،

"تعداد اعداد طبیعی فرد کوچکتر از ۹=۵ "

ساخته می‌شود؛ که خواندن آن درست است اما چشم فرد به سمت عبارت نادرست " ۹=۵ " منحرف می‌شود. اعداد کوچکی که نقش صفت دارند باید به حروف نوشته شوند مانند

"دو مجموعه"

وقتی که به‌عنوان اسم یا عدد به کار می روند باید به‌صورت عددی نوشته شوند. مانند

"لم ۳" و " ...به معنی مساوی ۲۳ است."

مثالی دیگر :

"یکی از ریشه‌ها برابر ۳ است."

عدد ۱ استثناء است و به‌طور سنتی به هر دو شکل نوشته می‌شود.
توجه کنید که نشانه‌های شبیه به هم باعث ابهام می‌شوند. واضح است که $\in$ و ϵ با هم تفاوت دارند. اولی عضویت در یک مجموعه را نشان می‌دهد، دومی حرف یونانی اپسیلون است. ولی بدانید که برخی نویسندگان آن‌ها را به‌جای هم به کار می‌برند.
همان‌طور که قبلا گفته شد چند سطر اول که شامل نشانه استاندارد $\triangle\, CBL$ است را بازنویسی می‌کنیم:

"در مثلث $\triangle\, CBL$ داریم $a^۲ = (c+x)^۲ + h^۲$ و در مثلث $\triangle\, CLA$ داریم $.b^۲ = h^۲ + x^۲$"

- **مساوی به معنای مساوی است.**

نشانه تساوی "="، یکی از رایج‌ترین نشانه‌های ریاضیات است و یکی از اولین نشانه‌هایی است که بچه‌ها می‌آموزند. بااین‌وجود و یا شاید به‌همین‌خاطر، هنوز هم به‌شکل غلط از آن استفاده می‌شود.
باید برگردیم و توجه کنیم که با به‌کارگیری نشانه‌ی تساوی، ادعا می‌کنیم که دو شی واقع در دو طرف تساوی دقیقا یکی هستند. تقریبا یکسان بودن یا نزدیک به هم بودن کافی نیست. از دور اندکی شبیه به هم بودن کافی نیست! ایده برابری در مورد اعداد باید ماهیت دوم باشد هرچند برای سایر اشیا نیز برقرار است. بنابراین به‌خاطر داشته باشید.

تساوی یعنی تساوی.

یک نکته این است که اگر یک طرف تابع باشد، در طرف دیگر نیز باید تابع باشد. اگر در یک طرف مجموعه باشد در طرف دیگر نیز باید مجموعه باشد.
در پاسخ به سوالی درباره تجزیه یک عدد به عامل‌های اول یکی از دانشجویان نوشته است:

عوامل۶=۲ و ۳.

صرف‌نظر از نازیبایی جمله زیبا و اینکه ۶=۲ نمای خوبی ندارد، پاسخ هم به‌صورت نادرست بیان شده است. درست است که ۶ حاصلضرب ۲ و۳ است و ۲ و ۳ عامل‌های ۶ هستند اما این با " ۲ و ۳" برابر نیست؛ لذا این پاسخ بهتر است:

عوامل اول ۶ عبارتند از: ۲ و ۳.

به‌همین‌ترتیب، تمرین بعد را در نظر بگیرید. مشتق تابع $x^۳$ را بیابید. عبارت

$$x^۳ = ۳x^۲$$

درست نیست. این یک عبارت ریاضی و در واقع یک معادله است. اما چیزی نیست که دانشجو قصد داشته است بیان کند. روش صحیح نوشتن این عبارت به‌صورت

$$\frac{d}{dx}(x^۳) = ۳x^۲$$

است.
یک اشتباه بسیار رایج، استفاده از نشانه‌ی تساوی به‌عنوان رابط یک سطر با سطر بعد است. تقریبا مانند یک علامت می‌گوید که این بخش بعدی فرآیند است. روش صحیح نمایش نتایج در زیر بیان می‌شود.

- **نمایش نتایج به‌وسیله علامت تساوی**

هرگاه عبارتی کوتاه است باید از عرض صفحه استفاده کرد. برای مثال،

$$(x+۳)^۲ = (x+۳)(x+۳) = x^۲ + ۶x + ۹.$$

برای محاسبات طولانی مرسوم است که به سمت پایین صفحه به‌شکل زیر بنویسیم:[۵]

$$\begin{aligned}(x+۳)^۲ + x^۲ &= (x+۳)(x+۳) + x^۲\\ &= x^۲ + ۶x + ۹ + x^۲\\ &= ۲x^۲ + ۶x + ۹.\end{aligned}$$

گاهی اوقات نیاز است تأکید کنیم که یک نتیجه خاص از کجا به‌دست می‌آید. از قطع کردن روند استدلال به‌صورت زیر پرهیز کنید.

$$= x^۲ + ۵y$$

$$\text{بنا به قضیه ۶} = x^۲ + ۵y...$$

اگر نیاز است که دلیل درست بودن یک گام را با جزئیات بیان کنید، به‌شکل زیر عمل کنید. فرض کنید طبق قضیه ۶.۴ داشته باشیم: $y = ۳$، بهتر است بنویسیم:

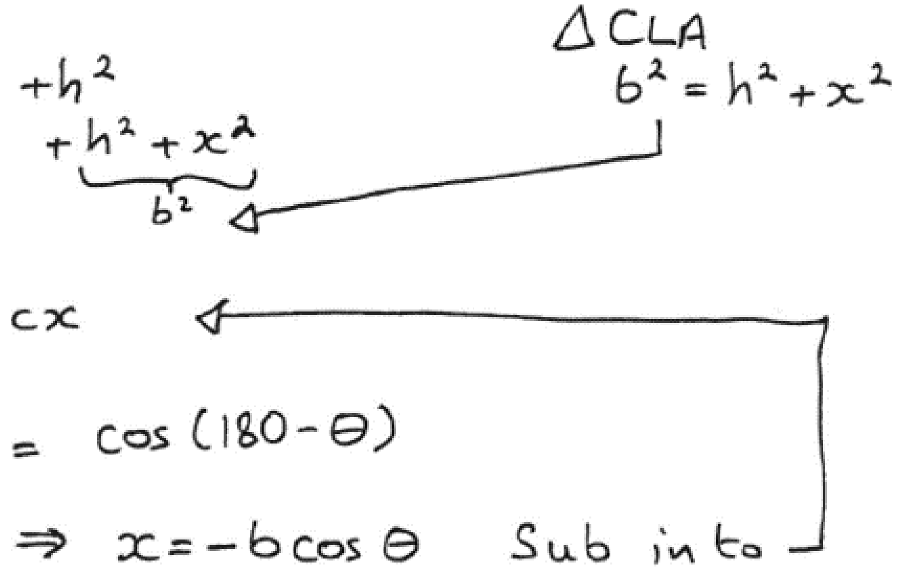
$$\begin{aligned}x^۲ + ۴x + y &= x^۲ + ۴x + ۳, && \text{بنا به قضیه ۶.۴,}\\ &= (x+۱)(x+۳)...\end{aligned}$$

[۵] متاسفانه، این روش قانون نشانه‌گذاری را نقض می‌کند اما درهرصورت چون این کار عملی و سنتی است آن را انجام می‌دهیم.

به نشانه‌گذاری بعد از بیان نمادین عبارت سطر اول و بعد از اشاره به قضیه دقت کنید.

- **فلش‌ها را به هر جایی نکشید.**

اگر نتیجه‌ای نیازمند نتیجه‌ای از قبل باشد، وسوسه می‌شوید که یک فلش طولانی از آنجا به اینجا بکشید، این کار نمایش زیبایی نیست، لذا آن را انجام ندهید. به‌جای آن به نتیجه مورد نظر، یک اسم، یک شماره یا یک نشانه نسبت دهید و سپس به آن ارجاع دهید.
در مثال قانون کسینوس‌ها از فلش‌ها استفاده شده است.



می‌توانیم آن را به‌شکل زیر تغییر دهیم.
"معادله اول را بسط داده و با جایگزینی b^2 از معادله دوم داریم

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx. \qquad (*)$$

$$\vdots$$

$$\ldots \Longrightarrow x = -b\cos\Theta.$$

با جایگذاری x در $(*)$ نتیجه می‌گیریم که $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos\Theta$."

تمرین ۱.۳. *اثبات قانون کسینوس‌ها را طوری بازنویسی کنید که پیشنهادات داده شده در آن رعایت شود.*

- **به پایان رساندن یا تمام کردن**

همواره کار خود را اصلاح کنید. یعنی با خواندن آن خطاها را بیابید. این می‌تواند شامل اشتباهات نوشتاری مانند ناز به‌جای باز یا اشتباهات املائی مانند سفر به‌جای صفر، اشتباهات دستوری یا حتی اشتباهات ریاضی باشد.
کار خود را آهسته بخوانید. با صدای بلند خواندن باعث می‌شود که در جاهایی که کار ایراد دارد متوقف شوید و خطاها دیده شود. گاهی از فرد دیگری بخواهید که کار شما را بخواند، زیرا شما بیشتر خواهان چیزی هستید که فکر می‌کنید نه آنچه که واقعا وجود دارد. اگر خواننده متن دچار اشتباه شد، او را سرزنش نکنید. همیشه مسئولیت نهایی بر عهده نویسنده است!
یک روش اصلاحی مفید این است که در هر زمان، بر یک جنبه اصلاحی متن تمرکز کنید. به این معنی که، ابتدا دقت متن را مورد بازبینی قرار دهید. یعنی آیا درست است؟ سپس املا و انشا آن را بررسی کنید، آیا همه کمانک‌ها بسته شده‌اند؟ و غیره. سپس بررسی کنید که ترتیب مطالب، صحیح و هنگام خواندن روان باشد.

- **تأمل**

اندیشیدن بخش مهمی از روند نوشتن است. برای مدتی کار خود را کنار بگذارید، سپس با دید تازه‌تری به سراغ آن بروید. بدیهی است که چنین روشی برای کارهای ضرب الاجلی امکان‌پذیر نیست، اما برای پروژه‌ها قابل اجراست.

وقتی دوباره می‌خوانید بپرسید "چه چیزی را می‌توان کنار گذاشت؟" (منظورم استفاده بهینه از کلمات است.) و "چه چیزی را می‌توان اضافه کرد؟" (مثال‌های بیشتر منجر به درک بهتر متن می‌شود.) برای اولی، جمله‌ها و کلمات غیرضروری را حذف کنید. همچنین بپرسید که "آیا همه نشانه‌ها معرفی شده‌اند؟ و ضروری هستند؟ آیا منظور را می‌رسانند و ساده است؟ آیا چیزی فراتر از مجموعه‌ای از نشانه‌هاست؟" و مهم‌تر از همه "آیا متن را به‌وسیله جملات نوشته‌ام؟"

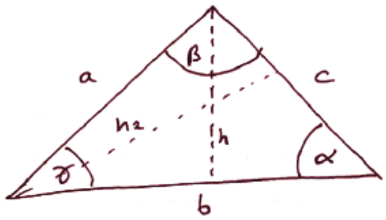
تمرین

۱. **قانون سینوس:** فرض کنید مثلثی با طول اضلاع a، b و c داریم که زاویه‌های روبه‌رو آن‌ها به ترتیب برابر α، β و γ هستند. آنگاه

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

در یک آزمون، دانشجویی به سوال "قانون سینوس را بیان و اثبات کنید." به‌صورت زیر پاسخ داده است.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



$\sin\alpha = h/c \quad h = \sin\alpha c$

$\sin\gamma = h/a \quad h = \sin\alpha a$

and

$\sin\beta = \frac{h_2}{a} \quad \sin\alpha = \frac{h_2}{b}$

$c\sin\alpha = a\sin\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$a\sin\beta = h_2 \quad b\sin\alpha = h_2$

$a\sin\beta = b\sin\alpha$

$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

پاسخ را طوری بازنویسی کنید که به‌صورت درست نوشته شده و به آسانی قابل درک باشد.

۲.اگر می‌دانید که چگونه بیشینه و کمینه یک تابع را می‌یابند و نمودار آن را رسم می‌کنند، پاسخ داده شده به سؤال "بیشینه و کمینه تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۱۲x^۲ + ۱۸x$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید. " در شکل زیر را بازنویسی کنید.

$f = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

$= 6x^2 - 24x + 18 \Rightarrow \quad x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4\times 18\times 6}}{2\times 6}$

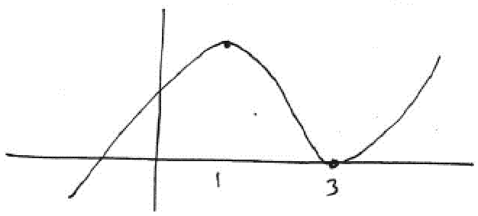
$\frac{24 \pm \sqrt{144}}{12}$

2 ± 1

$1, 3.$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 24 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 12\times 1 - 24 = -12 < 0 \quad \max$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\times 3 - 24 = 12 > 0 \quad \min$



$y = 2 - 12 + 18 = 8$

$y = 2\times 27 - 12\times 9 + 18\times 3$

$= 0.$

۳.برخی از تمرین‌ها قدیمی خودتان در دروس ریاضی را پیدا کنید و پاسخ آن را طوری بازنویسی کنید که واضح و روشن باشد. حتی می‌توانید مثال‌هایی از دوستانتان بگیرید.

چکیده

- جملات را ساده و نشانه‌گذاری شده بنویسید.
- سادگی را حفظ کنید.
- آنچه را انجام می‌دهید توضیح دهید.
- منظورتان را بیان کنید.
- به‌طورکلی به‌جای نشانه‌ها از کلمات استفاده کنید.
- تساوی را درست به کار ببرید، تساوی یعنی برابری.
- فلش را هر جایی نکشید.
- برای مشخص کردن معادلات از نشانه‌ها و اعداد استفاده کنید.
- ویرایش کنید.
- انعکاس دهید.

فصل ۴

نوشتن ریاضیات ۲

همان اندازه که با خواندن یاد می‌گیرید با نوشتن نیز یاد می‌گیرید.

" لرد اکتون [۱]، سخنرانی‌های تاریخ مدرن ۱۹۰۶"

در فصل گذشته، نگران اصول و قواعد پایه‌ای نوشتن ریاضیات بودیم. در این فصل، باید ویژه‌تر ورود کنیم و مثال‌هایی خاص از روش‌هایی که بیان ریاضیات را بهبود می‌بخشد، مطرح کنیم.

شفافیت بیان

- **اگر شما از "اگر" استفاده می‌کنید، آنگاه باید از "آنگاه" استفاده کنید.**

اگر شما از کلمه "اگر" استفاده می‌کنید، آنگاه از "آنگاه" نیز استفاده کنید. (رسم بر این بوده که با یک ویرگول (،) قبل از کلمه آنگاه تأکید شود، ولی به نظر می‌رسد، عمر این سنت به پایان رسیده است).
به این معنی که جمله

"اگر x فرد باشد، آنگاه $x^۲$ فرد است." نسبت به عبارت "اگر x فرد باشد، $x^۲$ فرد است."

ترجیح داده شود. جملات می‌توانند به‌شکلی نوشته شوند که شامل "اگر" باشند طوری‌که به "آنگاه" نیاز نباشد:

"$x^۲$ فرد است اگر x فرد باشد."

اما در حالت کلی، از "آنگاه" استفاده کنید، برای اینکه ممکن است وقتی آن را به کار نمی‌گیرید نتیجه اشتباه شود. برای مثال

"اگر $a > ۰$، $b > ۰$، $a + b > ۰$."

به چه معناست؟ می‌تواند به این معنی باشد که

"اگر $a > ۰$، آنگاه $b > ۰$ و $a + b > ۰$."

ممکن است a مثبت باشد و سپس مثبت بودن b را نتیجه دهد، برای مثال، $b = ۵a$.
یا به‌معنی

"اگر $a > ۰$، $b > ۰$، آنگاه $a + b > ۰$"

---

[۱] جان امریک ادوارد دالبرگ، اکتون ($John\ Emerich\ Edward\ Dalberg - Acton$)، مشهور به لرد اکتون زاده ۱۱ مه ۱۹۱۸، نیویورک، درگذشته ۱۵ فوریه ۱۹۸۸ فیلسوف و مورخ انگلیسی در سده ۱۹ میلادی بود.

باشد، که همیشه درست است. نکته این است که از قلم افتادن "آنگاه" ابهام ایجاد می‌کند. در بسیاری از حالات، خواننده می‌تواند مفهوم گزاره را با حذف "آنگاه" درک کند، اما حذف نکردن آن مطمئن‌تر است. نباید خواننده مفهوم را از کلاف سردرگم بیرون بکشد. به خاطر داشته باشید، مسئولیت نتیجه هر نوشته‌ای با نویسنده است.

- **هر چیزی "فرمول" نیست؛ اشیا را با نام درست بخوانیم.**

در ریاضیات توجه زیادی به فرمول‌ها می‌شود، بنابراین بسیاری از مبتدیان، هر گردایه‌ای از نمادها را فرمول یا معادله می‌نامند. در حالت کلی به یک گردایه، **عبارت** یا **جمله** گفته می‌شود، برای مثال $۳x^۲ - ۷x$ یک عبارت است.
معادله، دو عبارت را شامل می‌شود که با یکدیگر مساویند. برای مثال $۳x^۲ - ۷x = ۴x$ یک معادله است. توجه کنید که **نامعادله**، مانند $x \leqslant ۵$، معادله نیست چرا که در معادله باید یک تساوی باشد.
فرمول، رابطه یا قاعده‌ای را بیان می‌کند. اغلب زمانی که روشی برای محاسبه چیزی از عبارت دیگری به‌دست می‌آید، مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ برای مثال:
درمورد $ax^۲ + bx + cx = ۰$، فرمول $D = \sqrt{b^۲ - ۴ac}$ (مشهور به مبیّن) بررسی می‌شود.
پس مطمئن شوید که هر چیزی را با نام خودش صدا می‌زنید. همچنین دقت کنید که بین مفاهیمی مانند مجموعه بودن و عضو بودن، تفاوت قائل شوید.
مثال دیگر، اینکه باید یک تابع و مقدارش در یک نقطه را که f و $f(x)$ هستند، از هم تشخیص دهید. اولی یک تابع است که آن را با f نامگذاری کرده‌ایم، درحالی‌که $f(x)$ مقدار f در x است (صفحه۱۳ را ببینید). دقیق‌تر بگویم، شما نباید $f(x)$ را یک تابع بنامید. بااین‌وجود، این نکته توسط برخی ریاضی‌دانان نادیده گرفته می‌شود؛ که بهتر است بدانند (شامل خودم نیز می‌شود).
به‌طور خلاصه، باتوجه‌به مطالب بالا، $f(x) = ۳x^۲$ یک معادله (یا عبارت یا فرمول) است که مقدار یک تابع خاص را ارائه می‌دهد.

- **از "آن" دوری کنید.**

در مورد آنچه سخن می‌گویید باید روشن و واضح باشد. کلمه "آن" یک کلمه بسیار مفید در زبان است به‌خاطر اینکه به ما اجازه می‌دهد در مورد چیزی سخن بگوییم بدون آنکه به‌راستی بگوییم چه چیزی است. متأسفانه "آن" می‌تواند مبهم باشد و در نوشتن ریاضیات، کلمه "آن" می‌تواند به‌شکلی پنهان استفاده شود که به‌راستی ندانیم در مورد چه صحبت می‌کنیم. این نوعی خودفریبی است و به‌طور ناخودآگاه یا متاسفانه گاهی از عمد انجام می‌شود.
اگر شما متوجه شدید که از کلمه "آن" استفاده کردید، آنگاه آن را با کلمه یا عبارت مناسب جابه‌جا کنید. آیا جمله، هنوز مفهوم را می‌رساند؟ اگر نه، آن را تغییر دهید.

- **تقریب‌های اعشاری**

در ریاضیات محض، تمایلی به استفاده از تقریب اعشاری اعداد نیست، اما در ریاضیات کاربردی یا آمار معمول است. البته به این معنی نیست که در ریاضیات محض هرگز استفاده نمی‌شوند. اگر در حال رسم اشکال باشید، مجاز هستید از تقریب‌های اعشاری استفاده کنید؛ برای مثال، در پیدا کردن مکانی که یک معادله درجه دوم محورهای مختصات را قطع می‌کند. ولی در ریاضیات محض، اگر در پایان جواب، $\sin ۷$ باشد، رها کردن آن بهتر از جایگزینی عدد ۰/۶۵۶۹۸۷۵۹۵ است. هرگاه مجبور شدید از تقریب استفاده نمایید، نماد $\simeq$ یا $\approx$ را به کار ببرید. پس $\pi \approx ۳/۱۴$ و $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱$ هر دو پذیرفتنی است. نکته این است که $\pi = ۳/۱۴$ درحقیقت غلط است؛ به یاد آورید که تساوی به معنی یکسان است، صفحه ۳۸ را ببینید.
شاید برای بیان $\sin \frac{\pi}{۶}$ از $\frac{۱}{۲}$ یا ۰/۵ استفاده شود. توجه کنید استفاده از ۰/۵، کاملا درست است و این یک تقریب نیست. دقت کنید با تقریب‌ها مخالف هستیم، نه با اعشاری‌ها!

کلمات یا نمادها

•جمله‌ها را با نماد شروع نکنید.

جمله‌ها را با نماد شروع نکنید! جملاتی مانند جمله زیر را به‌کار نبرید!

”f یک تابع با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ است.“

یا برای مثال،

” X یک مجموعه متناهی است،“

نه تنها خوب نیستند بلکه بد است. می‌توانیم یک جمله مانند
” در نظر بگیرید که x عضوی است از X. x در Y نیست.“ را ببینیم. در ریاضیات نقطه، نماد ضرب است؛ پس در جمله بالا ممکن است $x.X$، x ضرب در X خوانده شود.
برای جلوگیری از چنین مشکلاتی از یک کلمه توصیفی برای بیان آن نماد استفاده می‌کنیم. برای نمونه، جملات ناصحیح بالا را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

”تابع f، دارای دامنه‌ی $\mathbb{R}$ است.“
”مجموعه X، متناهی است.“

و

”فرض کنید x عضوی از X باشد و x عضو Y نباشد.“

راهکار دیگر این است که عبارتی مثل ” داریم“ را در ابتدای جمله به‌کار ببرید. برای مثال،

داریم: $g(x) = ۲x^۴ - ۵x - ۳$.

• توهین به نماد استلزام

نمادی که معمولا ریاضی‌دانان مبتدی از آن خیلی بد استفاده می‌کنند، نماد استلزام $\Longrightarrow$ است.
اول اینکه، باید ”نتیجه می‌دهد“ یا ”نتیجه می‌دهد که“خوانده شود، و نباید به‌جای علامت تساوی استفاده شود، پس ننویسید $۲ \Longrightarrow ۳ - ۵$.
در فصل‌های بعد خواهیم دید (بیانش در این‌جا نیز زیانی ندارد)، استفاده درست این است که

”جمله $\Longrightarrow$ جمله.“

برای مثال

”$x^۲$ فرد است $\Longrightarrow$ x فرد باشد.“

همان‌طور که هیچ جمله‌ای با نماد تساوی شروع نمی‌شود، هیچ جمله‌ای با ”نتیجه می‌دهد که“ آغاز نمی‌شود، پس هیچ‌گاه جمله‌ای با $\Longrightarrow$ نیز شروع نمی‌شود. اگر احساس می‌کنید که نیاز است با استلزام شروع کنید، آنگاه احتمالا بهتر است که ”این نتیجه می‌دهد که“ را بنویسید. به‌طور مشابه بسیاری از دانشجویان از $\Longrightarrow$ به‌عنوان یک رابط از یک خط به خط بعدی مثل ”این آن چیزی است که ما بعدا انجام می‌دهیم“ استفاده می‌کنند. اگر مطمئن نیستید که از نماد استلزام کجا استفاده کنید، پس جمله را با صدای بلند و با ”نتیجه می‌دهد“ یا ”نتیجه می‌دهد که“ به جای $\Longrightarrow$ بخوانید، اغلب مفید است.
با استلزام دوشرطی نیز $\Longleftrightarrow$ مشکلات مشابهی به‌وجود می‌آید. فصل ۹ را ببینید. استلزام دوشرطی ادعا می‌کند که دو جمله هم‌ارز (معادل) هستند.اگر دقیق‌تر بگوییم، باید فهرستی بلند بالا تهیه کنیم از اینکه چه زمانی نماد تساوی را بنویسیم. در این مورد در فصل ۲۱ مثالی ارائه خواهد شد.
اگر نمی‌دانید که چگونه از $\Longrightarrow$ یا $\Longleftrightarrow$ استفاده کنید، فصل‌های ۷ و ۹ را به‌طور دقیق مطالعه کنید.

• **از نماد و نشانه‌گذاری معمول استفاده کنید.**

برخی از نمادها، معنی معمولی و ثابتی دارند. اولین مثال، عدد π است که با تقسیم محیط یک دایره بر قطرش حاصل می‌شود. این معمول نیست که این نسبت را با چیزی غیر از π نمایش دهیم، اما این روش درستی است که استدلال را با فرض "فرض کنید α، محیط یک دایره تقسیم بر قطرش باشد" آغاز کنیم. به‌علاوه، π می‌تواند معانی درست دیگری هم داشته باشد؛ برای مثال، به‌عنوان یک نگاشت تصویری به کار می‌رود (به این دلیل که π، p را نشان می‌دهد و حرف اول کلمه تصویر[۲] در زبان انگلیسی p است). برای گروه بنیادی از یک فضا در توپولوژی جبری نیز استفاده می‌شود.
نمادهای دیگر، مانند ϵ، معمولا به‌معنی یک عدد مثبت کوچک، n یک عدد طبیعی و همین‌طور ادامه دارد. سعی کنید این قراردادها را بدانید و آن‌ها را به کار ببندید، تا کارتان را برای خواندن ساده‌تر کنند. فهرستی از اینگونه مثال‌ها را در پیوست (ب) می‌توان دید.

• **نمادها و نشانه‌گذاری خود را تعریف کنید.**

همان‌طور که دیده‌ایم، بسیاری از نمادها برای اشیا خاصی به کار گرفته می‌شوند، مانند f که معمولا یک تابع را نمایش می‌دهد و احتمالا توجه کرده‌اید که حروف بزرگی مانند X و Y را برای مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم، و حروف کوچک مانند x، اعضای آن مجموعه‌ها را نشان می‌دهند. باوجود این قراردادها، نمادها باید به‌طور واضح تعریف شوند چرا که ممکن است خواننده‌ای برای همان هدف شما از نماد متفاوتی استفاده کند. بنابراین، اینکه بنویسید "فرض کنید X یک مجموعه باشد" بهتر از آن است که از X بدون توضیح استفاده نمایید. مثال دیگری از این دست را می‌توانید در تمرین اول فصل ۳ ببینید که دانشجویی گزاره‌ای از قاعده سینوسی ارائه داده است که حروف a، b، c، α، β و γ تعریف نشده‌اند. آیا در پاسختان به آن پرسش، تعریفی از حروف ارائه داده‌اید.
برخی از نمادها نیاز به معرفی ندارند؛ مثلا بیشتر ریاضی‌دانان می‌دانند که π برای آنچه گفته شد به کار می‌رود، نماد $\sum$ به جمع مربوط می‌شود، نماد $\int$ به انتگرال‌گیری و این روند ادامه دارد.

بهبود بخشیدن

• **از عبارات ربطی استفاده کنید.**

مسئله دیگری که در نوشتن وجود دارد، این است که مفروضات و نتیجه‌گیری‌ها در یک برهان به‌درستی قابل تشخیص نیستند. برای جلوگیری از این مشکل، باید قبل از بیان نتیجه، از کلمات و عبارات ربطی استفاده کنید. عباراتی مانند "پس، نظربه‌اینکه، بنابراین، از، درنتیجه" برای اثبات استلزام و نتایج درست شده‌اند. اگر در کتابی از ریاضیات نگاهی بیندازید، موارد فراوانی از، پس، بنابراین و درنتیجه، خواهید دید.
برای مثال، باتوجه‌به اینکه وقتی اعداد تقسیم می‌شوند، ترتیب پرانتزها مهم است. اینکه نوشته شود

$$\text{“}\frac{(\frac{۸}{۲})}{۴} = ۱, \qquad \frac{۸}{\frac{۲}{۴}} = ۱۶\text{”}$$

کافی نیست. باید بنویسیم

$$\text{“داریم } \frac{(\frac{۸}{۲})}{۴} = ۱\text{، اما } \frac{۸}{\frac{۲}{۴}} = ۱۶\text{.”}$$

توجه کنید که "اما"موجب می‌شود که به موضوع مهم تفاوت بین محاسبات دقت شود. استفاده از حرف "و" جمله را نادرست نمی‌کرد، ولی توجه‌ای هم برنمی‌انگیخت.

---
[۲] Projection

• **از مترادف‌ها استفاده کنید.**

تکرار کلمات می‌تواند باعث خسته شدن خواننده شود. استفاده از مترادف‌ها می‌تواند مطالب را جذاب‌تر کند. برخی از مترادف‌ها برای نتیجه‌گیری "از این‌رو، پس از این، بنابراین، نتیجه می‌دهد که، درنتیجه، طبق این، ازاین‌قرار، بدین‌گونه"هستند. احتمالا بیشتر مترادف‌ها در به‌کارگیری، اندک تفاوت‌هایی دارند؛ مثلا هر جایی نمی‌شود "پس"را با "آنگاه" جابه‌جا کرد.
مترادف‌ها برای چون، "نظربه‌اینکه، زیرا، ازاینکه، به‌علت، به‌سبب، زیراکه، برای اینکه" هستند.
می‌توان از کلمه استلزام‌آور "فرض کنید" به‌جای استلزام‌ساز "در نظر بگیرید" استفاده کرد. برای مثال،

"فرض کنید X یک مجموعه باشد"

به جای

"در نظر بگیرید که X یک مجموعه باشد."

دقت کنید، می‌گوییم "در نظر بگیرید که" یعنی "که" به دنبال "در نظر بگیرید" می‌آید.

تمرین

۱. آیا با بازنویسی ریاضیات می‌توانید تمرین‌های فصل گذشته را بهبود دهید؟

۲. با استفاده از مطالب این فصل، برخی از پاسخ‌های گذشته‌تان به تمرین‌ها را بازنویسی کنید.

چکیده

- اگر از "اگر" استفاده می‌کنید، آنگاه از "آنگاه" استفاده کنید.
- هر چیزی فرمول نیست، اشیا را با نام خودشان صدا بزنید.
- از کلمه "آن" استفاده نکنید.
- از تقریب‌های اعشاری در ریاضیات محض دوری کنید.
- جمله‌ها را با یک نماد شروع نکنید.
- از نماد استلزام ($\Longrightarrow$) درست استفاده کنید.
- از نمادها و نشانه‌گذاری‌های معمول استفاده کنید و ابتدا آن‌ها را تعریف کنید.
- از عبارات ربط و مترادف‌ها استفاده کنید.

فصل ۵

چگونه مسئله حل کنیم؟

نه اینکه نمی‌توانند راه‌حل را ببینند بلکه توان دیدن مسئله را ندارند.

" جی کی چسترتون [۱]، رسوایی پدر براون، نقطه عطف!"

حل مسئله‌های ریاضی سخت است و هیچ فرمول سحرآمیزی برای حل همه مسئله‌ها وجود ندارد. اگر چنین فرمولی وجود داشت، هر کسی می‌توانست مسئله‌ها را حل کند و کارفرماها برای استخدام ریاضی‌دانان اشتیاقی نداشتند. بااین‌وجود در این فصل، سعی بر آن است که حداقل چند ایده برای چگونه حل‌کردن مسئله‌ها ارائه شود.

قبل از هر چیز بگوییم که بین تمرین و مسئله تفاوت قائل می‌شویم. تمرین، چیزی است که می‌تواند با یک روش معمول حل شود، برای مثال، پیدا کردن ریشه‌های یک معادله درجه ۲ از این نوع است. مسئله، چیزی است که به فکر کردن بیشتری نیاز دارد، برای مثال، باید چند ایده را با هم ترسیم کنیم و شاید از برخی روش‌های معمول که در میان تمرین‌ها یاد گرفته‌ایم استفاده کنیم، مثلا ممکن است برای اینکه پاسخ معادله‌ای را به‌دست آوریم با ترکیب جدیدی از یافتن ریشه روبرو شویم. هر چقدر هم در این کتاب، اصطلاح "تمرین و مسئله" را به‌کار ببریم باز هم مسئله‌ها در تمرین‌ها دسته‌بندی می‌شوند؛ بااین‌وجود دانستن تفاوت این دو مفید است.

برای پاسخ‌گویی به پرسشی در ریاضی مقدماتی، اغلب روش‌ها یا فرمول‌های مستقیم، انتخاب و استفاده می‌شوند؛ اما اگر چنین روشی برای مسئله‌ای در ریاضیات عالی نیز به کار رود، وظیفه ماست که درستی حکم را بررسی کنیم. برای مثال تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد. روش‌های مورد نیاز این نوع مسئله با تمرینی که روش مستقیم را به کار می‌گیرد، تفاوت دارد.

کتاب‌های زیادی در مورد حل مسئله نوشته شده است. خواندن یک یا دو تا از آن‌ها ممکن است ارزشمند باشد، اما به‌تجربه ثابت شده است که بهترین راه برای اینکه یاد بگیریم چگونه مسئله حل کنیم ، مسئله حل‌کردن است. بااین‌وجود **اصولی** هست که می‌تواند در حل مسئله به کار گرفته شود. در این فصل، طرح چهار مرحله‌ای پولیا برای حل مسئله و چند ایده در مورد چگونه به‌کاربستن آن در ریاضیات ارائه می‌شود. باید از ابتدا آگاهانه، نقشه و روش‌ها را به کار ببرید و بعد با تکرار زیاد به‌آرامی آن‌ها را در ذهن ناخودآگاهتان جای دهید.

مسئله‌های نمونه

برای اینکه بتوان در مورد حل مسئله گفتگو کرد به چند مسئله نیاز است؛ لذا سه مسئله مطرح می‌کنیم:

(۱) فاکتوریل یک عدد طبیعی مانند n را می‌توان با حاصل‌ضرب همه اعداد ۱ تا n تعریف کرد. فاکتوریل n را با $n!$ نمایش می‌دهیم و آن را "n فاکتوریل" می‌خوانیم. برای مثال،

$$۵! = ۵ \times ۴ \times \ldots \times ۱ = ۱۲۰.$$

[۱] جی کی چسترتون ($G.K.Chesterton$) زاده ۲۹ مهٔ ۱۸۷۴ ، درگذشته ۱۴ ژوئن ۱۹۳۶، یک روزنامه‌نگار، فیلسوف، شاعر و رمان‌نویس اهل بریتانیا بود. که از کسانی همچون چارلز دیکنز تأثیر پذیرفته و بر کسانی چون گابریل گارسیا مارکز و ماهاتما گاندی تاثیر گذاشته است.

مسئله: در انتهای عدد !۱۰۰ چند تا صفر هست؟

(۲) تعریف عدد اصلی یک مجموعه متناهی را از صفحه ۷ به یاد آورید، دقیقا تعداد اعضای درون مجموعه است.
مسئله: فرض کنید X و Y دو مجموعه متناهی هستند. فرمولی بیابید که $|X|$، $|Y|$، $|X \cup Y|$ و $|X \cap Y|$ را به هم ارتباط دهد.

(۳) نشان دهید که معادله $x^۲ + y^۲ = z^n$ برای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، جواب‌های صحیح مثبت دارد.

تمرین ۱.۵. *قبل از خواندن ادامه مطلب، تلاش کنید این مسئله را حل کنید.*
در مورد اینکه چطور با مسئله‌ها برخورد می‌کنید و چه روش‌هایی را مورد استفاده قرار می‌دهید، بیندیشید. در این مرحله، انتظار نداریم که پاسخ را بیابید؛ مسئله‌ها، مجموعه‌ای است برای اینکه شما به اندیشیدن برسید و درباره اندیشیدن فکر کنید.

مسئله (۱) یک مسئله کلاسیک است. این مسئله نشان می‌دهد که چرا به نگرش ریاضی نیازمندیم. می‌توانید با تلاش !۱۰۰ را با دست محاسبه کنید، اما خیلی زود، بسیار سخت می‌شود. با توسعه نگرش خود نه تنها پاسخ را پیدا می‌کنیم بلکه می‌توانیم استدلال را به محاسبه تعداد صفرهای پایان اعداد بزرگتری چون!۱۰۰۰ ، !۱۰۰۰۰، یا حتی !۹۹ یا !۹۷ نیز گسترش دهیم.

طرح چهار گامی پولیا

کتاب کلاسیکی در مورد حل مسئله با عنوان "چگونه حل کنیم" توسط ج. پولیا نوشته شده است. ایشان برای حل هر نوع مسئله، نه تنها ریاضی، یک طرح چهار نکته‌ای ارائه می‌دهند.

(۱) مسئله را درک کنید.

(۲) یک نقشه طراحی کنید.

(۳) نقشه را اجرا کنید.

(۴) به آنچه انجام داده‌اید فکر کنید.

در نگاه اول، این نقشه بدیهی به نظر می‌رسد، قسمت‌های (۲) و (۳) شک‌برانگیز هستند و شبیه "مسئله را حل کن" دیده می‌شوند. بااین‌حال، بیشتر اوقات مشکلی ایجاد نمی‌کنند. نکته‌هایی که در ادامه آورده می‌شوند با توجه به عنوان‌های این نقشه راه دسته‌بندی شده‌اند. هدف از این نکات کمک کردن است؛ نه اینکه یک فرمول سحرآمیز برای حل مسئله ارائه شود. هیچ فرمول معجزه‌آسایی وجود ندارد! و البته اجبار نیست که گام‌ها به ترتیب اجرا شوند؛ شاید نیاز باشد که آن‌ها را پس‌وپیش کنید.

•درک مسئله

نیاز است که ابتدا مسئله را درک کنیم و در مورد آن کاوش کنیم. خودتان را با آزمایش و اکتشاف متقاعد کنید که یک گزاره خاص، درست است.

•همه کلمات و نمادهای مسئله را درک کنید.

یک مشکل معمول درمورد دانشجویانی که در حل یک مسئله دچار مشکل شده‌اند این است که عبارات را درک نمی‌کنند . وقتی از آن‌ها معنی کلمه معینی را می‌پرسی مطمئن نیستند. مسئله (۲) را در نظر بگیرید؛ اگر ندانید عدد اصلی به چه معنی است یا نماد | | چه معنایی دارد، دیگر امیدی به پاسخ‌دادن به پرسش وجود ندارد.
علت این اشتباهات ساده دانشجویان، تا اندازه‌ای به تجربه‌های قبلی آن‌ها از ریاضیات مربوط می‌شود. ریاضیات پیشرفته نسبت به ریاضی مقدماتی، بیشتر درگیر مفاهیم ادراکی می‌شود. در ریاضی مقدماتی، به‌دلیل طبیعتش با مسئله‌هایی درگیر می‌شوید که با چند عمل خوش‌تعریف می‌توانند حل شوند، مشتق گرفتن با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، مثالی ازاین‌دست

است. در این مسئله‌ها، دانشجویان می‌توانند با استفاده از مثالی کار شده، به‌شکل الگو، تا مراتب بالا هم پیش بروند و واقعا درک درستی از تعریف مشتق نداشته باشند.

باید بدانیم که کلید حل در سطوح بالاتر ممکن است استفاده کردن از شرایط بعضی تعریف‌های خاص باشد. اگر ندانید که تعریف چنین شرطی را فراهم می‌سازد، بعید است بتوانید مسئله را حل کنید. بنابراین اطمینان حاصل کنید که تعریف‌های ضروری را می‌دانید و درک می‌کنید.

•حدس بزنید و از شهودتان استفاده کنید.

حدس زدن خوب است. یا بهتر است بگوییم: حدس‌های مبتنی بر تفکر و دانش خوب هستند. حدس‌های بی‌اساس و عجیب اینطور نیست. برای حل مسئله می‌توانید درک خود را به‌وسیله حدسی حساب شده گسترش دهید. ممکن است تنها یک حدس باشد و برای حل کامل هنوز به روشی نیاز داشته باشد یا مجموعه‌ای از مقادیر که جواب درست در آن نباشد، ولی ارزش تلاش کردن دارد.

تمرین ۲.۵. *در مورد هر یک از سه مسئله بالا، حدس به‌دست آمده چیست؟*

•در مورد فرض و نتیجه چه می‌دانید؟

یک مسئله به دو قسمت تقسیم می‌شود: **فرض و نتیجه**. آنچه در مسئله داده شده است، فرض است، یعنی آنچه می‌دانیم: برای مثال، x، y و z در رابطه $x^۲ + y^۲ = z^۲$ صدق می‌کنند. یا مجموعه‌های A و B متناهی هستند. ازآنجاکه بیشتر اوقات، فرض چند قسمت است، گاهی به جای فرض، به فرض‌های مسئله ارجاع می‌دهیم. **فرض** به التزام نیز مشهور است.

آنچه که می‌خواهیم بدانیم یا آنچه که قصد داریم ارائه دهیم، نتیجه است. به عنوان مثال، می‌توانیم x، y و zی که اعداد صحیح هستند را بیابیم، یا فرمولی مرتبط با عدد اصلی X، Y، $X \cup Y$ و $X \cap Y$ را پیدا کنیم.

یک روش خوب برای حل کردن مسئله‌ها، این است که آنچه در مورد فرض و نتیجه‌ی قضیه می‌دانید را به دنبال هم بنویسید، این کمک می‌کند که ببینید چه چیزی را می‌دانید، و چه چیزی را می‌خواهید بدانید. این ممکن است به ایجاد ایده‌ها کمک کند.

• به عقب برگردید و جلو بروید.

در یافتن حل، نباید با مفروضات شروع کنید و به سوی نتیجه پیش بروید. می‌توانید با نتیجه آغاز کنید و سعی کنید تا حدس بزنید که این بر چه چیزی دلالت دارد. در این روش می‌توان به‌طور مستقیم به سوی مفروضات پیش رفت. یک‌بار بازنویسی روش از فرض به قصد نتیجه، نیز راه‌حل است(هنگامی که راه‌حل روشن شد از فرض به سوی نتیجه بازنویسی کنید.) . برای مثال، اگر !۱۰۰ دقیقا x صفر در انتهایش دارد، این بر چه چیزی دلالت دارد؟ یعنی یک y موجود است که $۱۰^x \times y =$!۱۰۰ و y صفری در انتها ندارد. بنابراین نیاز است که از !۱۰۰، ۱۰ را تا جای ممکن فاکتور بگیریم.

طرز عمل در این روش، یعنی پس‌روی و پیش‌روی، این است که استدلالی را که در میانه راه با آن مواجه می‌شویم ارائه دهیم. خطری که در این روش وجود دارد این است که آنچه اثبات می‌شود را فرض بگیریم. این مسئله در فصل ۲۱ با جزئیات بیشتری بررسی می‌شود.

• کار با حالت‌های نخستین و ویژه

بسیاری از مسئله‌ها، چند شکل اندیس‌گذاری دارند. برای مثال در مسئله (۳)، ممکن است اندیس n، هر عدد طبیعی باشد و باید x، y و z را برای هر n بیابیم. در چنین مسئله‌هایی باید سعی کنید که مسئله را در حالت نخست حل کنید، مثلا n را ۱، ۲ و ۳ بگیرید. لزوما این پاسخ کلی به مسئله نخواهد بود اما اجازه بینش و یک "حس" به مسئله را می‌دهد. در مسئله (۳) می‌بینیم که اگر $n = ۱$ باشد، باید جواب‌های $z = x^۲ + y^۲$ را بیابیم. آسان است، چرا که به ازای هر x و y از اعداد صحیح، $x^۲ + y^۲$ نیز یک عدد صحیح است؛ آن را برابر با z قرار می‌دهیم. برای مثال، فرض کنید $x = ۳$ و $y = ۵$، پس $۳۴ = ۲۵ + ۹ = ۵^۲ + ۳^۲ = x^۲ + y^۲$. لذا $(x, y, z) = (۳, ۵, ۳۴)$ یک جواب است. به خاطر بیاورید

که پرسش خواسته که نشان دهید برای هر n جوابی وجود دارد؛ نباید همه جواب‌های ممکن برای حالت خاصی از n را بیابیم.

برای $n = ۲$، باید $x^۲ + y^۲ = z^۲$ حل شود. این همان معادله فیثاغورس مشهور است، برای همین جواب‌های زیادی مانند $۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$ داریم.

برای $n = ۳$، باید $x^۲ + y^۲ = z^۳$ حل شود. با این مسئله بازی کنید و ببینید آیا می‌توانید از حالت $n = ۲$ برای تهیه یک جواب استفاده کنید؟ فکر نمی‌کنم که پاسخی به شما بدهد؛ آن را البته می‌توانید امتحان کنید. یعنی از پاسخ حالتی برای یافتن پاسخ حالتی دیگر بهره‌مند شوید. ممکن است کار کند یا نکند؛ نکته تلاش کردن است. آیا می‌توانید با روشی متفاوت به مسئله حمله کنید؟

- **با حالت واقعی کار کنید.**

مشابه ایده روش فوق، برای شروع مسئله مثال خاص زیر را می‌بینیم: در مسئله مربوط به مجموعه‌ها، یک مجموعه خاص را در نظر می‌گیریم. پس برای مسئله (۲)،

$$X = \{a, b, c, d\} \ \ , \ \ Y = \{b, d, e, f, g\}$$

را در نظر می‌گیریم. در این حالت می‌بینیم که $|X| = ۴$ و $|Y| = ۵$. همچنین $|X \cup Y| = |\{a, b, c, d, e, f, g\}| = ۷$ و $|X \cap Y| = |\{b, d\}| = ۲$. پس به فرمولی نیاز داریم که ۴، ۵، ۲ و ۷ را به هم مربوط کند. اگر نمی‌توانید الگویی بیابید بهتر است با مثال‌های دیگری کار کنید. مجموعه‌های X و Y را با یک یا دو عضو تغییر دهید و ببینید اعداد اصلی چطور تغییر می‌کنند.

در هر صورت توجه کنید، اینکه قضیه‌ای در یک یا دو حالت خاص اثبات شود برای اثبات کلی آن کافی نیست. در این مورد در فصل‌های بعد بیشتر خواهیم گفت. هدف از بررسی حالت‌های خاص این است که درک بهتری نسبت به مسئله پیدا کنیم و معمولا روشی راهگشاست.

- **یک تصویر رسم کنید.**

ذهن انسان در کار با تصاویر، بسیار خوب کار می‌کند. تصاویر برای ایجاد درک مستقیم درباره یک مسئله و سپس پیشنهاد جوابی برای آن عالی هستند. در واقع در اغلب مسئله‌های هندسی یا فیزیکی، نمودار ضروری است.

در حالت مسئله (۲) رسم یک نمودار ون، بسیار مفید است.

- **درباره یک مسئله مشابه بیندیشید.**

چنان که قبلا گفته شد، روشی مناسب حل یک مسئله می‌تواند در حل مسئله‌های دیگر نیز به کار رود. بیشتر مسئله‌های مشابه پاسخ‌های مشابه دارند. پس مسئله‌هایی با مفروضات یا حکم‌های مشابه را در نظر بگیرید که قبلا حل کرده‌اید؛ ببینید روش مشابه کارمی‌کند؟

در حالت $n = ۲$ از مسئله (۳)، روشی برای ساختن بی‌نهایت جواب وجود دارد؛ این جواب‌ها سه‌تایی‌های فیثاغورسی نامیده می‌شوند. احتمالا، اگر روش پیدا کردن سه‌تایی‌های فیثاغورسی با جواب مسئله سازگار باشد، بررسی آن ارزشمند است. (نمی‌گویم حتما می‌تواند سازگار باشد، ولی ارزش فکر کردن دارد!)

- **یک مسئله معادل را حل کنید.**

فرمول‌بندی دوباره مسئله می‌تواند کمک کند. برای مثال، فرض کنید مسئله نشان‌دادن تساوی دو تابع بوده است. این معادل آن است که تفاضل آن‌ها صفر شود. می‌توان با دقت بیشتری گفت: فرض کنید f و g توابعی با متغیر حقیقی هستند. تابع جدید h را به‌صورت

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین

"برای هر x، $\qquad f(x) = g(x)$"

معادل آن است که "برای هر x، $\qquad h(x) = ۰$".

حال اگر قضیه‌هایی با حکم تساوی دو تابع را به اینصورت ببینیم که تابعی صفر می‌شود، شاید پاسخ را به‌دست آوریم.

- **یک مسئله ساده‌تر حل کنید.**

این مشابه کار با یک مسئله خاص است. با تجربه‌ای که از حل یک مسئله آسان‌تر به‌دست می‌آید، شاید، حل یک مسئله کلی ممکن شود. برای مثال، در مسئله (۱)، شاید کار با !۱۰ آسان‌تر از کار با !۱۰۰ باشد. تلاش کنید و ببینید چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ ممکن است ایده‌هایی به ذهنتان خطور کند. در مسئله (۳)، اگر z فرد یا زوج بود چه اتفاقی می‌افتاد.

- **با کلمات یا نمادها بازنویسی کنید.**

ریاضیات می‌تواند با کلمه‌ها و نمادها شرح داده شود. بیشتر اوقات مبادله بین این دو مفید است. مثال ۵.۲۴ از فصل ۲۴ مثال خوبی ازاین‌دست است. ایده کلمات در مقابل نمادها را دوباره در فصل ۱۶ خواهیم دید.

طرح یک نقشه

حتی اگر مسئله بدیهی است، یک نقشه برای حل آن بنا کنید.

- **مسئله را به چند قسمت تقسیم کنید.**

یکی از اولین چیزهایی که به آن می‌رسیم، تبدیل مسئله به زیرمسئله‌های کوچکتر است؛ به امید آنکه هر زیرمسئله آسان‌تر و ترجیحا تنها یک تمرین باشد. پس مسئله را به حالات بسیار طبیعی ممکن تقسیم کنید.

برای مثال در مشتق‌گیری کمتر دیده می‌شود که تابع یک ضرب ساده مانند $x^۲ \cos(x)$ باشد. بیشتر مثال‌های پیچیده‌تری مانند $x^۳ \cos(x^۲ + ۵) + \exp(\cos(۲x))$ را می‌بینیم که برای مشتق‌گیری از آن باید تعدادی از قواعد متفاوت مانند قاعده ضرب، قاعده زنجیره‌ای و غیره به کار گرفته شود.

پس طبق این قواعد مسئله را به قطعات کوچکتر می‌شکنیم. حال مسئله (۳) را در نظر بگیرید؛ با اعداد طبیعی درگیر است. مجموعه اعداد طبیعی می‌تواند به دو دسته اعداد زوج و فرد تقسیم شود. حالت اعداد زوج را ببینید که به ازای عدد طبیعی چون m، $n = ۲m$. (در حالتی که n فرد است پس به ازای عدد طبیعی چون m، $n = ۲m + ۱$.) معادله به

$$x^۲ + y^۲ = z^{۲m} = (z^m)^۲$$

تبدیل می‌شود. بنابراین چیزی به‌شکل $x^۲ + y^۲ = w^۲$ (که $w = z^m$) داریم. این شبیه حالتی دیده می‌شود که $n = ۲$ است . شاید از روش حل آن حالت استفاده کنیم و به حل مسئله اصلی کمک شود.

پس می‌ببینیم که یک روش خوب برای اثبات تساوی دو مجموعه A و B ، این است که به‌طور جداگانه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ را نشان دهیم. اثبات این که مجموعه‌ای شامل مجموعه‌ای دیگر است آسان‌تر است.

نکته‌ای که در اینجا اهمیت دارد این است که اگر نتوانیم به طور کامل به مسئله پاسخ دهیم، حداقل ممکن است به قسمتی از مسئله پاسخ داده باشیم. معمولا اگر بتوان برای حالتی خاص پاسخ را یافت، احساس انجام کار و سپس دلگرمی ایجاد می‌شود که می‌توان مسئله را نیز مغلوب کرد.

- **سطح درست را بیابید.**

برای حل کردن هر نوع از مسئله‌های ریاضی، سطحی وجود دارد. تعدادی از مسئله‌ها را می‌توان به‌وسیله به‌کارگیری یک قضیه و بعضی را با به‌کارگیری یک تعریف حل کرد. مثال‌های فراوانی ازاین‌دست را در فصل‌های ۴ و ۵ خواهیم دید.

- **هر چیز را نام‌گذاری کنید.**

نام‌گذاری یک شی و به‌کارگیری آن، به بازگرداندن مسئله به زبان ریاضی کمک می‌کند. با این کار کلمه‌ها را به نمادها تبدیل می‌کنیم. به حل مسئله در زبان ریاضی امیدواریم.

برای مثال، فرض کنید مسئله شامل اطلاعاتی از مخزن آبی است که با سرعت $۱۰m^۳$ در ساعت، درحال خالی شدن است. در این حالت حجم آب را با حرف V (البته، برای حجم) نشان می‌دهیم، و سپس می‌توانیم میزان تغییرات حجم را به‌شکل $\frac{dV}{dt} = -۱۰$ (منفی، چون کاهشی است) ثبت کنیم.

- **یک روش اصولی انتخاب کنید.**

دانستن روش‌های استاندارد و به‌کارگیری اصولی و هدفمند آن‌ها مفید است. زمان انتگرال‌گیری از یک تابع، روش‌هایی همچون انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و جانشانی در دسترس هستند. پیش از شروع حل مسئله با توجه به روشی درست که به اصولی بودن آن اطمینان دارید، بپرسید "آیا می‌توان این را با انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء حل کرد؟" اجزا چه چیزی باشند؟ اگر این روش کار نکرد، بپرسید "آیا می‌توان آن را با انتگرال‌گیری جانشانی حل کرد؟" چگونه کار می‌کند؟ و غیره.

برای اثبات یک حکم نیز به طور مشابه عمل کنید. در بخش ۴ روش‌های زیادی از اثبات مانند روش مستقیم، تناقض، عکس نقیض، استنتاج و روش‌های خسته‌کننده دیگر در دسترس ریاضی‌دان است.

اگرچه هر کس می‌تواند روش مستقیم از فرض به حکم را انتخاب کند؛ اما معمولا روش مستقیم، انتخاب مبتدیان است. آزمایش به‌عمد روش‌های دیگر و دیدن اینکه آیا جواب می‌دهند، می‌تواند سازنده باشد. در ادامه بیشتر درباره این روش‌ها بیشتر خواهیم گفت.

اجرای نقشه

حال که نقشه طراحی شده است، نیاز است که اجرا شود. اینجای کار باید ایده‌ای خوبی از اینکه چرا نتیجه درست است داشته باشید؛ بعد با دقت تمرین کنید تا بفهمید با چه چیزی راضی می‌شوید و به آن بپردازید.

- **هر گام را بررسی کنید، از شهود استفاده نکنید.**

درستی هر گام را با دقت و اطمینان بررسی کنید. هر استدلال فقط به اندازه ضعیف‌ترین پیوندش قوی است. اگر حتی یک گام کوچک، نادرست باشد، آنگاه همه‌ی استدلال غلط است. اینک زمان دوری استفاده از شهود فرا رسیده است. اگر فکر می‌کنید چیزی درست است پس از تردید، با استفاده از گام‌های کوچک منطقی آن را اثبات کنید. چگونگی انجام این را در بخش‌های ۲ و ۴ خواهیم دید.

نگاه به عقب

حتی اگر روشی برای مسئله ارائه دهید،هنوز نقشه‌ی حل مسئله تمام نشده است. باید همیشه به آنچه انجام داده‌اید فکر کنید. سرانجام، چه چیزی از حل مسئله آموخته‌اید؟

- **پاسخ را بررسی کنید.**

بازبینی پاسخ اهمیت دارد. اول اینکه، آیا مفهوم را پاسخ می‌رساند؟ ترتیب آن درست است؟ اگر محاسبه کرده‌اید که سرعت ماشین شما در طول سفر یک میلیون کیلومتر در ساعت است، یا فاصله خورشید از زمین ۱۹۹ کیلومتر است، پس غیرممکن است که پاسختان درست باشد.

آزمون‌های دیگر زیادی وجود دارد. برای مثال، مجموع زوایای داخلی مثلثی بیشتر از ۱۸۰ درجه شوند. یک آزمایش ساده دیگر، **محک توازن** است. برای مثال به آسانی و بدون هیچ محاسبه‌ای می‌توان دید معادله $۴۶^۲ + ۳۴^۲ = ۵۱^۲$ غلط است؛ چرا که طرف چپ، فرد و طرف راست، زوج است. این محک توازن است.

ممکن است گاهی حل معادله‌ای سخت باشد، اما در اغلب موارد قراردادن جواب در معادله‌ها برای بررسی درست بودن حل، کار ساده‌ای است. برای مثال، فرض کنید $x = -۳$ را به‌عنوان جوابی برای $۲x^۲ - x - ۱۰ = ۰$ به‌دست آورده‌ایم.

این را به آسانی می‌توان بررسی کرد. مقدار x را در سمت راست جایگزین کنیم و ببینیم آیا صفر می‌شود؟

$$۲x^۲ - x - ۱۰ = ۲(-۳)^۲ - (-۳) - ۱۰ = ۲(۹) + ۳ - ۱۰ = ۱۸ + ۳ - ۱۰ = ۱۱ \neq ۰.$$

پس محاسبات غلط بوده است و $x = -۳$ جواب معادله نیست. ساخت محک‌های مشابهی برای حل معادلات دیفرانسیل نیز ممکن است.

به‌طور مشابه اگر انتگرال تابعی مانند f، F باشد، پس مشتق F باید f شود. این یک آزمایش ساده برای انتگرال‌هاست و ارزش انجام دارد.

جذابیت استفاده از این نوع محک‌ها، رسیدن به شهود، بدون تحلیل راه حل است.

- **راه‌حل دیگری بیابید.**

با وجود یک راه‌حل، ممکن است راه‌حل بهتری نیز وجود داشته باشد؛ پس تلاش کنید مسئله را از راه‌های متفاوت حل کنید. احتمال دارد با انجام این کار روش حل بهتری بیابید، یا عیب راه حل ارائه شده را پیدا کنید. اگر نمونه راه‌حلی دارید، آن را با راه‌حل خود مقایسه کنید.

- **تأمل کنید.**

در حل مسئله‌ها، واقعا تأمل کنید. در مورد مسئله‌ای که حل شده است فکر کنید و پرسش‌هایی مطرح سازید. چه تشابهی بین این راه‌حل و سایر روش‌ها وجود دارد؟ چرا متفاوت است؟ در انجام آن از قضیه یا روش معینی استفاده شده است؟

در مورد آنچه به‌دست می‌آورید، فکر کنید و آن را در اسلحه‌خانه خود قرار دهید، تا اینکه برای حمله به مسئله‌های بعدی آماده باشید. در مورد اینکه چگونه می‌توان حل مسئله را بهبود داد، بیندیشید: چه چیزی می‌تواند ترکیب شود؟ چه چیزی می‌تواند ساده شود؟

در نهایت تلاش کنید که نشان دهید پاسختان نادرست است. ممکن است این پیشنهاد به نظر عجیب برسد، اما کمک زیادی می‌کند که متقاعد شوید پاسختان درست است و بتوانید خطاهای پنهان احتمالی را بیابید.

تمرین

۱. نشان دهید که برای $\circ < a < b$، $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.

۲. نشان دهید که برای اعداد صحیح مثبت a، b و c، $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ca$.

۳. فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{(۱-x)}$. تابع f^r به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f^r(x) = \underbrace{f(f(f(\cdots f(f}_{\text{مرتبه}\, r}(x))))).$$

مقدار $f^{۶۵۳}(۵۶)$ را بیابید.

۴. نشان دهید:

الف) $\sqrt[۸]{۸!} < \sqrt[۷]{۷!}$ و

(ب) $\frac{۱}{۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}} < \sqrt{۱۰۰۰۰۰۱} - \sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}$.

نکته: تلاش کنید خودتان را از جذر گرفتن رها کنید. (روش‌های متفاوت را ببینید).

۵. فرض کنید، سه دوست شامی ۲۵ دلاری خورده‌اند. با مشاهده‌ی صورت‌حساب به اشتباه فکر می‌کنند ۲۷ دلار است، هر کدام ۱۰ دلار به صندوق‌دار می‌دهند و مابقی ۳ دلار را مطالبه می‌کنند. یعنی باید ۲ دلار کمتر از آن‌ها بگیرد. صندوق‌دار ۲۵ دلار را در صندوق می‌گذارد، به هر یک از سه دوست، ۱ دلار می‌دهد و ۲ دلار بیشتر را به‌طور پنهانی نگه می‌دارد. سپس، صندوق‌دار محاسبه‌ای را انجام می‌دهد. دوستان هر کدام $۹ = (۱ - ۱۰)$ دلار پرداخت کرده‌اند که ۲۷ دلار می‌شود و خودش ۲ دلار را برداشته بود، پس در مجموع ۲۹ دلار می‌شود. اما ۳۰ دلار پرداخت کرده‌اند. برای ۱ دلار دیگر چه اتفاقی افتاده است؟

۶. بطری A شامل یک لیتر شیر و بطری B شامل یک لیتر قهوه است. اگر به مقدار یک قاشق از قهوه‌ی داخل B، در A ریخته شود و محتوی A خوب مخلوط شود. سپس مقداری از مایع A را داخل B بریزیم به اندازه‌ای که B یک لیتر مایع داشته باشد. آیا نسبت قهوه به شیر در A بیشتر از نسبت شیر به قهوه در B است؟ یا به صورت دیگری است؟

چکیده

- نقشه چهار نکته‌ای پولیا را به کار ببندید.
- همه کلمات موجود در مسئله را درک کنید.
- حدس بزنید.
- آنچه را در مورد فرض و حکم می‌دانید به دنبال هم بنویسد.
- پس‌رو و پیش‌رو کار کنید.
- یک تصویر رسم کنید.
- در مورد مسئله‌ای مشابه بیندیشید.
- مسئله‌ای هم‌ارز بیابید.
- مسئله را به مسئله‌های کوچکتر تقسیم کنید.
- سطح درست را پیدا کنید.
- اشیا را نام‌گذاری کنید.
- یک روش اصولی انتخاب کنید.
- هر گام را بررسی کنید.
- پاسخ را بررسی کنید.
- جواب دیگری بیابید.
- انعکاس دهید.

بخش دوم

چگونه منطقی بیندیشیم

فصل ۶

ساخت یک گزاره

زمانی که با مردم سروکار دارید، به خاطر داشته باشید که با افراد منطقی سروکار ندارید. با افرادی احساساتی سروکار دارید، کسانی که بسیار متعصب، مغرور و خودبین هستند.

" دیل کارنگی [1]، آیین دوست یابی (چگونه می‌توان دوست پیدا کرد و در دل آن‌ها نفوذ کرد.)"

وقتی به کسی می‌گویم، ریاضی‌دان هستم، خیلی طول نمی‌کشد که از چگونگی منطق ریاضی می‌پرسد. گاهی منطق را کم اهمیت می‌پندارند و این کار را بسیار سخت‌تر می‌کند. گذشته از همه این‌ها، در بخش‌هایی از زندگی اظهارنظر نقش مهمی دارد. نظر دادن بدون دلیل، آسان است ولی بر حق بودن همیشه با منطق ممکن می‌شود.

منطق، ذاتا ساده است، هرچند به سختی شهرت دارد. تعداد کمی از سادگی خارج می‌شوند، که با اجرایی کردن آن‌ها و ساده‌کردن گزاره‌های پیچیده می‌توان به نتیجه مطلوب دست یافت. در چند فصل بعد، بیش از آنکه تأثیر چیستان‌ها و تناقض‌ها یا موارد تکنیکی مانند گزاره‌های ترکیبی و غیره را بررسی کنیم بر استفاده از منطق توسط ریاضی‌دانان در کار روزانه‌شان تمرکز می‌کنیم. هرچند جدول‌های ارزشی به‌ندرت در کار روزانه یک ریاضی‌دان مورد استفاده قرار می‌گیرند ولی تشریح آن‌ها برای مبتدیان بسیار روشنگر است لذا در ادامه به شرح جدول‌های ارزشی خواهیم پرداخت. با توجه به اینکه ریاضیات، مهارت اثبات درست یا غلط بودن گزاره‌های ریاضی است؛ پس قبل از هر چیز گزاره‌ها را ببینید.

گزاره‌ها

با کمال تعجب تعریف کامل و دقیق اینکه معنی یک گزاره ریاضی چیست، سخت است. در این‌جا با مفاهیم بسیار عمیق فلسفی مواجه می‌شویم. هدف این است که ابزاری که یک ریاضی‌دان به‌طور روزانه مورد استفاده قرار می‌دهد را ارائه دهیم، امیدوارم عملی باشد. پس تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱.۶.
*یک **گزاره**، جمله‌ای درست یا غلط است (ولی نه هر دو).*

این تعریف برای هدف ما کافیست. چند مثال:

(آ) "$۴ = ۲ + ۲$"، درست است.

(ب) "همه گربه‌ها خاکستری هستند." گزاره‌ای غلط است، چرا که بعضی گربه‌ها سیاه هستند.

(ج) "تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد." با اثباتی در فصل ۲۲ درست است.

(د) "$۱ = ۰$." گزاره‌ای کاملا کوتاه، که غلط است.

[1] دیل هاریسون کارنگی (*Dale Carengie*) نویسنده و سخنران آمریکایی (۱۸۸۸ـ۱۹۵۵)

(و) ”هر عدد صحیح زوج بزرگتر از ۴، جمع دو عدد اول است“ (**عدد اول**، عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ است که تنها بر ۱ و خودش بخش‌پذیر است). این گزاره **حدس گلدباخ** نام دارد. هیچ کس نمی‌داند که درست است یا نه، اما یک گزاره است، زیرا یکی از این دو، درست یا غلط است.

(ه) ”فرض کنید $x^۲ = ۲$. پس x نمی‌تواند یک عدد گویا باشد.“ این در فصل ۲۳ اثبات می‌شود.

هر جمله‌ای، گزاره نیست، دو جمله زیر این را نشان می‌دهد.

(آ) ”پنجره را باز کن.“

(ب) ”x عددی فرد است.“

جمله‌ی (آ)، یک دستور است و بدون هیچ غرضی روشن است که گزاره نیست.
جمله‌ی

”x یک عدد فرد است.“

بستگی به x دارد، پس بدون اطلاعات بیشتر نمی‌توان درمورد درست یا غلط بودن آن سخن گفت. اگر x، ۳ باشد، پس جمله درست است. اما اگر x، ۵۰ باشد، جمله غلط است. نیاز است که درمورد x بیشتر بدانیم، چون شرطی وابسته به x است، این گزاره را **گزاره شرطی** می‌نامیم.
طبق تعریف، گزاره شرطی که در بالا ارائه شد گزاره نیست. اگرچه گاهی آن‌ها را مصلحتی به‌عنوان گزاره می‌پذیریم. (تظاهر می‌کنیم کسی را داریم که اطلاعات مورد نیازمان درباره x را می‌رساند.) توجه کنید که تعداد زیادی جمله وجود دارد که گزاره هستند، ولی هرگز نمی‌توان در مورد درستی یا نادرستی آن‌ها تصمیم گرفت. برای مثال،

”سال گذشته ۲۰ کیک شکلاتی خوردم.“

این گزاره حتما درست یا غلط است؛ اما راهی نیست (به جز مساعدت ماشین زمان) که بتوان درست یا غلط بودن آن را روشن کرد.
قسمت مهم تعریف این است که گزاره‌ها درست یا غلط هستند ولی بین این دو گزاره درست یا گزاره غلط، گزاره دیگری وجود ندارد. این قاعده را در زبان می‌توان **قانون منع میانه** خواند. با قانون منع میانه امکان دروغگویی نیست.

- **یک مثال مهم**

مثالی حرفه‌ای‌تر از یک جمله که گزاره نیست

”این جمله غلط است.“

جمله‌ای خوب و حتی شاید یک ادعا به نظر برسد. درست است یا غلط؟
ابتدا فرض کنیم جمله درست است. پس این جمله می‌گوید که جمله غلط است و این با فرض ما که جمله درست است در تناقض است. لذا این جمله نمی‌تواند درست باشد.
حال فرض کنیم که جمله غلط است. پس این جمله که جمله غلط است، درست است. اما، وقتی جمله درست است، با فرض اینکه جمله غلط است تناقض دارد. بنابراین می‌بینیم که هر چیزی می‌توان فرض کرد و گاهی آنچه در نظر می‌گیریم، فرض را نقض می‌کند. پس نمی‌توان تصمیم عاقلانه‌ای گرفت که جمله درست است یا غلط؛ لذا چنین جمله‌ای گزاره نیست. (این مشکل از آنجا که جمله‌ای خود ارجاع است، یعنی به خودش برمی‌گردد، رخ می‌دهد. در چنین جملاتی، چیزهای عجیبی می‌تواند اتفاق بیفتد! برای بحثی مفصل‌تر، کتابی در رابطه با منطق را مطالعه کنید.)
برای اینکه درک ریاضی بهتری داشته باشیم، جهت تفکیک جمله‌ها از حروف استفاده می‌کنیم. پس از ”گزاره A“ و غیره صحبت خواهیم کرد.

تمرین ۶.۱.
کدام یک از جملات زیر گزاره‌اند؟ توضیح دهید.

(آ) *مریم میرزاخانی[۲]، ریاضی‌دان بود.*

(ب) *مریم میرزاخانی، ایرانی بود.*

(پ) *عدد $\sqrt{۲}$، گویاست.*

(ج) *ریشه‌ی دوم یک عدد صحیح، گویاست.*

(د) $۳x^۲ + ۲۰x - ۵ = ۰$.

(ذ) *عدد x را صحیح فرض کنید. پس $\sqrt{x}$ گویاست.*

(و) *عددی مانند x وجود دارد به طوری که $\sin(x) = x$.*

(ه) *تعداد نامتناهی عدد طبیعی وجود دارد.*

(ی) *تعداد نامتناهی عدد گویا وجود دارد.*

- **استفاده از مثال‌های غیر ریاضی**

منطق مجرد است، لذا فهم آن می‌تواند سخت باشد. برای ساده ساختن آن از گزاره‌های ریاضی یا گزاره‌هایی از زندگی روزمره استفاده می‌کنیم. برای مثال، باتوجه‌به اینکه عباس دوران[۳] متولد شیراز بود. پس حقیقت اساسی را می‌دانیم

”عباس دوران ایرانی است.“

همچنین می‌توان گفت:

”فردوسی، یک شاعر و حماسه سرای بزرگ است.“

این‌ها و آنچه در ادامه خواهیم دید برای تشخیص حرفه‌ای ریزنکه‌های منطقی مفید است. ماهرانه صحبت کنید، در تمرین زیر، با بهره از زبان روزمره گفتاریتلاش کنید و توانمندی‌های منطقی خود را بیازمایید.

تمرین ۲.۶.

در تصویر (شکل ۱.۶)، سه سکه روی میز وجود دارد؛ با شمردن آن‌ها می‌بینید که دقیقا سه تا هستند. کدام یک از جملات زیر درست است؟

(آ) *چهار سکه روی میز است.*

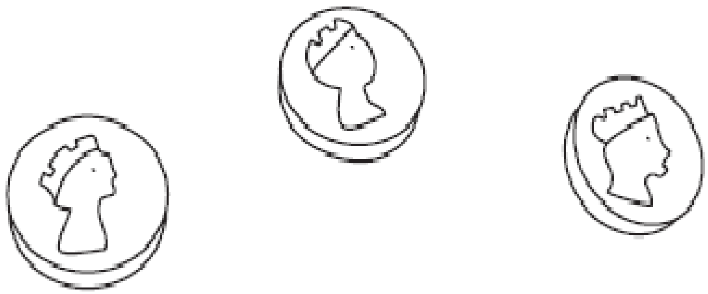
(ب) *دو سکه روی میز است.*

(ج) *سه سکه روی میز است.*

(د) *یک سکه روی میز است.*

[۲] مریم میرزاخانی (۲۲ اردیبهشت ۱۳۵۶ – ۲۳ تیر ۱۳۹۶ه.ش)ریاضی‌دان ایرانی و استاد دانشگاه استنفورد بود. میرزاخانی در دوران تحصیل در دبیرستان برنده مدال طلای المپیاد جهانی ریاضی در سال‌های ۱۹۹۴م. (هنگ‌کنگ) و ۱۹۹۵م. (کانادا) شد و در این سال به‌عنوان نخستین دانش‌آموز ایرانی نمره کامل را به‌دست آورد. وی نخستین دانش آموز ایرانی بود که دو سال مدال طلا گرفت. از ایشان به‌عنوان یکی از ده ذهنِ جوان برگزیده سال ۲۰۰۵م. از سوی نشریه پاپیولار ساینس در آمریکا و ذهن برتر در رشته ریاضیات تجلیل شد. در سال ۲۰۱۴م. به خاطر کار بر «دینامیک و هندسه سطوح ریمانی و فضاهای پیمانه‌ای آن‌ها» برنده مدال فیلدز شد، که بالاترین جایزه در ریاضیات است. وی تا سال ۲۰۲۴م. تنها زن و اولین ایرانی برنده مدال فیلدز است. تحقیقات او مشتمل بر نظریه تایشمولر، هندسه هذلولوی، نظریه ارگودیک و هندسه هم‌تافته بود. روز تولد مریم میرزاخانی ۲۲ اردیبهشت (دوازدهم مه) از سوی اتحادیه بین‌المللی انجمن‌های ریاضی جهان با پیشنهاد کمیته بانوان انجمن ریاضی ایران به عنوان روز جهانی زن در ریاضیات نام‌گذاری شد.

[۳] شهید عباس دوران زاده ۲۰ مهر ۱۳۲۹ در شیراز، درگذشته ۳۰ تیر ۱۳۶۱ در بغداد، از خلبانان نیروی هوایی ایران بود که در ماه‌های آغازین جنگ ایران و عراق نقش مهمی در بمباران اهداف دشمن ایفا کرد.



شکل ۶.۱: دقیقا سه سکه روی میز

در مورد آن فکر کنید! بله، همه آن‌ها به غیر از (آ) درست هستند. گزاره (آ) به‌روشنی غلط و گزاره (ج) به‌روشنی درست است. گزاره‌های (ب) و (د) می‌توانند مشکلاتی ایجاد کنند. گزاره (ب) را در نظر بگیرید. می‌دانیم که سه سکه روی میز است چرا که آن‌ها را شمرده‌ایم. پس باید دو سکه و یک سکه دیگر داشته باشیم؛ به‌ویژه دو عدد سکه را داریم. با استدلالی مشابه، می‌توان درست بودن (د) را نشان داد.

نکته این است که گزاره "دو سکه روی میز است." درست است اما گمراه‌کننده است چرا که خلاف عادت‌های زندگی روزمره ماست. اگر بپرسید "چند سکه روی میز است" و من بگویم "دو تا"، فکر کنم همه قبول دارند که شما را گمراه کرده‌ام. برای پیشگیری از این مشکل، از عبارت "دقیقا سه سکه روی میز است" استفاده می‌کنیم. نیاز است که آگاهانه به چگونه خواندن گزاره‌ها توجه کنید.

نقیض

تعریف ۲.۶.
نقیض گزاره A، گزاره‌ای است که وقتی A درست باشد غلط است .

برای مثال

"مریم میرزاخانی یک ریاضی‌دان ایرانی نبود."

نقیض

"مریم میرزاخانی یک ریاضی‌دان ایرانی بود."

است. نقیض "x فرد است" می‌شود "x فرد نیست". (البته می‌توان با بیان دیگری گفت "x زوج است".)

نقیض گزاره A به‌صورت "نقیض A" نوشته می‌شود. پس "نقیض (x فرد است)" باتوجه‌به مطالب فوق "x فرد نیست" است. کتاب‌های تخصصی منطق اغلب، از $\sim A$ ($\neg A$) به جای (نقیض A) استفاده می‌کنند.

- **اخطار!**

توجه کنید نقیض "همه گربه‌ها خاکستری هستند"، "همه گربه‌ها خاکستری نیستند" نیست. تعریف نقیض را به یاد داشته باشید، وقتی A درست باشد، نقیض A غلط است. برای اینکه گزاره "همه گربه‌ها خاکستری هستند" غلط باشد، تنها نیاز است که یک گربه غیرخاکستری داشته باشیم، برای مثال، یک گربه سفید باشد. پس می‌خواهیم که "گربه‌ای وجود دارد که خاکستری نیست" درست باشد. مثال‌های بیشتری در فصل ۱۰ بیان می‌شود.

گزاره "نقیض (نقیض A)" با گزاره A یکسان است. یک نقیض مضاعف است که یک مثبت می‌سازد. در بعضی زبان‌ها مانند زبان انگلیسی یک نقیض مضاعف برای تایید و اهمیت یک گزاره به کار می‌رود و گزاره مثبتی نمی‌سازد.

جدول ارزشی

زمان یادگیری منطق، جدول‌های ارزشی به شدت مفید هستند. بی‌شک ریاضی‌دانان در کار روزانه از آن‌ها استفاده نمی‌کنند ولی برای مبتدیان راه‌گشا خواهند بود. هدف این است که همه احتمالات درست یا غلط بودن گزاره‌ای دلخواه به‌طور خلاصه در یک جدول بیان شود. به‌ویژه جدول ارزشی برای "نقیض" ساده است (جدول ۱.۶). در این‌جا T به

جدول ۱.۶

A	$\sim A$
T	F
F	T

معنی درست و F به معنی غلط است. اطلاعات در طول سطر خوانده شود. پس روی خط دوم، می‌بینیم که اگر گزاره A درست باشد (با T مشخص شده است)، آنگاه نقیض A غلط است (با F نشان داده شده است). در خط سوم می‌توان دید A غلط است یعنی اینکه نقیض A درست است. می‌توان ستون اول را به‌عنوان ورودی و ستون دوم را به‌عنوان خروجی دید. اگر F ورودی باشد، آنگاه T خروجی است.

مثال ۱.۶.

جدول ارزشی نقیض (نقیض A) را می‌بینیم (جدول ۲.۶ و ۳.۶):

با رسم جدول ۲.۶ شروع می‌کنیم. بعد جدول ۳.۶ را ارائه می‌دهیم. وقتی "نقیض A" غلط است، پس با استفاده از

جدول ۲.۶

A	$\sim A$	$\sim(\sim A)$
T	F	
F	T	

جدول ۳.۶

A	$\sim A$	$\sim(\sim A)$
T	F	T
F	T	F

جدول ارزشی برای نقیض، می‌دانیم که نقیض (نقیض A) درست است. بنابراین در پایان خط دوم، یک T ثبت می‌کنیم. به‌طور مشابه برای خط سوم یک F ثبت می‌شود.

از اینکه ستون‌های اول و سوم یکسان هستند، نتیجه می‌گیریم که گزاره‌های "A" و "نقیض (نقیض A)" معادلند، یعنی در اصل یک گزاره هستند.

"و" و "یا"

با استفاده از "و" و "یا" می‌توان گزاره‌ها را ساخت و باتوجه‌به اینکه گزاره‌ها را به هم مرتبط می‌کنند، به آن‌ها رابط گفته می‌شود.

- **استفاده از "و" در گزاره‌ها**

حرف ربط "و"، ساده‌ترین رابط هر زبان استاندارد است. مثال زیر را در نظر بگیرید:

"مداد آرش سیاه است و مداد علی قرمز است."

این گزاره زمانی درست است که آرش مدادی سیاه و علی مدادی قرمز داشته باشد. در هر حالت دیگری این گزاره غلط است. پس اگر مداد آرش آبی باشد، آنگاه رنگ مداد علی اهمیتی ندارد، و گزاره غلط است. به‌طور مشابه هرگاه مداد علی، قهوه‌ای و مداد آرش سیاه باشد، گزاره غلط است.
توجه کنید که برای ساخت جدول ارزشی "و"، دو ورودی A و B (رنگ‌های مدادها) موجود است. باتوجه‌به اینکه هر یک از آن‌ها می‌توانند به‌صورت مستقل درست یا غلط باشند، پس چهار احتمال داریم: هر دو غلط، A غلط و B درست، A درست و B غلط و در نهایت هر دو درست باشد. جدول ارزشی "و" با استفاده از گزاره‌های A و B به‌صورت جدول ۴.۶ است.

جدول ۴.۶

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

به هر حال می‌توان دید که اگر فقط یکی از A یا B غلط باشد، آنگاه گزاره "A و B" غلط است. پس برای درستی گزاره مرکب نیاز است هر دو درست باشند.
در این جدول، دو ستون اول، ورودی و ستون آخر خروجی است. توجه کنید که اگر سه ورودی داشته باشیم، آنگاه $۸ = ۲^۳$ حالت متفاوت برای ورودی‌های درست و غلط خواهیم داشت.

توجه ۱.۶.

منطقیون از $\wedge$ برای نشان دادن "و" استفاده می‌کنند، یعنی گزاره "A و B" به‌صورت $A \wedge B$ نوشته می‌شود.[۴]

حالا می‌توان از جدول‌های ارزشی برای تحلیل عبارات پیچیده‌تر استفاده کرد. برای مثال، چه زمانی " A و نقیض B" درست است؟ ابتدا قسمت‌های مجزای A، B و نقیض B را به‌دست می‌آوریم و سپس گزاره‌ای که می‌خواهیم را می‌سازیم (جدول ۵.۶).

جدول ۵.۶

A	B	$\sim B$	$A \wedge (\sim B)$
F	F	T	F
F	T	F	F
T	F	T	T
T	T	F	F

توجه کنید که در ستون سوم، نقیضB با استفاده از جدول ارزشی "نقیض" ایجاد می‌شود. با استفاده از جدول ارزشی "و" و با به‌کارگیری آن برای "A" و "نقیض B"، یعنی ستون‌های ۱ و ۳، ستون پایانی ساخته می‌شود.

•استفاده از "یا" در گزاره‌ها

در مقایسه با "و"، استفاده از "یا" با استفاده آن در دستور زبان کمی متفاوت است. برای مثال، جمله

"علی یا رضا درحال رفتن به فروشگاه هستند."

[۴] منطق‌دانان پا را فراتر نهاده و نام‌های عطفی و فصلی را به ترتیب برای "و" و "یا" به کار می‌برند.

معمولاً این معنی را می‌دهد که فقط یکی از آن‌ها درحال رفتن به فروشگاه است، نه هر دو. این حالت از "یا" را **یا مجزا** گویند. باور این است که اگر یک قسمت درست بود، مانع درست بودن قسمت دیگر می‌شود.

در ریاضیات، جمله‌ی بالا به این معنی است که حداقل یکی از آن‌ها (ممکن است هر دو) درحال رفتن است. این را **یا منطقی** می‌گویند.

معمولاً در زبان روزمره، یا مجزا و یا منطقی از هم قابل تشخیص نیستند؛ ولی هر کس می‌تواند باتوجه‌به عبارت یا جمله نوع یا را حدس بزند. در ریاضیات از یا منطقی استفاده می‌شود، یعنی در جمله بالا می‌دانیم یکی از آن‌ها درحال رفتن به فروشگاه است. جمله

"فرض کنید m یا n فرد است."

یک ریاضی‌دان نمی‌گوید که یکی از آن‌ها فرد است و دیگری نیست! بلکه می‌گوید: یکی از آنها فرد است و دیگری می‌تواند زوج یا حتی فرد باشد. مطمئن نیستم این با آنچه در دستور زبان است شباهتی نداشته باشد ولی باید دقیق بود. حتی بیشتر در جملات مجزا، به اشتباه از "یا" استفاده می‌شود. برای مثال:

"فرض کنید x یک عدد طبیعی باشد. آنگاه x زوج یا فرد است."

در این حالت "یا" به‌ویژه مجزاست. زیرا خاصیت فرد یا زوج بودن مجزاست، یعنی یک عدد نمی‌تواند در یک زمان هم زوج و هم فرد باشد. حالا استفاده رابط را در مثال مداد در نظر بگیرید:

"مداد آرش سیاه یا مداد علی قرمز است."

اگر مداد آرش سیاه باشد، گزاره درست خواهد بود. اگر مداد علی قرمز باشد، باز هم درست است. و گزاره درست است اگر مداد آرش، سیاه و مداد علی، قرمز باشد. جدول ارزشی "یا" را برای روشن شدن مطلب، ببینید (جدول ۶.۶). برای جدول، می‌بینیم که "A یا B" فقط زمانی غلط است که A و B هر دو غلط باشند.

جدول ۶.۶

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

✍ **توجه ۲.۶.**
منطقیون از $\vee$ برای نشان دادن "یا" استفاده می‌کنند. جمله‌ی "B یا A " به‌صورت $A \vee B$ نوشته می‌شود.

هم‌ارزی گزاره‌ها

حالا که گزاره‌ها تکمیل شده‌اند، می‌توان هم‌ارزی را تعریف کرد.

تعریف ۳.۶.
هرگاه ورودی و خروجی جدول‌های ارزشی دو گزاره، یکسان باشند، دو گزاره را **گزاره‌های هم‌ارز** *گوییم.*

مثال ۲.۶.

(آ) *جدول ارزشی گزاره A و گزاره نقیض(نقیض A) به‌صورت جدول‌های ۷.۶ و ۸.۶ خلاصه می‌شود. پس A و نقیض (نقیض A) گزاره‌های هم‌ارز هستند.*

(ب) *گزاره‌های "A یا B" و "A و B" هم‌ارز نیستند زیرا جدول‌های ارزشی آن‌ها متفاوت است.*

جدول ۷.۶

A	A
T	T
F	F

جدول ۸.۶

A	$\sim(\sim A)$
T	T
F	F

نقیض "و" و "یا"

نقیض "و" و "یا" با آن‌ها تشابه مرتبی دارند:
"نقیض (A و B)" با "(نقیض A) یا (نقیض B)" هم‌ارز است و
"نقیض (A یا B)" با "(نقیض A) و (نقیض B)" هم‌ارز است.
برای دیدن اولی، نقیض گزاره

"علی بلند قد است و رنگ موهای او مشکی است."

را در نظر بگیرید.
می‌توان دید که لااقل یکی از گزاره‌های "علی بلند قد است."و "رنگ موهای علی مشکی است." باید غلط باشد، بنابراین می‌بینیم حداقل یکی از گزاره‌های "علی بلند قد نیست" و "رنگ موهای علی مشکی نیست."درست است. به‌عبارت‌دیگر، "علی بلند قد نیست یا رنگ موهای علی مشکی نیست" درست است. (به یاد داشته باشید که این شامل حالتی که هر دو درست هستند نیز می‌شود!)
می‌توان برای نقیض "یا" استدلالی مشابه را به کار برد. مثال بزنید.
درحالت‌کلی، با استفاده از جدول‌های ارزشی می‌توان نشان داد که "نقیض (A و B)" با "نقیض A یا نقیض B" هم‌ارزند (جدول ۹.۶).

جدول ۹.۶

A	B	$A \wedge B$	$\sim A$	$\sim B$	$(\sim A) \vee (\sim B)$	$\sim (A \wedge B)$
F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T
T	T	T	F	F	F	F

دو ستون آخر "نقیض (A و B)" و "(نقیض A) یا (نقیض B)" را نمایش می‌دهند. باتوجه به یکسان بودن ستونها می‌توان نتیجه گرفت که گزاره‌ها هم‌ارز هستند.

تمرین ۳.۶.
جدول ارزشی بسازید که نشان دهد

"نقیض (A یا B)" با "(نقیض A) و (نقیض B)"

معادل است.

تمرین

۱. کدام یک از عبارات زیر گزاره هستند؟ کدام یک گزاره‌های درست هستند؟

(آ) زندگی شیرین است.
(ب) آیا عدد ۲، یک عدد اول است؟
(ج) نشان دهید ۲ یک عدد اول است.
(د) در سال ۱۳۶۵ رئیس جمهور یک مرد بود.
(و) رئیس جمهور ایران در سال ۲۰۵۰ یک زن خواهد بود.

۲. جدول‌های ارزشی را برای عبارات زیر بسازید.

(آ) نقیض (A و B)
(ب) نقیض (A یا B)
(ج) (نقیض A) یا (نقیض B)
(د) A یا (نقیض B)
(و) (نقیض B) یا B
(ه) (نقیض B) و B

۳. نقیض جملات زیر را بنویسید.

(آ) A درست است یا B غلط است.
(ب) A غلط است و B درست است.
(ج) A درست است یا B درست است.
(د) A درست است و B درست است.

۴. این تمرین، مثالی برای جدول‌های ارزشی، با ورودی‌های بیشتر است. جدول‌های ارزشی عبارات زیر را بسازید.

(آ) (C یا B) و A،
(ب) C یا (B و A)،
(ج) C و (نقیض (B یا A)).

۵. یک **راستگو**، گزاره‌ای است که همه خروجی‌های جدول ارزشی آن درست است. یک **دروغگو**، گزاره‌ای است که همه خروجی‌های جدول ارزشی آن غلط است.

(آ) نشان دهید که "A یا نقیض A" گزاره‌ای راستگو است.
(ب) با استفاده از رابط "و" گزاره‌ای راستگو بنویسید.
(ج) آیا عبارت "برنده‌ها تسلیم نمی‌شوند و تسلیم‌شده‌ها برنده نمی‌شوند" گزاره‌ای راستگو است؟
(د) نشان دهید که "A و نقیض A" یک گزاره دروغگو است.
در بخش ۴ کتاب، دروغگو بسیار مفید خواهد بود.

چکیده

- یک گزاره جمله‌ای است که درست است یا غلط، ولی نه هر دو.
- قانون منع میانه: گزاره‌ها درست یا غلط هستند؛ چیزی بین این دو وجود ندارد.
- نقیض گزاره A، گزاره‌ای است که هرگاه A درست است، غلط است.
- گزاره‌ها می‌توانند با رابط‌های "یا" و "و" ساخته شوند.
- هرگاه دو گزاره جدول‌های ارزشی یکسان داشته باشند، هم‌ارزند.
- "نقیض (A و B)" با "(نقیض A) یا (نقیض B)" معادل است.
- "نقیض (A یا B)" با "(نقیض A) و (نقیض B)" معادل است.

فصل ۷

استلزام‌ها

ریاضیات شامل گزاره‌هایی است به شکل: "P نتیجه می‌دهد Q را"
اما هرگز نمی‌پرسید آیا P درست است یا خیر.

" برتراند راسل [۱] "

آنچه از راسل در بالا نقل شد به‌صراحت درست است؛ ریاضیات مدرن بر اساس گزاره‌هایی به‌شکل گزاره P نتیجه می‌دهد گزاره Q را، ساخته شده است. یعنی

"اگر گزاره P درست باشد، آنگاه گزاره Q نیز درست است."

هر چند معمولا این ساختار پنهان است. در واقع اگر بخواهیم گزاره‌ها را برای درک بهتر همیشه به‌صورت بالا بنویسیم، خواندن آن سخت می‌شود.

قسمت دوم گفته‌ی راسل نیز درست است ولی بسیار ماهرانه‌تر بیان شده است. می‌توان در مورد گزاره "ماه از پنیر ساخته شده است نتیجه می‌دهد که ماه یک لقمه خوشمزه است" گفتگو کرد که درست است، زیرا هرگاه ماه، پنیر باشد، پس خوشمزه است. نکته این است که گزاره مفاهیمی می‌سازد و درست است. درحالی‌که در مورد اینکه آیا واقعا ماه با پنیر ساخته شده است؟ یا واقعا یک لقمه پنیری است؟ چیزی نمی‌گوید. تنها می‌گوید که اگر آن پنیری باشد، آنگاه خوشمزه است. به یاد داشتن این مثال ارزشمند است.

ما درحالت‌کلی به‌جای P و Q راسل، از A و B برای نشان دادن گزاره‌ها استفاده می‌کنیم.

گزاره‌های" اگر ....، آنگاه ..."

بیشتر گزاره‌های ریاضی به شکل

"اگر گزاره A درست باشد، آنگاه گزاره B درست است."

هستند.

ممکن است به نوعی پنهان شده باشند، ولی زمانی که آن‌ها را می‌شکنید، کار انجام می‌شود و این چیزی است که یافته‌اید. این نوع گزاره‌ها را یک استلزام می‌نامند. می‌گویند A، B را نتیجه می‌دهد و بعضی اوقات می‌نویسند: $A \Longrightarrow B$. لطفا در مورد استفاده صحیح از این نماد به فصل ۴ مراجعه کنید.

مثال ۱.۷.

(آ) *اگر من مریم میرزاخانی هستم، آنگاه من ایرانی‌ام.*

---

[۱] برتراند راسل (*Bertrand Russell*) زاده ۱۸۷۲ و درگذشته ۱۹۷۰ فیلسوف، منطق‌دان، ریاضی‌دان، مورخ، جامعه‌شناس، برنده جایزه نوبل و فعال صلح‌طلب بریتانیایی بود.

(ب) *اگر من ایرانی‌ام، آنگاه مریم میرزاخانی هستم.*

(ج) *اگر من مریم میرزاخانی هستم، آنگاه من اولین بانوی برنده جایزه فیلدز ریاضی هستم.*

(د) *اگر* $a < b$*، آنگاه* $a^2 < b^2$.

(و) *اگر* $a < c$*، آنگاه* $a < b$.

(ه) *اگر* x *زوج باشد، آنگاه* x^2 *زوج است.*

گزاره‌های (آ) و (ج) درست هستند. گزاره (ب) درست نیست چرا که هر شخص ایرانی که مریم میرزاخانی نیست. گزاره‌های (د) و (و) به شرایط a، b و c بستگی دارند. (پس در حقیقت گزاره‌های درست نیستند.) گزاره (ه) درست است، احتمالا دلیلش را می‌دانید؛ در ادامه آن را اثبات خواهیم کرد. گزاره‌های استلزام ممکن است به‌شکل پنهان باشند. برای مثال در نظر بگیرید:

"جمع دو عدد زوج، زوج است."

این را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

"اگر x و y دو عدد زوج باشند، آنگاه $x + y$ یک عدد زوج است."

به‌طور مشابه، گزاره

"همه اعداد اول بزرگتر از دو، فرد هستند."

را می‌توان به‌صورت

"اگر p یک عدد اول باشد و $p > 2$، آنگاه p فرد است."

نوشت.

فرض (انگاشته) و حکم

در یک استلزام $A \Longrightarrow B$، دو قسمت موجود است:
- گزاره A که فرض یا انگاشته نامیده می‌شود.
- گزاره B که حکم نام دارد.

بنابراین گوییم: "اگر فرض درست باشد، آنگاه حکم درست است."

گاهی گزاره A ترکیبی از تعدادی گزاره است. پس به فرض‌ها و انگاشته‌ها رجوع می‌کنیم و آن‌ها را شرایط نیز می‌خوانیم.

در مثال بالا، "من مریم میرزاخانی هستم" و "$a < b$" مثال‌هایی از انگاشته‌ها هستند. دقت کنید که در (و)، گزاره "$a < b$" نیز یک حکم است. بعضی اوقات ممکن است یافتن فرض و حکم سخت باشد.

"فرض کنید که x یک عدد طبیعی مثبت است. اگر x فرد باشد، آنگاه x^2 فرد است."

در این‌جا چه چیزهایی فرض هستند؟ مفروضات، "x عدد طبیعی مثبت است که فرد است" می‌باشند. شیوه‌ای دیگر برای نوشتن این گزاره به‌صورت زیر است:

" x یک عدد فرد مثبت است $\Longrightarrow$ x^2 فرد است. "

همان‌طور که می‌بینید روش‌های زیادی برای نوشتن یک مطلب وجود دارد.

تمرین ۱.۷. *فرض‌ها و حکم‌ها را در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید.*

(آ) *اگر* $x^{۲} > ۵$*، آنگاه* $x^{۳} + ۱۲x + ۴ < ۳$.

(ب) *داریم:* $x^{۲} + ۱ > ۳$ *اگر* $\sqrt{۲} > x$.

(ج) *فرض کنید* T *یک مثلث قائم‌الزاویه باشد. اگر* c *وتر و* a *و* b *دو ضلع دیگر باشند، آنگاه* $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$.

(د) *در نظر بگیرید که* T *یک مثلث باشد. فرض کنید اضلاع آن به طول* a*،* b *و* c *و زاویه روبروی* a *مساوی* θ *است. آنگاه* $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲bc\cos\theta$.

راستی A و B، وقتی A، B را نتیجه می‌دهد.

حالا به گفته راسل که در ابتدای فصل آوردیم، برمی‌گردیم و مثال اول را در نظر می‌گیریم: "ماه از پنیر ساخته شده است، نتیجه می‌دهد که ماه یک لقمه خوشمزه است." فرض این است که ماه از پنیر ساخته شده و در نتیجه لقمه خوشمزه‌ای است. امیدوارم موافق باشید که هیچ یک از این گزاره‌ها درست نیستند، پس می‌توان به این رسید که استلزام درست است. این ما را به فهمیدن اساسی‌ترین حقیقت درباره استلزام سوق می‌دهد.

"$A \Longrightarrow B$" هیچ چیزی در مورد درستی یا نادرستی A و B نمی‌گوید.

نمی‌توان بیش از این تأکید کرد که چگونه درک آن، برای فهم این مهم، حیاتی است.

با فرض اینکه $A \Longrightarrow B$ درست باشد، سه احتمال داریم:

(۱) A درست و B نیز درست است.

(۲) A غلط و B نیز غلط است.

(۳) A غلط و B درست است.

A نمی‌تواند درست باشد در حالی‌که B غلط است، زیرا $A \Longrightarrow B$ به این معنی است که اگر A درست باشد، آنگاه B نیز درست است.

احتمال اول می‌تواند رخ دهد. اگر من مریم میرزاخانی هستم، آنگاه من ایرانی‌ام. دومین احتمال می‌تواند رخ دهد: فرض کنید گزاره A، $۲ = ۱$ و گزاره B، $۶ = ۵$ باشد. آنگاه می‌توان دید $A \Longrightarrow B$ درست است، زیرا اگر $۲ = ۱$ درست باشد با اضافه کردن ۴ به دو طرف، می‌بینیم که $۴ + ۲ = ۴ + ۱$، یعنی $۶ = ۵$. پس این احتمال می‌تواند رخ دهد. سومین احتمال به نظر دور از عقل است. بسیاری از مبتدیان تصور می‌کنند که گزاره‌های غلط هرگز نمی‌توانند به گزاره‌های درست برسند، اما این‌طور نیست! بله، گویی یک سفسطه معمول است.

گزاره‌های غلط می‌توانند به گزاره‌های درست برسند.

پیش از این، توجه کردیم که "$A \Longrightarrow B$" چیزی درباره درستی A یا B نمی‌گوید. هرچند اینکه گزاره‌های غلط می‌توانند به گزاره‌های درست برسند، به‌طور صریح هیچ ارزشی ندارد. برای مثال فرض کنید که $-۱ = ۱$؛ واضح است که درست نیست، اما، ما ریاضی‌دان هستیم و می‌توانیم آنچه را دوست داریم، فرض بگیریم. با مجذورکردن (به توان ۲ رساندن) دو طرف، $۱ = ۱$ به‌دست می‌آید، که درست است. بنابراین

$$\text{“}-۱ = ۱ \Longrightarrow ۱ = ۱\text{”}$$

درست است. این اهمیتی ندارد که $-۱ = ۱$ غلط است.

در حقیقت، با استفاده از تنها یک گزاره غلط می‌توان هر چیزی را اثبات کرد. این مورد را برای کتاب‌های منطق باقی می‌گذاریم.

جدول ارزشی $A \Longrightarrow B$

چه چیزی از جدول ارزشی استلزام(جدول ۱.۷)، خوب به نظر می‌رسد؟
دو خط پایانی واضح است. (مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید! متن را بررسی کنید!) فهم دو تا دیگر سخت‌تر است. به

جدول ۱.۷

A	B	$A \Longrightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

نوعی آن‌ها تعریفی از جدول ارزشی هستند. از طرف دیگر، می‌توانند معنی داشته باشند زیرا اگر A غلط باشد، آنگاه B اجازه دارد هر چیزی باشد، بنابراین می‌توانیم بگوییم $A \Longrightarrow B$ درست است وقتی A غلط است.

تمرین ۲.۷. *نشان دهید که جدول‌های ارزشی $A \Longrightarrow B$ و "B یا نقیض (A)" معادلند.*

نقیض " اگر ...، آنگاه ..."

باتوجه‌به اینکه $A \Longrightarrow B$ یک گزاره است، می‌توان پرسید نقیض آن چیست؟ پاسخ روشن این است که می‌گوید، A، B را نتیجه نمی‌دهد. این به چه معنی است؟ و آیا گزاره منطقی درست است؟ این یعنی اینکه A درست است و در همان زمان B غلط است. این "نقیض B و A" است.
با استفاده از تمرین ۲.۷ می‌توان بررسی کرد:
آنجا نشان داده می‌شود که "$A \Longrightarrow B$" با "B یا نقیض A "یکسان است. از فصل ۶ به یاد داریم که نقیض "Q و P"، "نقیض Q یا نقیض P" است. بنابراین نقیض "$A \Longrightarrow B$"، نقیض "B یا نقیض A" است. این هم همان "نقیض B و نقیض (نقیضA)" است، که ساده‌تر آن "نقیض B و A" می‌باشد.

تمرین ۳.۷.
استدلال فوق را با استفاده از جدول‌های ارزشی بیان کنید.

نکته ۱.۷. *توجه کنید که نقیض یک استلزام، یک استلزام نیست.*

روش‌های مختلف نوشتن A نتیجه می‌دهد B

- **"B اگر A " همان "$A \Longrightarrow B$" است.**

این روشن است که "اگر من مریم میرزاخانی هستم، آنگاه ایرانی‌ام" را می‌توان به‌صورت "من ایرانی‌ام اگر مریم میرزاخانی هستم" نوشت. این را در حالت کلی‌تر نیز می‌توان انجام داد. "اگر A، آنگاه B" را می‌توان به‌صورت

"B اگر A"

بازنویسی کرد.
گاهی، دانشجویان سردرگم می‌شوند زیرا فکر می‌کنند در "$A \Longrightarrow B$" و "اگر A، آنگاه B "، B درست است (یا در پایان درست می‌شود). اینکه مفروضات سمت راست و حکم سمت چپ است شما را به زحمت خواهد انداخت. زمانی که هم‌ارزی گزاره‌ها را در فصل ۹ می‌بینیم، این روشِ نوشتن بسیار مهم خواهد بود.

"A **تنها اگر** B" **با** "$A \Longrightarrow B$"

روش بعدی نوشتن "$A \Longrightarrow B$" وضوح کمتری دارد. در آن روش "اگر من مریم میرزاخانی هستم، آنگاه من ایرانی‌ام" با "من مریم میرزاخانی هستم تنها اگر ایرانی باشم" جابه‌جا می‌شود. عقیده این است که اگر من ایرانی نیستم، آنگاه راهی وجود ندارد که من بتوانم مریم میرزاخانی باشم.
بنابراین، به‌طورکلی‌تر، روش دیگر نوشتن "$A \Longrightarrow B$"،

"A تنها اگر B"

است.
پذیرش هم‌ارزی آن با "$A \Longrightarrow B$" سخت‌تر است پس کندتر پیش می‌رویم. گزاره "A تنها اگر B" می‌گوید که A درست است تنها اگر B درست باشد. چگونه این با A درست است نتیجه می‌دهد که B درست است، یکسان است؟
فرض کنید که "$A \Longrightarrow B$" درست است. به علاوه A را درست و B را غلط در نظر بگیرید، لذا "$A \Longrightarrow B$" درست نیست. پس A درست است تنها اگر B درست باشد. به‌طور مشابه، فرض کنید که A درست است تنها اگر B درست باشد. آنگاه اگر A درست باشد، باید B نیز درست باشد، بنابراین $A \Longrightarrow B$.

تمرین ۴.۷.
با استفاده از جدول‌های ارزشی مطلب بالا را نشان دهید، به ویژه، با استفاده از یک جدول ارزشی نشان دهید که "$A \Longrightarrow B$" با "A تنها اگر B" یکسان است.

تمرین

۱. فرض کنید، A درست و B غلط است. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(آ) $A \Longrightarrow B$ (ب) $A \Longrightarrow B$ (ج) $A \Longrightarrow$ نقیض B

(د) $A \Longrightarrow A$ (و) نقیض B یا A (ه) $A \Longrightarrow$ نقیض A

(ی) نقیض (B یا A)

۲. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(آ) اگر ۷۰ درصد امتیازات مسابقه را بیاورید، آنگاه در مسابقه خوب عمل کرده‌اید.

(ب) اگر باران ببارد، آنگاه در خانه می‌مانم.

(ج) اگر $x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$، آنگاه $x = -۱$.

(د) $x^۲ + x - ۲ = ۰$ نتیجه می‌دهد $x = -۲$ یا $x = ۱$.

(راهنمایی: نقیض "اگر ...، آنگاه ..." یک "اگر ...، آنگاه ..." نیست.)

۳. گزاره‌های زیر را با استفاده از "تنها اگر" بنویسید.

(آ) اگر $x = -۲$، آنگاه $x^۲ = ۴$.

(ب) اگر x و y فرد باشند، آنگاه xy فرد است.

(ج) ($x = -۲$ یا $x = ۱$) $\Longrightarrow (x^۲ + x - ۲ = ۰)$.

(د) $x^۲ + x - ۲ = ۰ \Longleftarrow x = ۱$.

۴. برای گزاره‌های زیر جدول ارزشی بسازید.

(آ) نقیض $A \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ و

(ب) (نقیض $A \Longrightarrow B$) یا A.

۵. با جدول ارزشی نشان دهید که گزاره‌های زیر درست هستند.

(آ) (B یا A) $\Longrightarrow A$ و

(ب) $\Big[$(نقیض B یا نقیض A) $\Longrightarrow$ نقیض $C\Big] \Longrightarrow \Big[(A,B) \Longrightarrow C\Big]$.

چکیده

- در گزاره ”$A \Longrightarrow B$“، گزاره A فرض یا انگاشته و گزاره B، حکم نامیده می‌شود.
- گزاره ”$A \Longrightarrow B$“ را می‌توان به‌صورت ”اگر A، آنگاه B“ نوشت.
- ”A نتیجه می‌دهد B را“ به این معنی است که اگر A درست باشد، آنگاه B درست است. هیچ چیز دیگری نمی‌گوید. اگر A غلط باشد، آنگاه ممکن است B درست یا غلط باشد.
- نقیض $A \Longrightarrow B$ با ”B یا نقیض (A)“ هم‌ارز است.
- ”A تنها اگر B“ با ”$A \Longrightarrow B$“ یکی است.
- ”B اگر A“ با ”$A \Longrightarrow B$“ یکی است.

فصل ۸

ریز نکته‌هایی در باب استلزام‌ها

او از سیاستمداران رنجدیده است. بعضی چیزها باید انجام شود، این بعضی چیزهاست، بنابراین آن را انجام داده‌ایم.

” آنتونی جی و جاناتان لین، قسمت بله گفتن، نخست‌وزیر [۱] “

بیشتر زبان‌ها پر از ابهام هستند. گفته طنز بالا از این نوع ابهامات استفاده و کار می‌کند، زیرا عبارت بعضی چیزها، دو معنی متفاوت در جمله دارد. قصد داریم با زبان ریاضی، چنین ابهاماتی را از میان برداریم. در این فصل، ابتدا به مسئله ویژه‌ای که هر روز در استفاده از ساختار اگر/آنگاه رخ می‌دهد خواهیم پرداخت. باید ببینیم این مثال، چگونه ما را به مفاهیم معکوس و عکس نقیض یک گزاره هدایت می‌کند. این نشان می‌دهد که اگر چه استفاده از مثال‌های روزمره می‌تواند روشن‌کننده باشد، ولی باید دقت داشته باشیم، چرا که زبان گفتاری (اعم از فارسی، انگلیسی و ...) می‌تواند ما را به بازی بگیرد.

معکوس: اشتباهی رایج

رایج‌ترین اشتباهی که در منطق مرتکب می‌شویم، از به‌کارگیری روزانه آنچه که در کودکی یاد می‌گیریم، منتج می‌شود. برای مثال، مادری به فرزندش می‌گوید:

”اگر اتاقت را مرتب نکنی، آنگاه بستنی دریافت نمی‌کنی.“

غریزه طبیعی ما، شبیه کودک و خانواده درحال تفسیرکردن است و این را با

”اگر کودک اتاقش را مرتب کند، آنگاه بستنی دریافت می‌کند.“

یکی می‌گیریم. به‌عبارت‌دیگر

”اگر اتاقت را مرتب کنی، آنگاه یک بستنی دریافت می‌کنی.“

ولی جمله اصلی این را نمی‌گوید. تنها می‌گوید اگر کودک اتاقش را مرتب نکند چه اتفاقی می‌افتد. هیچ چیزی در مورد اینکه اگر انجام دهد چه اتفاقی می‌افتد نمی‌گوید! درحالی‌که اطمینان دارم، بیشتر ما هم عقیده‌ایم که اگر کودک اتاقش را مرتب کند و بستنی دریافت نکند، آزرده خاطر خواهد شد.

مثال دیگر این است: ”اگر باران ببارد، آنگاه بیرون نخواهم رفت.“ در گفتار روزمره به این مفهوم است که اگر باران نبارد، آنگاه بیرون خواهم رفت. هر چند به‌طور دقیق، جمله تنها یک گزاره است، در مورد آنچه رخ می‌دهد، اگر باران ببارد؛ و هیچ چیزی در مورد اینکه چه کاری انجام می‌دهم، اگر باران نبارد، نمی‌گوید.

نکته این است که با ایده‌های معینی در مورد مفهوم جمله‌های با اگر/ آنگاه بزرگ شدیم. حالا مسئله‌ای به روشنی مثال‌های بالا باتوجه‌به مثال زیر بسازیم.

---

[۱] آنتونی جی (*Antony Jay*) هنرپیشه و صداپیشه اهل بریتانیا بود که بین سالهای ۱۹۶۶ تا ۲۰۰۶ میلادی فعالیت می‌کرد و جاناتان لین (*Jonathan Lynn*) یک فیلم‌نامه نویس، کارگردان و کمدین اهل بریتانیا بود (متولد ۱۹۴۳).

"اگر مصطفی چمران[۲] هستم، آنگاه من ایرانی هستم."

این گزاره درست است چرا که از قبل می‌دانیم دکتر مصطفی چمران، ایرانی بود. حالا یک نقیض به آن اضافه می‌کنیم؛ بنابراین گزاره به

"اگر مصطفی چمران نیستم، آنگاه ایرانی نیستم."

تبدیل می‌شود. قطعا این درست نیست، زیرا ایرانی‌هایی هستند که مصطفی چمران نیستند. با خلاصه‌نویسی به زبان ریاضی، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۱.۸.
معکوس *استلزام "اگر A، آنگاه B"*

"اگر نقیض A، آنگاه نقیض B"

است.

مثال ۱.۸.
در مثال اتاق/بستنی بالا، فرض کنید A، "شما اتاقت را مرتب نکنی" و B، "شما بستنی دریافت نمی‌کنی" باشد، آنگاه نقیض A "شما اتاقت را مرتب کنی" و نقیض B، "شما بستنی دریافت می‌کنی" است. پس معکوس گزاره "اگر شما اتاقت را مرتب نکنی آنگاه بستنی دریافت نمی‌کنی"، "اگر شما اتاقت را مرتب کنی آنگاه بستنی دریافت می‌کنی" است.

مثال مصطفی چمران/ایرانی بالا نشان داد که اگر "اگر A، آنگاه B" درست باشد، آنگاه "اگر نقیض A، آنگاه نقیض B"می‌تواند غلط باشد، لذا می‌توان دید که به‌طور منطقی، ارزش درستی گزاره اول در مورد اتاق و بستنی و معکوسش می‌تواند کاملا متفاوت باشد. (هر چند تجربه‌ی کودکی ما، آن‌ها را یکی (معادل) می‌داند.)
تفاوتی که به آن نیاز داریم:

$(A \Longrightarrow B)$ با (نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A) معادل نیست.

مثال چمران/ایرانی، برای یادآوری این تفاوت خوب است، چرا که نشان می‌دهد یک استلزام می‌تواند درست باشد در حالی‌که معکوس آن غلط است.
دقت کنید، یک استلزام و معکوس آن می‌توانند هر دو درست باشند، این را مثال زیر نشان می‌دهد. گزاره

"x زوج است نتیجه می‌دهد که $x^۲$ زوج است"

را در نظر بگیرید.
این گزاره درست است. ممکن است بخواهید نشان دهید که این کدام حالت است! معکوس گزاره به‌صورت

"x زوج نباشد، نتیجه می‌دهد که $x^۲$ زوج نیست"

است. به‌عبارت‌دیگر

"x فرد است نتیجه می‌دهد که $x^۲$ فرد است."

این نیز درست است! بنابراین در این حالت "اگر A، آنگاه B" و "اگر نقیض A، آنگاه نقیض B" هر دو درست هستند. باتوجه‌به این مثال و مثال چمران می‌بینیم که:

در حالت کلی، ارزش درستی "$A \Longrightarrow B$" هیچ چیزی در مورد ارزش درستی معکوس آن "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" نمی‌گوید.

- **مثال‌های خطرناک**

انصافا مثال ساده اتاق/بستنی بی‌ضرر است. به‌وسیله آن زیان کوچکی صورت می‌گیرد. اجازه دهید ببینیم استفاده از این منطق درهم برهم در زندگی واقعی با مردم دیگر، چگونه می‌تواند موقعیت‌هایی به‌طور بالفعل انفجاری برایمان بسازد. گزاره

[۲] شهید مصطفی چمران ساوه‌ای زاده ۱۰ مهر ۱۳۱۱ تهران، شهادت ۳۱ خرداد ۱۳۶۰ دهلاویه، فیزیک‌دان، سیاستمدار ایرانی و بنیان‌گذار ستاد جنگ‌های نامنظم در جریان جنگ ایران و عراق بود.

"اگر ریاضی‌دان هستید، آنگاه باهوش هستید."

را در نظر بگیرید و فرض کنید که درست است. توجه کنید که این گزاره هیچ چیزی در مورد هوش یک فرد غیرریاضی‌دان نمی‌گوید. فردی می‌تواند جغرافی‌دان، تاریخ‌دان یا مهندسی مخابرات باشد، اما این گزاره هیچ چیزی در مورد آن‌ها نمی‌گوید. بااین‌حال ممکن است معتقد باشند که این توهینی به غیرریاضی‌دان است و رنجیده خاطر گردند. "من مهندس مخابراتم! می‌گویید من کودن هستم؟"

برای اینکه ببینید این چقدر می‌تواند جدال‌برانگیز باشد، تصور کنید که به‌جای استفاده از "ریاضی‌دان" بگوییم: "اگر مرد هستید، آنگاه باهوش هستید" و از درست بودن آن دفاع کنیم. بحث‌های زیادی در مقابل این شکل خواهد گرفت. اول اینکه مردان بی‌استعداد زیادی در جهان وجود دارد و دوم اینکه با شکایت از تبعیض جنسیتی و استدلال اینکه زنان باهوش زیادی در جهان وجود دارند، نشان می‌دهند که این گزاره از لحاظ منطقی غلط است. البته به‌ندرت از چنین گزاره‌هایی استفاده می‌شود؛ معمولاً گزاره‌های آن‌ها با چند حالت پوشش داده می‌شود.

لازم و کافی

گام‌های منطقی، اغلب به‌شکل شرایط لازم و کافی تعیین می‌شوند. خوشبختانه، جملات "لازم" و "کافی" را می‌توان در گفتگوهای معمول روزمره دید.

- **شرایط لازم**

شرط لازم، شرطی است که برای درستی چیزی ضروری است.

تعریف ۲.۸.

__شرط لازم__ ، شرطی است که باید در دست باشد برای اینکه نتیجه درست باشد. ولی درستی نتیجه را تضمین نمی‌کند. به‌عبارت‌دیگر "A __لازم__ است برای B" به این معنی است که "B درست است تنها اگر A درست باشد". این حالت با $B \Longrightarrow A$ یکی است.

مثال ۲.۸.

(آ) *وجود یک دست تن‌پوش کامل برای وجود یک دستکش ضروری است.*

(ب) $x \leq \circ$ *برای* $x = -۲$ *نیاز است.*

(ج) *برای اینکه مثلثی، مثلث متساوی‌الاضلاع باشد (با زوایای یکسان)* **لازم** *است که مثلث متساوی‌الساقین باشد (دو زاویه مساوی).*

- **شرایط کافی**

شرط کافی، شرطی است برای اینکه تضمین کند گزاره‌ای درست است.

تعریف ۳.۸.

شرط **کافی**، *شرطی است که درستی نتیجه را تضمین می‌کند. نتیجه ممکن است درست باشد، حتی اگر در شرط صدق نکند.*
به‌عبارت‌دیگر "A کافی است برای B" به این معنی است که "B درست است اگر A درست باشد". این با $A \Longrightarrow B$ یکی است.

مثال ۳.۸.

(آ) *وجود یک دستکش برای وجود یک دست تن‌پوش کامل کافی است. توجه کنید که وجود یک دستکش برای یک دست تن‌پوش کامل ضروری نیست.*

(ب) $x = -۲$ *برای* $x \leq \circ$ *کافی است.*

(ج) *برای اینکه مثلثی متساوی‌الساقین باشد، کافی است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. دقت کنید که برای اینکه مثلث، متساوی‌الساقین باشد، نیاز نیست متساوی‌الاضلاع باشد.*

عکس نقیض

دیده‌ایم که $A \Longrightarrow B$ با (نقیض B) $\Longrightarrow$ (نقیض A) معادل نیست، با اینکه زبان روزمره، ما را طوری تربیت کرده است که آن را درست در نظر بگیریم. بدتر از این، زبان‌ها ما را برای نتیجه‌ای که درست است تجهیز نکرده‌اند.

تعریف ۴.۸.
عکس نقیض *گزاره* "$A \Longrightarrow B$"،

$$\text{"نقیض } B \Longrightarrow \text{ نقیض } A\text{"}$$

است.

شگفت‌انگیز است، "نقیض B $\Longrightarrow$ نقیض A" با $A \Longrightarrow B$ معادل است. می‌توان $A \Longrightarrow B$ را با (نقیض B) $\Longrightarrow$ (نقیض A) تعویض کرد. چند مثال می‌بینیم:

مثال ۴.۸.

(آ) *عکس نقیض "اگر من مصطفی چمران هستم، آنگاه ایرانی هستم" ، گزاره "اگر من ایرانی نیستم آنگاه من مصطفی چمران نیستم"، است.*

(ب) *عکس نقیض "اگر من ایرانی نیستم نتیجه می‌دهد که من اهل بندرعباس نیستم"، گزاره "اگر من اهل بندرعباس هستم، پس من ایرانی هستم"، است.*

(ج) *عکس نقیض گزاره "من مریم هستم نتیجه می‌دهد که یک بانو هستم"، گزاره "اگر من یک بانو نیستم، آنگاه مریم نیستم"، می‌باشد.*

(د) *عکس نقیض گزاره* "$x^۲ - ۴x - ۵ = ۰ \Longrightarrow x \geq -۲$"، *گزاره* "$x < -۲ \Longrightarrow x^۲ - ۴x - ۵ \neq ۰$"، *است.*

تمرین ۱.۸.
یک جدول ارزشی برای "نقیض B $\Longrightarrow$ نقیض A" بسازید و نشان دهید که با جدول ارزشی $A \Longrightarrow B$ یکسان است.

✍ **توجه ۱.۸.**
تمرین قبل نشان می‌دهد که هر گزاره و عکس نقیض آن معادلند.

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به‌شکل "اگر...، آنگاه..." بازنویسی کنید.

(آ) یک شرط کافی برای اینکه علی قهرمان شود این است که در برزیل قهرمان شود.
(ب) شرط لازم برای قهرمان شدن رضا این است که از علی ببرد.
(ج) کار منظم برای گذراندن این درس کافی است.
(د) کار منظم برای گذراندن این درس لازم نیست.
(و) برای اینکه رئیس جمهور ایران شوید، لازم است که در ایران متولد شده باشید.
(ه) برای اینکه نخست‌وزیر کشور هندوستان باشید، لازم نیست که در هندوستان متولد شده باشید.

۲. فرض کنید گزاره A، "$x^2 - 2x - 3 > 0$" و گزاره B، "$x > 3$" باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک غلط هستند؟

(آ) $A \Longrightarrow B$،
(ب) $B \Longrightarrow A$،
(ج) A برای B لازم است،
(د) B برای A کافی است،
(ذ) A برای B کافی است،
(و) B برای A لازم است،
(ه) نقیض $A \Longrightarrow$ نقیض B،
(ی) نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A،

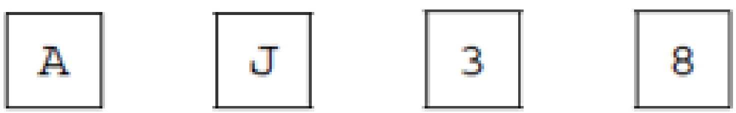
۳. کدام یک از گزاره‌های زیر معادلند؟

(آ) اگر تیم من بازی آخر را ببازد، آنگاه باید قهرمانی را از دست بدهند.
(ب) اگر تیم من بازی آخر را ببازد، آنگاه تیم شما قهرمان می‌شود.
(ج) اگر تیم من بازی آخر را ببازد، آنگاه قهرمان می‌شوند.
(د) اگر تیم من قهرمان شود، آنگاه بازی آخر را برده‌اند.
(و) اگر تیم من بازی آخر را ببرد، آنگاه قهرمان شده‌اند.
(ه) اگر تیم من قهرمانی را از دست بدهد، آنگاه باید بازی آخر را از دست داده باشند.

۴. عکس نقیض گزاره $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ چیست؟

۵. اکنون به آزمایش جالبی روی درک مطلب که توسط پ. سی. ویسون انجام شده است می‌پردازیم. (تعداد زیادی از مردم در این مورد اشتباه می‌کنند.)

فرض کنید به دانشجویان گفته باشند که در یک طرف هر کارت حرفی صوتی یا صدادار، و در طرف دیگر آن عدد است. ممکن است کارت‌ها به‌صورت شکل زیرنشان داده شوند:



مهم این است که تصمیم بگیرید آیا "اگر یک کارت یک حرف صدادار در یک طرفش باشد، آنگاه یک عدد زوج در طرف دیگرش است" درست است یا خیر؟ دانشجویان باید تنها کارت‌هایی را برگردانند که تشخیص می‌دهند این قاعده برایشان درست باشد.
کدام کارت‌ها در مثال فوق باید برگردانده شوند و کدام یک نه؟ پاسختان را شرح دهید.

چکیده

- معکوس $A \Longrightarrow B$، "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" است.
- درست بودن $A \Longrightarrow B$ به‌معنی درست بودن "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" نیست.
- "A برای B لازم است" با "$B \Longrightarrow A$" معادل است.
- "A برای B کافی است" با "$A \Longrightarrow B$" معادل است.
- عکس نقیض "$A \Longrightarrow B$"، "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" است.
- یک استلزام و عکس نقیض آن معادلند.

فصل ۹

معکوس و هم‌ارزی

اینکه به برخی از نابغه‌ها خندیده‌اند، نتیجه نمی‌دهد که به هر کسی خندیده‌اند نابغه است. به کریستوف کلمب خندیدند، به فالتون (مخترع کشتی بخار) خندیدند، به برادران رایت خندیدند. اما به بوزو دلقک [1] نیز خندیدند.

" کارل ادوارد ساگان، مغز متفکر [2] "

گزاره‌های به‌شکل $A \Longrightarrow B$ در قلب ریاضیات هستند. در فصل قبل دیدیم که برای استلزام $A \Longrightarrow B$ می‌توان وارون آن $(\sim A \Longrightarrow \sim B)$ و عکس نقیض آن $(\sim B \Longrightarrow \sim A)$ را به‌دست آورد. در این فصل استلزام دیگری را بررسی می‌کنیم: $B \Longrightarrow A$؛ آن را معکوس $A \Longrightarrow B$ می‌نامیم. خواهیم دید که یک گزاره و عکس آن یکسان نیستند. ممکن است یکی درست و دیگری نادرست، هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند.

اگر هر دو گزاره $A \Longrightarrow B$ و $B \Longrightarrow A$ درست باشند، آنگاه A و B را دو گزاره هم‌ارز می‌نامند. ریاضی‌دانان، واقعا گزاره‌های هم ارز را دوست دارند، مخصوصا اگر به نظر برسد که A و B هیچ ارتباط روشنی با هم ندارند.

عکس

تعریف ۹.۱.

عکس گزاره " $A \Longrightarrow B$ " گزاره " $B \Longrightarrow A$ " است.

عکس گزاره

"اگر من مصطفی چمران هستم، پس ایرانی هستم"

گزاره

"اگر من ایرانی هستم، پس مصطفی چمران هستم".

است. این مثال ساده نشان می‌دهد که حتی اگر یک جمله خاص درست باشد، ممکن است عکس آن درست یا نادرست باشد. قبل از آن که چیزی بگوییم، باید بررسی کنیم.

تمرین ۹.۱.

عکس گزاره‌های زیر را بنویسید:

[1] شخصیت دلقکی که در دهه ۱۹۶۰ محبوبیت گسترده‌ای در ایالات متحده داشت.

[2] کارل ادوارد ساگان ($Carl\ Sagan$) زاده ۱۹۳۴ و درگذشته ۱۹۶۶، اخترشناس آمریکایی، اخترشیمیدان، مشاور سازمان ناسا و نویسنده مروج اخترفیزیک و سایر علوم بود.

(آ) *اگر گربه من سیاه باشد، آنگاه همه گربه‌ها خاکستری نیستند.*

(ب) *اگر x زوج باشد، آنگاه $x^۲$ زوج است.*

(ج) *اگر من پارسی باشم، آنگاه کوروش هستم.*

یک ریاضی‌دان خوب، هنگامی که گزاره "A نتیجه می دهد B را" بیان می‌کند، می‌پرسد آیا عکس آن درست است؟ این سوال را ملکه ذهن خود کنید و آن را به‌عنوان بخشی از جعبه ابزار خویش برای انجام ریاضیات قرار دهید. این که عکس گزاره‌ای درست است یا نادرست، اهمیّتی ندارد.، نکته در این است که این تمرین، توانمندی‌های ریاضیات را افزایش می‌دهد.

در یکی از سخنرانی‌هایم برای دانشجویان سال اول، پیشنهاد دادم که به اولین دانشجویی که این سوال را در طول سخنرانی بپرسد، جایزه‌ای اهدا شود. آن‌ها برای به‌دست آوردن جایزه در هر جایی که عکس گزاره‌ای را جالب می‌دیدند و به وضوح درست و یا نادرست بود، این سوال را می‌پرسیدند. به آن‌ها اجازه دادم که در طول کلاس‌های سایر همکارانم نیز بپرسند. زیرا از دانشجویانم می‌خواهم که از دانش خود در خارج از کلاس‌های من نیز استفاده کنند.

تمرین ۹.۲.
نام دیگر عکس نقیض یک گزاره چیست؟

هم‌ارزی‌های منطقی

درباره دو گزاره‌ای که یکسان هستند، یعنی هم‌ارزند، صحبت کرده‌ایم. به‌عنوانِ‌مثال، $\sim(\sim A)$ همان A است. یا گزاره "$\sim B \Longrightarrow \sim A$" با گزاره "$A \Longrightarrow B$" یکسان است. و برای اثبات این هم‌ارزی از جدول‌های ارزش‌گذاری استفاده شده است. اینک مفهوم هم‌ارزی را با جزئیات بیشتری بررسی خواهیم کرد.

مثال ۹.۱.
گزاره‌های "من رئیس جمهور، جورج واشنگتن هستم" و "نخستین رییس جمهور ایالات متحده آمریکا هستم" را در نظر بگیرید.
می‌دانیم که "اگر من رئیس جمهور، جورج واشنگتن هستم، آنگاه نخستین رییس جمهور ایالات متحده آمریکا هستم" درست است. عکس آن یعنی: "اگر من اولین رئیس جمهور ایالات متحده آمریکا باشم، آنگاه من رئیس جمهور، جورج واشنگتن هستم." نیز درست است.
این به این خاطر است که جورج واشنگتن و نخستین رئیس جمهور ایالات متحده آمریکا بودن یکی است؛ آن‌ها هم‌ارز هستند. بیایید این مفهوم را به واژگان ریاضی تبدیل کنیم.

تعریف ۹.۲.
اگر هر دو گزاره $A \Longrightarrow B$ و $B \Longrightarrow A$ درست باشند، آنگاه گزاره‌های A و B را هم‌ارز منطقی می‌نامیم و می‌نویسیم $A \Longleftrightarrow B$. نشانه $\Longleftrightarrow$ را، "اگر و تنها اگر" می‌خوانیم و گزاره $A \Longleftrightarrow B$ را گزاره دوشرطی می‌نامیم.

دلیل استفاده از "اگر و تنها اگر" این است که می‌دانیم، $A \Longrightarrow B$ را می‌توان به‌صورت "A تنها اگر B" و $B \Longrightarrow A$ را می‌توان به‌صورت "A اگر B" نوشت. با ترکیب این دو گزاره، عبارت "اگر و تنها اگر" به‌دست می‌آید. بااین‌وجود، دانشجویان در تشخیص اینکه کدام استلزام به‌معنی "اگر" و کدام استلزام به معنی "تنها اگر" است، بیشتر اوقات سردرگم می‌شوند. تمرین کنید تا آن‌ها را تشخیص دهید.

مثال ۹.۲.
به این گزاره توجه کنید:

$$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Longleftrightarrow x = -۳ \text{ یا } x = ۱.$$

بخش "تنها اگر" این گزاره (یعنی $\Longrightarrow$) عبارت است از

$$.x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Longrightarrow (x = -۳ \text{ یا } x = ۱)$$

که درست است. برای رسیدن به این جواب، معادله را به هر روشی که ترجیح می‌دهید حل کنید. در این‌جا، معادله درجه دو را به آسانی می‌توان تجزیه کرد: $x^۲ + ۲x - ۳ = (x-۱)(x+۳)$. لذا $x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$ نتیجه می‌دهد که $x = ۱$ یا $x = -۳$.

بخش "اگر" این گزاره (یعنی $\Longleftarrow$) عبارت است از

$$.x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Longleftarrow (x = -۳ \text{ یا } x = ۱)$$

این قسمت نیز درست است. به آسانی می‌توان درستی آن را نشان داد.

$$۱^۲ + ۲ \times ۱ - ۳ = ۱ + ۲ - ۳ = ۰,$$

$$(-۳)^۲ + ۲(-۳) - ۳ = ۹ - ۶ - ۳ = ۰.$$

بنابراین دو گزاره "$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$" و "$x = ۱$ یا $x = -۳$" هم‌ارز هستند.

مثال ۳.۹.

اینک ببینید برای این گزاره چه اتفاقی رخ می‌دهد.

$$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Longleftrightarrow x = -۳.$$

باتوجه‌به مثال قبل این گزاره نادرست است. (زیرا گزاره "$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$" با گزاره "$x = ۱$ یا $x = -۳$" هم‌ارز است و روشن است که گزاره دومی با گزاره‌ی "$x = -۳$" هم‌ارز نیست.)

بسیار خوب! این گزاره نادرست است. اما کدام جهت آن اشتباه است؟ بخش $\Longrightarrow$ یا بخش $\Longleftarrow$؟ یعنی "اگر" نادرست است یا "تنها اگر"؟

جهت $\Longrightarrow$ نادرست است، یعنی "تنها اگر"، زیرا معادله $x^۲ + ۲x - ۳ = ۰$ دارای جوابی غیر از $x = -۳$ نیز می‌باشد.

- **کنار گذاشتن**

هنگامی که در بخشی از یک سوال در مورد حل معادلات، از دانشجویان می‌خواهیم نشان دهند که $x = ۴$ جوابی از معادله $۳x^۲ - ۱۴x + ۸ = ۰$ است، بسیاری از دانشجویان، معادله را به روش خاصی حل می‌کنند و جواب‌های $x = ۴$ و $x = \frac{۲}{۳}$ را به‌دست می‌آورند. بااین‌وجود، برای اینکه نشان دهید چیزی جواب یک معادله است، به روشی ساده‌تر، فقط آن را در معادله جایگزین کنید:

$$۳x^۲ - ۱۴x + ۸ = ۳(۴)^۲ - ۱۴(۴) + ۸ = ۴۸ - ۵۶ + ۸ = ۰.$$

- **مثالی دیگر**

در مثال بعد یک گزاره "اگر و تنها اگر" خواهیم داشت و نشان می‌دهیم که درست است.

مثال ۴.۹.

عدد صحیح n زوج است اگر و تنها اگر عدد $n + ۱$ فرد باشد.

می‌توانیم نشان دهیم که این گزاره درست است. ابتدا نشان می دهیم که n زوج است تنها اگر $n + ۱$ فرد باشد. فرض کنید n زوج باشد. آنگاه برای برخی از $m \in \mathbb{Z}$، $n = ۲m$. بنابراین $n + ۱ = ۲m + ۱$ که بنا بر تعریف، عددی فرد است، بنابراین $n + ۱$ عددی فرد است.

حال نشان می‌دهیم که n زوج است اگر $n + ۱$ عددی فرد باشد. فرض کنید $n + ۱$ عددی فرد باشد، به‌عنوان‌مثال، برای برخی از $m \in \mathbb{Z}$، $n + ۱ = ۲m + ۱$. با حذف ۱ داریم $n = ۲m$. به این ترتیب، n عددی زوج است.

اهمیت این مثال در این است که نشان دهیم، دو گزاره وجود دارد که هر دو درست هستند. یکی گزاره شامل "اگر" و دیگری شامل "تنها اگر". در ادامه این کتاب، درباره این موضوع، بیشتر خواهیم گفت.

تمرین

۱. عکس هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

(آ) اگر $x > ۵$، آنگاه x قرمز است.
(ب) یک عدد صحیح می‌تواند زوج یا فرد باشد، اما نمی‌تواند هم‌زمان هم زوج و هم فرد باشد.
(ج) برای اینکه در تمام طول روز خوشحال باشم، لازم است که بستنی بخورم.
(د) برای اینکه در تمام طول روز خوشحال باشم، کافیست بستنی بخورم.
(و) برای بحث درباره اشیا، لازم نیست که آن‌ها را درک کنیم.
(ه) بایست، یا شلیک خواهم کرد!

۲. کدام یک از چهار گزاره زیر با هم هم‌ارز هستند.

(آ) اگر A و B هر دو قرمز باشند، آنگاه X درست است.
(ب) اگر A و B هر دو قرمز نباشند، آنگاه X درست است.
(ج) اگر X نادرست باشد، آنگاه A و B هر دو قرمز نیستند.
(د) اگر A یا B قرمز نباشد، آنگاه X درست است.
اگر A قرمز و B زرد باشد، آنگاه X در قسمت (آ) درست است؟ نادرست است؟ در مورد قسمت (د) چه می‌توان گفت؟

۳. برای گزاره‌های زیر جدول ارزش‌گذاری بسازید.

(آ) $A \Longleftrightarrow B$، همچنین برای
(ب) نقیض گزاره " A نتیجه می‌دهد B را".

۴. عکس هر یک از گزاره‌های زیر را به‌دست آورید. هر گزاره و عکس آن را به‌شکل گزاره دو شرطی ترکیب کنید. (توجه کنید، لازم نیست گزاره‌ها درست باشند!)

(آ) اگر $ab = ۰$، آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.
(ب) اگر $۲x^۲ - ۷x + ۶ = ۰$، آنگاه $x = ۲$.
(ج) حاصلضرب دو عدد صحیح فرد، عددی فرد است.
(د) مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی فرد است.
(و) فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند. در این حالت

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(ه) فرض کنید f یک چندجمله‌ای بر حسب متغیر x باشد. اگر $f(a) = ۰$، آنگاه $x - a$ یک عامل f می‌باشد.

چکیده

- با استفاده از گزاره‌های A و B می‌توان نشانه‌های $\Longrightarrow$ و $\sim$ را به چهار صورت زیر ترکیب کرد.

(۱) $A \Longrightarrow B$،
(۲) $B \Longrightarrow A$ (عکس)،
(۳) $\sim A \Longrightarrow \sim B$ (وارون)،
(۴) $\sim B \Longrightarrow \sim A$ (عکس نقیض).

- اگر $A \Longrightarrow B$ درست باشد، آنگاه عکس نقیض آن نیز درست است.
- اگر $A \Longrightarrow B$ درست باشد، آنگاه وارون و عکس آن ممکن است درست و یا ممکن است نادرست باشند.
- اگر $A \Longrightarrow B$ و $B \Longrightarrow A$، آنگاه A و B را گزاره‌های هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $A \Longleftrightarrow B$.

فصل ۱۰

سورهای عمومی و وجودی

می‌توانید همه مردم را برای مدتی و برخی از مردم را برای همیشه فریب دهید، اما نمی‌توانید همه مردم را برای همیشه بفریبید.

" آبراهام لینکلن [1] "

در فصل ۶ (ساخت گزاره) جمله‌ای مانند " x یک عدد فرد است." را گزاره مشروط نامیدیم. درست یا نادرست بودن آن به x بستگی دارد. در این فصل به تشریح دو روش اساسی برای بیان مقدار x می‌پردازیم به‌طوری‌که به‌جای گزاره‌های مشروط، گزاره‌های دیگری حاصل شود.

برای مثال گزاره "$x^۲ = ۲$" به x وابسته است؛ می‌توان از ترکیب این گزاره و یک جمله توصیفی از x گزاره‌ی جدیدی ساخت. مانند، " برای همه xهایی که $x \in \mathbb{Z}$، $x^۲ = ۲$." یا " وجود دارد x ی متعلق به $\mathbb{R}$، به‌طوری‌که $x^۲ = ۲$." دقت کنید که جمله دوم درست و اولی نادرست است.

روشن است که آنچه انجام شد توصیف x یا تعیین تعلق یک کمیت است، این چنین توصیفاتی را **سور** می‌نامیم. دو عنوان تخیلی و مورد پسند برای نام‌گذاری سورها عبارت است از: سور عمومی و سور وجودی.

برای همه، سور عمومی

تعریف ۱.۱۰.

عبارت "برای همه" را سور عمومی می‌نامند. این سور با $\forall$ نشان داده می‌شود. (این وارون A است، برای اینکه فراموش نکنید، حرف A از کلمه All را به خاطر بسپارید.)

گزاره‌های زیر را ببینیم:

(۱) "برای همه x هایی که $x \in \mathbb{R}$، $x^۲ \geq ۰$" یعنی مربع هر عدد حقیقی مثبت است.

(۲) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و U یک عدد حقیقی باشد. "برای همه s ها که $s \in S \subseteq \mathbb{R}$ ، $s \leq U$." یعنی هر عضو از مجموعه S کوچکتر یا مساوی عدد U است.

(۳) فرض کنید O مجموعه اعداد فرد باشد. "برای هر x که $x \in O$، $x^۲ + ۱$ عددی فرد است." یعنی برای هر عدد فرد x عدد $x^۲ + ۱$ نیز فرد است. (در هر صورت این نادرست است.)

(۴) "برای همه اعداد گویا x و y حاصلضرب xy و مجموع $x + y$ گویاست."

---

[1] آبراهام لینکلن (*Abraham Lincoln*) زاده ۱۸۰۹ و درگذشته ۱۸۶۵، شانزدهمین رئیس جمهور ایالات متحده آمریکا بود.

برای جمله $P(x)$، به‌عنوانِ‌مثال، $x^{۲} \geq ۰$ می‌توان گزاره‌ای به‌صورت $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ نوشت؛ به‌عنوان‌مثال، $\forall x \in \mathbb{R}, (x^{۲} \geq ۰)$، جمله $x^{۲} \geq ۰$ را به این دلیل داخل پرانتز قرار داده‌ایم که مشخص شود این جمله‌ایست که ارزش‌گذاری شده است. اگر جمله دارای دو متغیر ارزش‌گذاری شده باشد، آن را با نشانه $P(x, y)$ نشان می‌دهیم.

مثال (۴) را می‌توان برحسب نمادها به‌شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall\, y \in \mathbb{Q},\ (xy \in \mathbb{Q}\ \wedge\ x + y \in \mathbb{Q}),$$

یا به‌شکل

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (xy \in \mathbb{Q}\ \wedge\ x + y \in \mathbb{Q}).$$

می‌توان گزاره‌هایی همراه با استلزام داشت. "برای همه اعداد حقیقی x، اگر $x \geq ۳$، آنگاه $x^{۲} \geq ۹$." می‌توان آن را به‌شکل" $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq ۳ \Longrightarrow x^{۲} \geq ۹)$" بازنویسی کرد.

نکته کاربردی

ایده بسیار خوبی است که گزاره‌هایی که با کلمات بیان شده‌اند را به گزاره‌هایی برحسب نشانه‌ها بازنویسی کنیم و برعکس.

یک هم‌معنی "برای همه"، "به ازای هر" است و متاسفانه گاهی استفاده از آن ابهام ایجاد می‌کند؛ بنابراین ریاضی‌دانان باید از آن دوری کنند. تمرین زیر را در نظر بگیرید:
"نشان دهید که برای هر $x \in \mathbb{Z}$، $x^{۲} \geq ۰$." به‌علاوه می‌تواند به "تنها یک عدد صحیح انتخاب کنید و نشان دهید که $x^{۲} \geq ۰$." تفسیر شود. انجام این آسان است! قرار دهید $x = ۳$، آنگاه $x^{۲} = ۹ \geq ۰$. روشن است که این دو تفسیر یکسان نیستند و هنوز معادل‌های معقولانه‌تری برای استفاده از کلمه "هر" وجود دارد.

راه‌های دیگری نیز برای نوشتن "برای همه" وجود دارد، می توانیم از "همه"، "به ازای همه"، "برای هر"، استفاده کنیم. به‌عنوانِ‌مثال، "به ازای همه $x \in \mathbb{R}$، $x \geq ۰$".

وجود دارد، سور وجودی

تعریف ۲.۱۰.
عبارت "وجود دارد" را سور وجودی می‌نامند. این سور با $\exists$ نشان داده می‌شود. (این وارونه E است، برای اینکه فراموش نکنید، حرف E از کلمه $Exists$ را به خاطر بسپارید.)

مثال ۱.۱۰.

(آ) *"وجود دارد xی که $x \in \mathbb{Z}$ و $x^{۲} = ۴$." این گزاره‌ای درست است، زیرا $x = ۲$ در $x^{۲} = ۴$ صدق می‌کند. توجه کنید که $x = -۲$ نیز در معادله صدق می‌کند. لذا اینکه گفته می شود* **وجود دارد یک** *x به این معنی نیست که* **فقط یک** x **وجود دارد**.

(ب) *"وجود دارد xی که $x \in \mathbb{Z}$ و $x^{۲} = ۵$." این گزاره درست نیست.*

(ج) *گزاره $\exists x \in \mathbb{Z}\ (x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰)$، گزاره‌ای درست است، کافی است آن را حل کنیم تا درستی آن را ببینیم.*

وقتی نمونه‌هایی مانند مثال آخر را می‌خوانیم، عبارت " به‌طوری‌که" را بین سور و جمله‌ای که به آن اشاره می‌کند اضافه می‌کنیم. بنابراین آن را چنین می‌خوانیم " وجود دارد x صحیحی به‌طوری‌که $x^{۲} - ۴x + ۳ = ۰$ ".

ترکیب سورها

ممکن است دو سور با هم ترکیب شود.

مثال ۲.۱۰.

" برای هر $x \in \mathbb{Z}$ وجود دارد $y \in \mathbb{Z}$ به‌طوری‌که $x < y$." می توان آن را بر حسب سورها به صورت "$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$" نوشت. این گزاره چنین می‌گوید که "به ازای هر عدد صحیح مفروض می‌توان یک عدد صحیح بزرگتر از آن پیدا کرد." به ازای هر عدد صحیح x می‌توان عدد صحیح y بزرگتر از آن را پیدا کرد. برای مثال اگر $x = ۱۵$ را به من بدهید می‌توانم y را اعداد ۱۶ یا ۵۰۰ یا ۵۰۰۰۰۰۳ انتخاب کنم.

به‌همین‌ترتیب می‌توان سورها را در تعاریف ترکیب کرد.

مثال ۳.۱۰.

*فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. هرگاه عنصری مانند U موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $s \in S$، $s \leq U$، آنگاه گوییم S دارای یک **کران بالا** است. می‌توان چنین نوشت "گوییم S یک **کران بالا** دارد اگر "$\exists U\ \forall s \in S\ (s \leq U)$".*

این فقط می‌گوید که هر عنصر از S کوچکتر یا مساوی با عدد U است. برای مثال اگر $S = \{-۱۰, ۴, ۱۳, ۱۷\}$ آنگاه $U = ۲۰$ یک کران بالا است همچنین $U = ۱۷$ اما $U = ۶$ کران بالا نیست. مجموعه $\mathbb{N}$ از بالا کراندار نیست.

✍ توجه ۱.۱۰.

برای کمک به خواندن گزاره‌ها، سورها را قبل از گزاره‌ای که به آن اشاره دارد، قرار می‌دهیم. بنابراین گزاره "$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$" همان گزاره "$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$" است که $P(x)$ عبارت $\exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$ می‌باشد.
نوشتن سور در ابتدای جمله، استاندارد نیست، مگر زمانی‌که از نشانه نمادین $\forall$ و $\exists$ استفاده می‌شود. به‌علاوه بسیاری از ریاضی‌دانان عبارت "برای همه" را در پایان جمله می‌آورند (یا، بدتر، جا انداختن آن به‌طور کامل). برای مثال "$x^۲ \geq ۰$ برای همه $x \in \mathbb{R}$."

- **اخطار! ترتیب سورها مهم است.**

ترتیب سورها در مفهوم یک گزاره نقش اساسی دارد. مثال قبل را در نظر بگیرید. " برای هر $x \in \mathbb{Z}$ وجود دارد $y \in \mathbb{Z}$ به‌طوری‌که $x < y$." دیدیم که این گزاره درست بود، زیرا هر عدد صحیحی که به من بدهید می‌توانم یک عدد صحیح بزرگتر از آن پیدا کنم. این گزاره به زبان ریاضی به‌صورت "$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$" نوشته می‌شود.
اینک با تعویض ترتیب سورها داریم "$\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z}\ (y > x)$"، این گزاره را چنین می‌خوانیم، " عدد صحیحی مانند y وجود دارد به‌طوری‌که برای همه اعداد صحیح x , $x < y$". این نادرست است. این گزاره می‌گوید می‌توانم عدد صحیح y را پیدا کنم به‌طوری‌که اگر عدد صحیح x را به من بدهید، آنگاه y از x بزرگتر است. این نادرست است زیرا اگر با $y + ۱$ بیایید، آنگاه از y بزرگتر است.
اگر این ظرافت را درک نکردید، پیشنهاد می‌کنم که دوباره به خواندن ادامه دهید، تا آن را درک کنید، این در آینده، شما را از بسیاری از مشکلات نجات خواهد داد.

مثال ۴.۱۰.

*تعریف **کران بالا** را به یاد آورید: اگر*

$$\exists\ U\ \forall s \in S\ (s \leq U),$$

آنگاه گوییم S یک کران بالا دارد.
اگر $\forall$ و $\exists$ را جابه‌جا کنیم، آنگاه شرط تعریف به شرط $\forall s \in S\ \exists U\ (s \leq U)$ تبدیل می‌شود که همواره درست است، زیرا با انتخاب هر s کافی است U را $s + ۱$ در نظر بگیریم.

یک نکته مفید و مهم در گزاره "$\forall\ x\ \exists y\ P(x, y)$" امکان وابسته بودن y به x است.

توجه ۲.۱۰.

جابجایی $\forall$ و $\forall$ یا $\exists$ و $\exists$ در معنی گزاره تغییری ایجاد نمی‌کند، بنابراین می‌توان $\forall x, y$ را به‌جای $\forall x \, \forall y$ و $\exists x, y$ را به‌جای $\exists x \, \exists y$ به کار برد.

تمرین

۱. موارد زیر را با استفاده از $\forall$ و $\exists$ بازنویسی کنید.

(آ) برای همه اعداد صحیح x، عدد x زوج است یا فرد.

(ب) دو عدد اول وجود دارد که مجموع آن‌ها نیز عددی اول است.

(ج) یک عدد گویا موجود است که از $\sqrt{۲}$ بزرگتر است.

(د) اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $x^۲$ بزرگتر از x است.

(و) برای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد اول p وجود دارد به‌طوری‌که $p > n$.

۲. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. دلیل آن را توضیح دهید.

(آ) وقتی که x و y در $\mathbb{R}$ هستند، $\forall x \; \exists y \; (x^۲ = y)$.

(ب) وقتی که x و y در $\mathbb{R}$ هستند، $\forall y \; \exists x \; (x^۲ = y)$.

(ج) وقتی که x و y اعداد صحیح هستند، $\forall x \; \exists y \; (x^۲ = y)$.

(د) وقتی که x و y اعداد صحیح هستند، $\forall y \; \exists x \; (x^۲ = y)$.

(ذ) $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} \; (x + y = ۰)$.

(س) $\exists x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} \; (x + y = ۱)$.

(و) $\forall x \; P(x) \Longrightarrow \exists x \; P(x)$.

(ه) $\exists x \; P(x) \Longrightarrow \forall x \; P(x)$.

(ی) $\exists n \in \mathbb{N} \; s.t. \; n^۲ < n$.

چکیده

- ”برای هر“(برای همه) سور عمومی است و با نماد $\forall$ نشان داده می‌شود.
- ”وجود دارد“ سور وجودی است و با نماد $\exists$ نشان داده می‌شود.
- سورها را می‌توان با هم ترکیب کرد، اما ترتیب آن‌ها مهم است.

فصل ۱۱

ترکیب و نقیض سورها

هر چیزی ساده‌تر از آن است که فکر می‌کنید و هم‌زمان پیچیده‌تر از آن چیزیست که تصور می‌کنید.

" یوهان ولفگانگ فون گوته [۱] "

با افزایش تعداد سورها، درک یک گزاره، سخت‌تر و پیچیده‌تر می‌شود. در این فصل خواهیم دید که چگونه می‌توان به کمک سورها گزاره‌های پیچیده را ساخت و روشی برای درک این پیچیدگی ارائه کرد. در ادامه، خواهیم دید که چگونه گزاره‌های شامل سورها را نفی می‌کنیم؛ و خوشبختانه این کار، برای گزاره‌های پیچیده نیز به آسانی انجام می‌شود.

ترکیب سورها

تعداد سورهای موجود در هر گزاره ریاضی، میزان ناهنجاری و پیچیدگی گزاره را مشخص می‌کند. درک گزاره‌های با بیش از دو سور دشوار است. دلیل اصلی اینکه درک دقیق تعاریف حد، پیوستگی و مشتق‌پذیری در آنالیز دشوار است، همین تعداد سورها است.

در حقیقت، تکرار پیاپی $\forall$ و $\exists$ باعث پیچیدگی می‌شود. به‌عنوانِ‌مثال، معمولا گزاره $\forall x\ \forall y\ \exists z\ P(x,y,z)$ ساده‌تر از گزاره $\forall x\ \exists z\ \forall y\ P(x,y,z)$ خواهد بود. به هر حال، چون می‌توان $\forall x\ \forall y$ را با $\forall x,y$ تعویض کرد، فقط شمارش تعداد سورها، مقیاس مناسبی برای اندازه‌گیری دشواری یک گزاره است.

درادامه چند نمونه را می‌بینیم.

- **تک سوری**

مثال ۱.۱۱.

۱. $\forall x\in\mathbb{R}, x^{۲}\geqslant ۰$.

۲. *عدد U یک کران بالای مجموعه $S\subset\mathbb{R}$ است هرگاه، برای همه* $s\in S$، $s\leqslant U$.

۳. *معادله* $۵x-\cos(۴x)=۰$ *دارای یک جواب است.*

- **دو سوری**

مثال ۲.۱۱.

۱. $\forall x\ \exists y:\ y>x$.

---

[۱] یوهان ولفگانگ فون گوته ($Johann\ Wolfgang\ von\ Goethe$) زاده ۲۸ اوت ۱۷۴۹، درگذشته ۲۲ مارس ۱۸۳۲، شاعر، ادیب، نویسنده، نقاش، محقق، انسان‌شناس، فیلسوف و سیاست‌مدار آلمانی بود. وی یکی از مردان بزرگ فرهنگی قرون ۱۸ و ۱۹ اروپا و یکی از افراد برجسته ادبیات جهان محسوب می‌شود.

۲. $\exists y :\ \forall x\ (y > x)$.

۳. *"کران بالایی برای مجموعه $U \subset \mathbb{R}$ موجود است." دقت کنید در این‌جا سور موجود در تعریف کران **بالا** را مخفی کرده‌ایم. در واقع*

$$\exists U \in \mathbb{R}\ :\ \forall s \in S,\ s \leqslant U.$$

۴. *" عدد منحصربه‌فرد x وجود دارد به‌طوری‌که $P(x)$ درست است." یعنی xی وجود دارد که در $P(x)$ صدق می‌کند و علاوه بر آن اگر y موجود باشد که $P(y)$ نیز درست باشد، آنگاه x مساوی y است. می‌توان آن را چنین نوشت:*

$$\exists x\big(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Longrightarrow x = y)\big).$$

- **سه و چهار سوری**

مثال ۳.۱۱.

فرض کنید $a_۱, a_۲, a_۳$, ... دنباله‌ای نامتناهی از اعداد باشد. عدد l را **حد دنباله** *می‌نامیم، هرگاه*

$$\forall\ \epsilon > ۰\ \exists N \geq ۱\ :\ \forall\ n \geq N,\ \ -\epsilon < a_n - l < \epsilon.$$

این تعریف فوق العاده ناهنجار است. علاقه خاصی برای استفاده از آن در این کتاب ندارم؛ صرفا نشان دادم که گزاره‌های سه سوری امکان‌پذیر است. حال، می‌توان پرسید که آیا حد دنباله داده شده موجود است و گزاره‌ای چهار سوری را تولید کرد.

مثال ۴.۱۱.

فرض کنید $a_۱, a_۲, a_۳$, ... دنباله‌ای از اعداد باشد. گزاره زیر می‌گوید که این دنباله دارای حد است.

$$\exists\ l\ \in \mathbb{R},\ \forall\ \epsilon > ۰\ \exists\ N \geq ۱\ :\ \forall\ n \geq N,\ \ -\epsilon < a_n - l < \epsilon.$$

نگران چگونگی درک معنی دو مثال اخیر نباشید؛ توجه کنید که حتی درک گزاره‌های با سه سور نیز برای مغز انسان دشوار است. به روشی نیاز داریم که از طریق آن بتوان این دشواری‌ها را کاست؛ در ادامه فصل به این موضوع پرداخته خواهد شد.

راز و رمز مشاهده پیچیدگی‌ها

روشی وجود دارد که برای فکرکردن در مورد گزاره‌های چند سوری، برای من، کارایی دارد. دوست دارم که در مورد سورها به‌عنوان دو فرآیند متفاوت فکر کنم. در یک دست یک x تصادفی و در دیگری باید x خاص را پیدا کنم.

- **گزاره‌هایی که با ـ برای همه ـ شروع می‌شوند.**

گزاره‌هایی که شامل " برای همه " هستند، به‌شکل " $\forall x, P(x)$" هستند که $P(x)$ یک عبارت و معمولا یک شرط است. تصور می‌کنم که شخصی یک x به من داده است و باید نشان دهم که $P(x)$ درست است. اما او می‌تواند هر xی به من بدهد، بنابراین آنچه نشان می‌دهم باید با همه این xها قابل انجام باشد. به‌عنوانِ‌مثال، برای $\forall x, x^۲ \geq ۰$، باید برای هر xی که به ما داده می‌شود نشان دهیم $x^۲ \geq ۰$.

مثال ۵.۱۱.

می‌توانیم فرآیند مثال قبل را در عمل ببینیم، "$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$" در این‌جا اگر xیِ به من بدهند باید yی را بیابم به‌طوری‌که $y > x$. می‌توانم x را بگیرم و عدد ۱ را به آن اضافه کنم تا y به‌دست آید، یعنی $y = x + ۱$.

دقت کنید که yی که در این مثال پیدا کردم به x وابسته است. به‌عبارتی، برای هر x، به‌طور جداگانه قابل انجام است.

- **گزاره‌هایی که با ـ وجود دارد ـ شروع می‌شوند.**

برای گزاره‌هایی که شامل "وجود دارد" هستند، یعنی $\exists x, P(x)$. هدف پیداکردن xی است که در شرط $P(x)$ صدق کند. برای مثال، برای اینکه نشان دهم: $\exists x\ (x^۲+۲x-۳=۰)$، باید جواب معادله را به‌دست بیاورم. در واقع، به‌طورکلی، ممکن است نوشتن یک راه‌حل، دشوار باشد. نکته مهم این است که هدفم انجام این کار است. امیدوارم با وجود اینکه هیچ ایده‌ای برای آن ندارم، با تلاش برای انجام این کار بتوانم جوابی پیدا کنم.
برای مثال، واضح است که اگر $b^۲-۴ac \geq ۰$، آنگاه معادله $ax^۲+bx+c=۰$ دارای جواب حقیقی است. می‌توانم از این اطلاعات در مثال فوق "$\exists x\ (x^۲+۲x-۳=۰)$" استفاده کنم. لذا $b^۲-۴ac=۲^۲-۴(۱)(-۳)=۱۶$ چون این مقدار بزرگتر از ۰ است پس معادله دارای جواب حقیقی است. هنوز نمی‌دانم جواب آن چیست.

مثال ۶.۱۱.

گزاره "$\exists y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ \forall\ x \in \mathbb{Z},\ y > x$"، را در نظر بگیرید. این گزاره نادرست است. می‌توانیم نادرستی آن را به روش دیگری نیز ببینیم. این گزاره با $\exists\ y$ شروع می‌شود، بنابراین باید yی را پیدا کنم که شرط " برای همه xها، $y > x$ " را برآورده کند، پس از ابتدا باید یک عدد صحیح y داشته باشم. وقتی کسی یک x برابر $y+۱$ یا $y+۱۰۰۰$ به من می‌دهد چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ بله، $y > x$ برقرار نیست. در نتیجه گزاره نادرست است.

در اولی ابتدا کمیتی را در نظر می‌گیرم آنگاه باید پیدا کنم. در دومی ابتدا باید پیدا کنم آنگاه کمیتی داده می‌شود.

مثال ۷.۱۱.

اگر لازم است که نشان دهیم مجموعه S از بالا کراندار است، یعنی

$$\text{“}\exists\, U \in\ \mathbb{R}\ :\ \forall\, s \in\ S\ (s \leq U)\text{”}$$

آنگاه باید Uی را پیدا کنم که اگر کسی یک s از S به من داد، آنگاه، $s \leq U$.

به‌طور خلاصه، در مورد گزاره‌های "برای همه"، تصور می‌کنم کسی چیزی به من می‌دهد که هیچ کنترلی روی آن ندارم و برای گزاره‌های "وجود دارد" باید ابتکار عمل به خرج دهم و چیزی را در میان xهای ممکن پیدا کنم.
در گزاره‌های شامل دو سور، می‌توان آن را به‌عنوان یک بازی دو نفره تمرین کرد. برای مثال در گزاره " $\forall\, x\, \exists\, y\ P(x,y)$" می‌توانم چنین تصور کنم که کسی یک x را به من می‌دهد و برای برنده شدن باید yی را پیدا کنم که $P(x,y)$ درست باشد.

- **عبارات پیچیده‌تر**

اینک به مثال پیچیده‌ای نگاه می‌کنیم که در آن سه سور به کار گرفته شده است.

مثال ۸.۱۱.

در مثال ۳.۱۱ عدد l حد دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ است، اگر گزاره
$\forall\ \epsilon > ۰\ \exists\ N \geq ۱\ :\ \forall\ n \geq N,\ \ -\epsilon < a_n - l < \epsilon$ درست باشد.
می‌توانیم این گزاره را به‌صورت زیر بخوانیم:
اگر کسی یک ϵ به من هدیه دهد، آنگاه باید عدد طبیعی N را طوری پیدا کنم که هر زمان شخص دیگری nی بزرگتر از N به من هدیه داد، آنگاه در شرط $-\epsilon < a_n - l < \epsilon$ صدق کند. درست است که این گزاره پیچیده است، اما چگونگی برخورد با آن را درک می‌کنیم. یعنی می‌دانیم که چه کاری باید انجام دهیم. باید یک N پیدا کنم، از آنجا که در شروع یک ϵ به من دادند، احتمالا N به ϵ وابسته باشد.

این روش که سورها را به‌عنوان فرآیندها می‌بینیم برای حل مسئله‌ها بسیار مفید است.

مثال ۹.۱۱.

مسئله: نشان دهید به ازای هر زوج از اعداد طبیعی یک عدد طبیعی وجود دارد که از هر دو آن‌ها بزرگتر است.
راه حل: واضح است که درست است. گزاره را می‌توان به‌شکل
$\forall\, x, y\ \in\ \mathbb{N}\, \exists\, z \in\ \mathbb{N}\, (z > x \wedge z > y)$ *بازنویسی کرد. از این‌جا روشن است که اگر شخصی x و yی به من هدیه دهد آنگاه، باید یک z پیدا کنم. بنابراین به اثباتی نیاز داریم که بگوید "فرض کنید z مقداری بر حسب x و y باشد." طولی نمی‌کشد که خواهیم دید اگر قرار دهیم $z = x + y$، آنگاه z از x بزرگتر (از آنجا که y یک عدد طبیعی است، y از ۱ بزرگتر است.) و z از y نیز بزرگتر خواهد بود.*

فقط برای تکرار: کسی همراه با x و y می‌آید، من باید z را پیدا کنم.
راه‌حل پیراسته: قرار دهید $z = x + y$، آنگاه چون x و y مثبت هستند، پس $z > y$ و $z > x$.

نقیض سورها

نقیض گزاره‌های مجهز به سورها به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده است. گزاره "همه گربه‌ها خاکستری هستند." را در نظر بگیرید. نقیض آن، گزاره نفی " همه گربه‌ها خاکستری هستند." یا " همه گربه‌ها خاکستری نیستند." است. توجه داشته باشید که این یک امر منطقی است، به این معنی که گربه‌ای وجود دارد که خاکستری نیست. بدتر از این، پاسخ روزانه به گزاره "همه گربه‌ها خاکستری هستند." می‌باشد؛ برای آنکه بدانید منظور من چیست، شخصی را تصور کنید که می‌گوید "نه، همه گربه‌ها خاکستری نیستند".
با این حال، بیایید منطقی نگاه کنیم. اگر "همه گربه‌ها خاکستری هستند" اشتباه است، این به این معنی است که یک گربه غیر خاکستری وجود دارد، به‌عنوانِ‌مثال یک گربه وجود دارد که خاکستری نیست. بنابراین "وجود دارد" نقیض"برای همه" (برای هر) است.
به‌طورکلی، فرض کنید گزارهٔ $\forall\ x\ P(x)$ درست باشد. نقیض آن عبارت است از اینکه $P(x)$ برای هر x درست نیست. بنابراین حداقل یک xی باید موجود باشد به‌طوری‌که $P(x)$ نادرست باشد. یعنی $\sim P(x)$ درست است. به‌عبارت‌دیگر $\exists\ x\ \sim P(x)$. با این استدلال و استدلال مشابه برای "وجود دارد" می‌توانیم نشان دهیم

$$\sim (\forall\ x\ P(x)) \Longleftrightarrow \exists\ x\ \sim P(x)$$

$$\sim (\exists\ x\ P(x)) \Longleftrightarrow \forall\ x\ \sim P(x).$$

یعنی برای به‌دست آوردن نقیض یک گزاره، $\forall$ را به $\exists$ (و $\exists$ را به $\forall$) تبدیل می‌کنیم و جمله بعد از سور را نفی می‌کنیم.

مثال ۱۰.۱۱.

(آ) *نقیض گزاره " برای همه $x \in \mathbb{Z}$، $x^2 \neq 4$." گزاره "عدد صحیح xی وجود دارد به‌طوری‌که $x^2 = 4$." است. توجه کنید که گزاره دومی درست است. همچنین توجه کنید که بیش از یک عدد صحیح با این ویژگی وجود دارد.*

(ب) *نقیض گزاره "ریاضی‌دانی وجود دارد که با هوش نیست" گزاره "همه ریاضی‌دانان با هوش هستند." می‌باشد.*

(ج) *اگر عبارت $\exists y\ P(x, y)$ را به‌عنوان یک گزاره در نظر بگیریم، آنگاه گزاره " $\sim (\forall x\ \exists y\ P(x, y))$" را می‌توان به صورت " $\exists x \sim (\exists y\ P(x, y))$" نوشت. با به‌کارگیری مجدد قانون نقیض داریم:*

$$\exists\ x\ \forall\ y\ \sim P(x, y).$$

باتوجه‌به استدلال مثال قبل و اینکه سورهای چندتایی از چپ به راست نوشته می شوند، می توان درستی روابط زیر را نشان داد.

- **نقیض گزاره‌های مجهز به سور:**

برای به‌دست آوردن نقیض گزاره‌های به‌شکل

$$Q_۱x_۱Q_۲x_۲...Q_nx_nP(x_۱, x_۲, ..., x_n)$$

که در آن Q_i به ازای $۱ \leq i \leq n$ یکی از $\forall$ یا $\exists$ است به‌شکل زیر عمل می‌کنیم.

۱. هر$\forall$ را به $\exists$ و هر $\exists$ را به $\forall$ تبدیل می‌کنیم.

۲. به‌جای P نقیض آن را قرار می‌دهیم.

با استفاده از روش های فصل ۲۴ می توان مطلب فوق را به‌طور دقیق بررسی کرد. برای نوشتن گزاره‌ها، به‌جای نمادها برحسب واژه‌های فارسی (انگلیسی)، لازم است اندکی کلمات را جابه‌جا کنیم تا به خوبی خوانده شوند.

مثال ۱۱.۱۱.

مسئله: نشان دهید کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.
راه حل: به‌نظر می‌رسد این نفی یک گزاره باشد زیرا شامل کلمه "نه" در "ندارد" است. اگر مجموعه اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$ نشان دهیم، آنگاه این گزاره دقیقا به‌صورت
"$\sim(\exists\, x \in \mathbb{R}^+\ \forall y \in \mathbb{R}^+\ x \leq y)$" است. با صرف‌نظر کردن از نوشتن $\mathbb{R}^+$ و استفاده از فرایند فوق می‌توان گزاره را چنین نوشت، $\sim(x \leq y)$. $\forall\, x \exists y$ و این یعنی $\forall x\ \exists y\ (x > y)$.
این آخرین گزاره می‌گوید: اگر کسی یک x به من بدهد، نیاز به پیدا کردن yی دارم که کمتر از آن (و البته مثبت) باشد. این کار آسان است؛ اگر فقط y را نصف (یا یک سوم، یا یک چهارم ...) x در نظر بگیریم، آنگاه عددی مثبت و کمتر از x به‌دست می‌آید.
•راه‌حل پیراسته: گزاره "کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود دارد." به زبان ریاضی به‌شکل "$\exists\, x\ \forall y (x \leq y)$ " است. بنابراین باید نشان دهیم که $\sim(\exists\, x\ \forall y (x \leq y))$ درست است. این گزاره را می‌توان به‌صورت $\forall\, x\ \exists\, y (x > y)$ بازنویسی کرد. برای‌اثبات درستی آن کافی است به ازای هر x داده شده قرار دهیم $y = \frac{x}{۲}$، دراین‌صورت $۰ < y < x$.

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را با استفاده از نشانه‌های $\forall$ و $\exists$ بازنویسی کنید.

(آ) اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $a \neq ۰$، آنگاه معادله $ax + b = ۰$ دارای جواب است.

(ب) اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $a \neq ۰$، آنگاه معادله $ax + b = ۰$ دارای جواب منحصربه‌فرد است.

۲. گزاره‌های زیر را نفی کنید.

(آ) گربه‌ای خاکستری وجود دارد.

(ب) برای هر گربه یک مالک وجود دارد.

(ج) هر مالک یک گربه خاکستری دارد.

(د) هر ماشین آتش‌نشانی قرمز است و هر آمبولانسی سفید است.

۳. گزاره‌های زیر را نفی کنید.

(آ) امروز، بعضی از دانشجویان کلاس این‌جا نیستند.

(ب) فرض کنید $x, y, z \in \mathbb{N}$. برای هر x، یک y وجود دارد به‌طوری‌که $x = y + z$.

(ج) یک x منحصربه‌فرد وجود دارد به‌طوری‌که $P(x)$ درست است.

(د) همه دانشجویان ریاضی پرکار هستند.

(ث) امروز، تنها برخی از دانشجویان کلاس این‌جا هستند.

(ج) اگر x یک عدد صحیح باشد، $\sqrt{x}$ عددی گویا است.

۴. موارد زیر را ساده کنید.

(آ) $\sim (\forall\, y\, \exists\, x (P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y)))$.

(ب) $\sim (\exists\, x, y\, \forall\, z \sim (\forall\, u \exists\, v\; P(u,v,x,y,z)))$.

(ج) نقیض (وجود دارد $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ به‌طوری‌که برای همه ی $z \in \mathbb{Q}$ داریم $x \geq z$ و $z \geq y$).

(د) نقیض (وجود دارد $x \in \mathbb{R}$ و $y \in R$ به‌طوری‌که $x \geq y$ یا برای همه $z \in \mathbb{Q}$ داریم $x \geq z$ و $z \geq y$).

۵. نشان دهید:

(آ) $\exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq N, \frac{۱}{n} < \frac{۲۵}{۳۷}$.

(ب) $\exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq N, \frac{۵n^۲+۲}{n^۲} - ۵ < \frac{۱}{۱۰۰۰}$.

(ج) $\forall\, \epsilon > ۰\; \exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq N, \frac{۱}{n} < \epsilon$.

(د) $\forall\, \epsilon > ۰\; \exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \geq N, \frac{۵n^۲+۲}{n^۲} - ۵ < \epsilon$.

چکیده

- تعداد سورهای موجود در یک گزاره ریاضی، میزان ناهنجاری و پیچیدگی گزاره را نشان می‌دهد.
- برای اثبات $\forall x\ P(x)$، فرض کنید فردی یک x به شما می‌دهد و شما باید درستی $P(x)$ را نشان دهید.
- برای اثبات $\exists x\ P(x)$، شما باید xی که در $P(x)$ صدق می‌کند را بیابید.
- برای به‌دست آوردن نقیض یک گزاره، هر $\forall$ را به $\exists$ (و هر $\exists$ را به $\forall$) تبدیل کنید و جمله بعد از سور را نفی کنید.

فصل ۱۲

مثال‌ها و مثال‌های نقض

بعضی از واقعیت‌ها را به کمک مثال می‌توان روشن‌تر دید تا از طریق اثبات.

" لئونارد اویلر [1] "

اگر اشتباه کردم، یکی کافی است.

" پاسخ انیشتین وقتی که از کتاب ۱۰۰ نویسنده نازی علیه انیشتین آگاه شد.[2] "

در این‌جا برای اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان به یکی از بزرگترین رازها می‌رسیم. تاکنون در این کتاب به تعداد زیادی از ابزارهای مهم تفکر منطقی مانند گزاره‌ها، استلزام‌ها و سورها پرداخته‌ایم. بسیاری از کتاب‌های دیگر نیز این موارد را پوشش می‌دهند. اما جزئیات اندکی از آنچه که من به‌عنوان یکی از مهمترین ابزارها در نظر می‌گیرم را پوشش می‌دهند. اطمینان دارم که برخی از ریاضی‌دانان و همچنین نویسندگان کتاب‌های درسی با ضرورت تفکرِ شبیه به یک ریاضی‌دان موافقند. اما در کتاب های درسی به اهمیت واقعی آن پرداخته نمی‌شود.

پس این ابزار بزرگ پنهان چیست؟ ساده است! مثال‌ها. نقل قول اویلر، برای اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان، بسیار مهم است. بیایید در ابتدا یک تصور غلط و ممکن را کنار بگذاریم. ریاضیات مقدماتی اغلب به روش زیر تدریس می شود: "این به این معنی است که قاعده حاصل ضرب مشتق گیری چگونه کار می‌کند، در این‌جا چند مثال وجود دارد، اکنون شما بعضی از تمرینات را درست مانند مثال‌ها انجام دهید." این رویکرد میمونی است که از میمون دیگر تقلید می‌کند. دانشجویان به مسائلی می‌پردازند که بتوانند با نگاهی به مثال‌های داده شده و تنها با کپی کردن روش آن‌ها، حل کنند. (در واقع، این روش، برای ریاضیات مقدماتی، خوب کار می‌کند.) معمولا چنین مثالی را **مثالِ کاری** می‌نامند. این، آن چیزی نیست که مورد علاقه من است.

مسائلِ ریاضیاتِ پیشرفته سخت‌تر است (البته نه به این معنی که بخواهید از توابع بسیار پیچیده مشتق بگیرید.). مسائلی طرح می‌شود که نیاز است فکر کنید و آنچه را که نادیده آموخته‌اید به کار گیرید. سخت است!

چگونه می‌توان آن را ساده‌تر کرد؟ ابتدا، این تفکر که "همه نیازهای من، چند مثال کاری است" را کنار بگذارید. هیچ روشی برای معلمان، کتاب‌ها و یا وب‌سایت‌های جهانی وجود ندارد که بتوانند برای هر سوال احتمالی مثال‌های کاری بیابند.[3]

[1] لئونارد اویلر (*Leonhard Euler*) زاده ۱۵ اوریل ۱۷۰۷، درگذشته ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳، از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان برجسته سوئیسی بود. او کشف‌های بسیار مهمی در زمینه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریه گراف داشته است و برای کارهای خود در مکانیک، دینامیک سیالات، اپتیک و نجوم شهرت دارد. او یکی از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان سده‌ی ۱۸ و به‌عنوان یکی از بزرگترین دانشمندان تمام دوران شناخته شده است.

[2] آلبرت اینشتین (*Albert Einstein*) زاده ۱۴ مارس ۱۸۷۹، درگذشته ۱۸ آوریل ۱۹۵۵، فیزیکدان آلمانی بود. او بیشتر به خاطر نظریه نسبیت و به‌ویژه برای هم‌ارزی جرم و انرژی ($E = mc^2$) شهرت دارد.

[3] همچنین، به‌عنوانِ‌مثال، می‌خواهم به دانشجویانم بگویم وقتی در جایی مشغول به کار شدید و مدیرتان با شما تماس می‌گیرد و می‌خواهد بروید و مشکلی را حل کنید به او نمی‌گویید، « آیا می‌توانید چند نمونه از مشکلات مشابهی که توسط فرد دیگری حل شده است به من معرفی کنید؟» این

مثال‌های کاری در جای خود مهم هستند. اما درک درستی ایجاد نمی‌کنند. پس چه کار می‌کنند؟ قابلیتی برای خلق مثال‌های بیشتر هستند.

در این فصل آنچه را که به‌وسیله یک مثال معنی می‌یابد خواهیم دید، توضیح می‌دهیم که چرا یک راز بزرگ هستند، چگونه بر خلاف گزاره‌ها با آزمایش کردن آن‌ها مجبور به تفکر منطقی می‌شویم و چگونه آن‌ها را می‌سازیم. دسته مهمی از مثال‌هایی که به آن‌ها می‌پردازیم را به‌عنوانِ‌مثال نقض می‌شناسیم. از این مثال‌ها برای اثبات نادرستی گزاره‌ها استفاده می‌شود.

مثال‌ها

• عکس مثال‌های کاری

اجازه دهید ابتدا با مثال‌های کاری کنار بیاییم. بیان متعارف بیشینه و کمینه توابع در حسابان را در نظر بگیرید. ابتدا چگونگی مشتق‌گیری از یک تابع را تعریف می‌کنیم. نقاطی که مشتق در آن‌ها صفر است را به‌عنوان نقاط تکین (همچنین به‌عنوان نقاط برگشتی یا بحرانی نیز شناخته می‌شوند.) تعریف می‌کنیم. آنگاه گفته می‌شد که سه نوع نقطه تکین داریم: بیشینه، کمینه و انفصال. سپس نشان داده شد که مشتق دوم تابع، نوع نقاط را مشخص می‌کند. پس از آن مثال‌ها ارائه می‌شدند: این یک تابع است، در این‌جا نقاط تکین داریم، نقاط تکین از این نوع هستند. فرآیند آسانی است. مشتق گیری از f، حل معادله $f'(x) = 0$، مشتق‌گیری مجدد برای محاسبه f'' و استفاده از علامت f'' برای یافتن نوع نقاط.

این روش متعارفِ استفاده از مثال‌های کاری است. اگر این روش را یاد بگیرید، آنگاه می‌توانید بیشینه و کمینه تابعی که به شما داده می‌شود را به‌دست آورید. اما اگر من سوال را پیچیده کردم و از شما خواستم تابع f را بر حسب متغیر x طوری بسازید که در $x = 2$ دارای بیشینه و در $x = -6$ دارای کمینه باشد، چطور؟ این آزمایشی به‌مراتب بزرگ‌تر از فهمیدن است. این کار بسیار سخت‌تر است. ولی با تلاش برای انجام این کار می‌توانید ریاضیات زیادی را یاد بگیرید.

از این رو ساخت مثال، قابلیت کلیدی است. اغلب، فرآیندی به دانشجویان داده می‌شود و از آن‌ها خواسته می‌شود که با استفاده از این فرآیندها به سوالات خاصی پاسخ دهند. تفکر واقعی ریاضی با ایجاد مثال‌ها برای معکوس این فرآیندها حاصل می‌شود.

چند دلیل وجود دارد که چرا این یک راز بزرگ است. دلیل اصلی این است که بیشتر اوقات، از دانشجویان نخواسته‌اند که آن را انجام دهند. دلیل دیگر این است که استادان دوست ندارند سوالاتی را مطرح کنند مشروط بر اینکه بخواهند "یک مثال ایجاد کنید"، زیرا زحمت آن‌ها را زیاد می‌کند. تصحیح چنین مسائلی سخت‌تر است، زیرا باید با دقت بررسی شود. تصحیح پاسخ دانشجو به مسئله‌ای رایج، به‌مراتب ساده‌تر است. علاوه بر این، دانشجویان چنین مسائلی را دوست دارند، زیرا راه‌حل‌های متعارف را به راحتی می‌توان تقلید کرد. تولید مثال‌های خوب واقعا سخت است! و این می‌تواند محرکی برای دانشجویان باشد، این نیز دلیل دیگری است بر اینکه که استادان دوست ندارند چنین مسائلی را مطرح کنند. این ایده را می‌توانیم به‌صورت زیر خلاصه کنیم.

مثال‌های خود را بسازید: فرآیندی داده شده است که می‌تواند پاسخ یک مسئله را پیدا کند، آن را معکوس کنید و بپرسید، کدام مسئله چنین پاسخی دارد؟

به‌عنوانِ‌مثال، در حسابان مشاهده کردیم که تابعی داده می‌شود و باید مکان نقاط بیشینه و کمینه آن را پیدا کنیم. می‌توانیم این را با درخواست ارائه تابعی که بیشینه و کمینه آن از پیش تعیین شده است معکوس نماییم. به‌عنوان‌نمونه، مانند مثال بالا تعیین تابعی مانند f بر حسب متغیر x را در نظر بگیرید که در $x = 2$ بیشینه و در $x = -6$ کمینه داشته باشد.

• مثال‌هایی از موضوعات مورد بحث

ساخت مثال‌های شخصی یک روش عالی برای یادگیری ریاضیات است اما مثال‌ها کاربردهای دیگری نیز دارند.

۱. آزمایش کردن گزاره‌ها، یعنی آزمایش کنیم که آیا منطقی فکر می‌کنیم،

۲. یادآوری تعاریف و گزاره‌ها،

روش تنها برای جلوگیری از پیشرفت مناسب است.

۳. توضیحات.

زمانی‌که ایده‌ای همراه با یک گزاره به شما ارائه شود، می‌توانید به کمک مثال‌ها، ایده را کشف کنید. منظورم مثال‌های ساده و خوب است، مثلا $\mathbb{Z}$، مثالی از یک مجموعه نامتناهی است یا $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$ مثالی از یک تابع است. اگر فردی درباره مجموعه‌ای صحبت می‌کند، آنگاه می‌توانیم از مجموعه اعداد صحیح به‌عنوان یک مثال استفاده کنیم. همچنین می‌توان از مجموعه تهی به‌عنوان یک مثال خوب استفاده کرد. داشتن مثالی که به روشنی به گزاره‌ای نزدیک است، به درک موضوع کمک می‌کند. این را در تعداد زیادی از فصل‌های آینده خواهیم دید و همچنین در بخش بعد می بینید که می‌توان از مثال‌ها برای اثبات نادرستی گزاره‌ها استفاده کرد.
مثال‌ها می‌توانند ابزار قدرتمندی برای یادآوری گزاره‌ها باشند. یادآوری مثالی خاص از یک حقیقت و استفاده از آن برای "بازسازی" آن حقیقت بسیار ساده‌تر است. مثال‌های نقض نیز مفیدند. هنگامی که برای اولین بار آنالیز می‌خواندم، دریافتم که یک تابع ناپیوسته مثال خوبی برای یادآوری تعریف تابع پیوسته است. این تابع دقیقا همان چیزی را که در تعریف تابع پیوسته مورد نیاز بود مشخص می‌کرد.
دلیل سوم برای استفاده از مثال‌ها این است که ریاضیات را آسان‌تر شرح می‌دهند، حقیقت این است که تقریبا هر موضوعی را با یک مثال خوب توضیح می‌دهد. بنابراین، هنگامی که از شما خواسته می‌شود چیزی را توضیح دهید، مثال خوبی به توضیح خود اضافه کنید. این روی شنونده تاثیر می‌گذارد (به ویژه سخنرانان). تمرکز روی یک مثال به‌مراتب ساده‌تر از تمرکز روی یک گزاره انتزاعی یا یک تعریف است. پس خلاصه می‌کنیم:

- **مثال‌های خوب جمع آوری کنید.**

اینکه چگونه یک مثال خوب بسازیم، در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت. در حال حاضر فقط نشان می‌دهیم که مثال‌ها مهم هستند.

مثال‌های نقض

مثال نقض نوعی خاص از مثال می‌باشد.

تعریف ۱.۱۲.
مثالی که نشان دهد یک گزاره نادرست است را **مثال نقض** *می‌نامیم.*

بخش "نقض" از کلمه "مثال نقض" ناشی از این واقعیت است که در معرض نقض کردن هستیم، به این معنی که حقیقت یک گزاره را نپذیریم یا آن را رد کنیم.

مثال ۱.۱۲.

(آ) *گزاره "همه اعداد اول فرد هستند" را در نظر بگیرید، عدد ۲ مثال نقضی برای این گزاره است.*

(ب) *گزاره "اگر من چمران هستم پس من ایرانی هستم." به‌عنوانِ‌مثال نقضی برای گزاره " A نتیجه می دهد B هم ارز است با $A \sim$ نتیجه می‌دهد $B \sim$." به کار می‌رود.*

(ج) *گزاره "فرض کنید p و q اعداد حقیقی باشند. اگر $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ آنگاه، $p \in \mathbb{Q}$ و $q \in \mathbb{Q}$." را در نظر بگیرید. این می‌تواند کاملا منطقی به نظر برسد. به هر حال، فرض کنید $p = \frac{\pi}{3}$ و $q = \frac{\pi}{2}$ و می‌بینیم که $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$. بنابراین p و q اعداد حقیقی هستند به‌طوری‌که $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ درحالی‌که $p \notin \mathbb{Q}$ و $q \notin \mathbb{Q}$. لذا $q = \frac{\pi}{2}$ و $p = \frac{\pi}{3}$، مثال نقضی برای گزاره هستند.*

✍ **توجه ۱.۱۲.**
با داشتن مثالی خاص که در آن فرضیات و نتیجه‌گیری هر دو درست باشد نمی‌توان نشان داد که گزاره‌ای به‌شکل "اگر ...، آنگاه ..." درست است. بااین‌وجود، اگر بتوان مثالی پیدا کرد که در گزاره صدق نکند، آنگاه این گزاره دیگر قضیه نیست.

تمرین ۱.۱۲.
مثال نقضی برای گزاره "مربع یک عدد حقیقی عددی مثبت است." بنویسید.

چگونه مثال‌ها و مثال‌های نقض را بسازیم؟

بسیاری از درگیری‌های درونی یک ریاضی‌دان در مورد مثال‌ها و مثال‌های نقض است، بااین‌وجود، بیشتر اوقات، در کتاب‌ها و سخنرانی‌ها مورد غفلت قرار می‌گیرند. همان‌طور که پیشتر گفتم، اغلب، ساختن مثال‌ها و مثال‌های نقض بسیار دشوار است، اما در این‌جاست که ریاضی‌دان واقعی می‌تواند خود را نشان دهد.
بنابراین نخستین واکنش به اطلاعاتی که یک مثال به شما می‌دهد این است که مثال دیگری را پیدا کنید. اما این، تنها زمان انجام این کار نیست. شما باید یک ذهن شکاک پرورش دهید. از این رو، اگر کسی یک گزاره ساخت، آنگاه واکنش شما باید باور نکردنِ آن باشد و تلاش کنید مثالی بیابید که نشان دهد این گزاره نادرست است. حتی اگر گزاره درست باشد، تمرین ذهنی که از این فرآیند حاصل می‌شود سودمند است. همچنین درک نسبت به گزاره‌ها را توسعه می‌دهد. توجه داشته باشید که اگر دائما این کار را در شرایط زندگی واقعی انجام دهید، می‌تواند منجر به از دست دادن دوستانتان شود. اگر به‌طور مدام در گفته‌های مردم خطا بیابید، بی‌شک از شما ناراحت می‌شوند!

- **برای هر گزاره داده شده، یک مثال نقض بیابید.**

مثال ۲.۱۲.
در مقاله‌ای از یک روزنامه ادعا شده بود که سفر زمان به دلیل منطقی ناممکن است: اگر سفر زمان ممکن بود، یک فرد می‌توانست بسیاری از آیندگان را ملاقات کند. با خواندن این مقاله سعی کردم دلایل بسیاری برای نادرستی آن پیدا کنم. قبل از خواندن موارد زیر، آن را امتحان کنید.
برای اشتباه بودن مقاله چند ایده داشتم. شاید سفر زمان تنها اجازه سفر رو به جلو در زمان را بدهد. (با مقادیری بزرگتر از آنچه که در حال حاضر انجام می‌دهیم!). شاید مسافران زمان مجاز به ارتباط با ما نباشند. شاید مسافرت زمان، محدودیت داشته باشد و نتوانید بیش از یک سال به عقب برگردید درحالی‌که زمان سفر، چندین سال است (و شاید ماشین‌های زمان نتوانند کسی را جابه‌جا کنند).

درمورد ریاضیات چطور می‌توان این مثال‌ها را تولید کرد؟ یک راه این است که در ذهنمان، نمونه خوبی از مثال‌هایی که مورد استفاده فوری قرار می‌گیرند را آماده داشته باشیم. برای مثال، مجموعه تهی یا $\mathbb{Z}$.
راه دیگر، تمرین است. به این معنی که اگر تمرین بیشتری برای ساخت مثال و مثال نقض داشته باشید، آنگاه بهتر و سریعتر می‌توانید آن‌ها را بسازید. درست همانگونه که هیچ روش مطمئنی برای حل مسئله وجود ندارد، برای ساخت مثال نیز هیچ فرمول جادویی وجود ندارد. یکی از دلایلی که متون استاندارد از آوردن مثال و مثال نقض اجتناب می‌کنند این است که فقدان یک فرمول جادویی، استفاده از آن را دشوار می‌کند.
ساختن مثال‌ها و مثال‌های نقض در ابتدا بسیار خسته کننده است زیرا اولین تلاش‌ها، اغلب خیلی خوب نیست. مهم این است که این توانایی، به‌عنوان کلید پیشرفت در ریاضیات، پایدار بماند.

تمرین

۱. برای موارد زیر مثال پیدا کنید.

(آ) تابع غیر ثابت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌طوری‌که برای تعدادی متناهی از xها، $f(x)=۰$ باشد.

(ب) تابع غیر ثابت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌طوری‌که برای تعدادی نامتناهی از xها، $f(x)=۰$ باشد.

(ج) تابع غیر چندجمله‌ای $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌طوری‌که $f'(x)$ همواره مثبت باشد.

(د) تابع غیر چندجمله‌ای $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌طوری‌که $f'(x)$ برای $x<۰$ منفی و برای $x>۰$ مثبت باشد.

(و) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌طوری‌که در $x=-۲$ دارای بیشینه و در $x=۷$ دارای کمینه باشد.

۲. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را نشان دهید. برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیابید و درستی گزاره‌های درست را نشان دهید.

(آ) برای همه x هایی که $x<-۱$، $x^۳<۰$.

(ب) برای همه x هایی که $x>۱۰۰۰$، $x^۳>۰$.

(ج) برای همه x هایی که $x\leq ۱$، $x^۳\leq ۰$.

۳. برای موارد زیر مثال نقض پیدا کنید.

(آ) برای همه x هایی که $x\in\mathbb{Z}$، $\dfrac{(۱-x)}{x}$ عدد صحیح نیست.

(ب) $\forall\, a,\ b\in\mathbb{R}(a+b)^۲=a^۲+b^۲$.

(ج) $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}^+(\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

(د) $\forall\, x,\ y\in\mathbb{R}\ (\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

(و) اگر برای همه n هایی که $n\in\mathbb{N}$ $\quad x<y+(\frac{۱}{n})$ آنگاه $x<y$.

(ه) اگر $a<b$ و $c<d$ آنگاه، $ac<bd$.

(ی) اگر $n\in\mathbb{N}$ آنگاه، $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.

۴. برای گزاره ”معادله $f'(c)=۰$ نتیجه می‌دهد که f در c دارای بیشینه یا کمینه است.“ مثال نقض پیدا کنید.

۵. تمرینات قبلی که انجام داده‌اید را پیدا کنید و ”معکوس“ آن‌ها را بنویسید. سپس برای معکوس مثال یا مثال نقض بیابید.

چکیده

- مثال‌های خود را بسازید.
- مثال‌ها را گردآوری کنید.
- مثال نقض مثالی است که نشان دهد یک گزاره نادرست است.
- برای اثبات نادرستی یک گزاره فقط یک مثال نقض لازم است.
- همیشه سعی کنید نشان دهید که گزاره نادرست است.

فصل ۱۳

مختصری از منطق

چکیده‌ای از روش‌های نوشتن گزاره ”گزاره A نتیجه می‌دهد گزاره B را.“

- A نتیجه می‌دهد B.
- درستی A نتیجه می‌دهد درستی B را.
- $A \Longrightarrow B$.
- اگر A، آنگاه B.
- اگر A، B.
- B اگر A.
- A تنها اگر B.
- A شرط کافی برای B است.
- B شرط لازم برای A است.
- A نادرست است یا B درست است.

چکیده‌ای از روش‌های نوشتن گزاره ”گزاره A هم ارز گزاره B است.“

- A هم ارز B است.
- $A \Longleftrightarrow B$.
- A اگر و تنها اگر B.
- A شرط لازم و کافی برای B است.

بخش سوم

تعریف، قضیه و اثبات

فصل ۱۴

تعریف، قضیه و اثبات

ناب‌ترین تفکر، در ریاضیات است.

"افلاطون[1] "

اکنون به این موضوع می‌پردازیم که ریاضی‌دانان کار خود را چگونه سازماندهی و ارائه می‌کنند. به هر کتاب ریاضیات پیشرفته‌ای که نگاه کنید (یا به فصل ۱ نگاه کنید)، خواهید دید که ریاضیات بر خلاف رمان، به‌صورت قطعه‌ای از یک نثر پیوسته ارائه نشده است. به‌جای آن، متن به بخش‌های کوچکی از اطلاعات مانند قضیه، گزاره، لم، نتیجه، اثبات، تعریف و حدس، تقسیم می‌شود. همه این‌ها معنی خاصی دارند که در فصل‌های بعد به چگونگی درک آن‌ها خواهیم پرداخت.

مفاهیم

اکنون به‌طور خلاصه مفهوم کلمات فوق را به‌طور خلاصه شرح می‌دهیم.

- تعریف: شرح مفهوم ریاضی یک کلمه.
- قضیه: یک گزاره درست و بسیار مهم ریاضی.
- گزاره(حکم)[2] یک گزاره، با اهمیتی کمتر از قضیه ولی جذاب.
- لم: گزاره درستی که برای اثبات سایر گزاره‌های درست از آن استفاده می‌شود.
- نتیجه: گزاره درستی که به سادگی از یک قضیه یا یک گزاره(حکم) حاصل می‌شود.
- اثبات: توضیح اینکه چرا گزاره درست است.
- حدس: گزاره‌ای که فکر می‌کنیم درست است ولی اثباتی برایش نداریم.
- اصل: یک فرض اساسی در مورد یک موضوع ریاضی است.

[1] پلاتون یا پلاتو ملقب به افلاطون (*platon*) (۴۲۷/۴۲۸ ق.م. تا ۳۴۷/۳۴۸ ق.م) دوّمین فیلسوف از فیلسوفان بزرگ سه‌گانه یونانی (سقراط، افلاطون و ارسطو) است. افلاطون نخستین فیلسوفی است که آثار مکتوب از او به جا مانده است. کتاب جمهور او را مهم‌ترین کتاب تاریخ می‌شمارند که در آن به رابطه فرد و ساختار سیاسی، روانشناسی اخلاق، مفهوم عدالت، رابطه خرد و حکومت و برابری زن و مرد می‌پردازد.

[2] توجه کنید که معمولا هر دو کلمه لاتین *statement* و *proposition* به فارسی گزاره ترجمه می‌شود، این‌جا منظور کلمه دوم است.

تعریف

در مورد تعریف‌ها در فصل بعد توضیح بیشتری خواهیم داد. برای لحظه‌ای اجازه دهید بگوییم که در ریاضیات پیشرفته‌تر باید با توجه بیشتری به تعریف‌ها پرداخته شود، خیلی بیشتر از سطوح پایین‌تر. تعریف‌ها ما را توانمند می‌سازند تا دسته‌ای از اشیا را از دیگری جدا کنیم یا برخی از ویژگی‌های جذاب آن‌ها را مشخص کنیم.

گزاره‌های درست

واژه‌هایی نظیر قضیه، گزاره(حکم)، لم و نتیجه‌گیری، گزاره‌هایی را بیان می‌کنند که درست هستند.

•قضیه و گزاره(حکم)

مهمترین گزاره‌های ریاضی را **قضیه** می‌نامیم. هر نتیجه مهم، قضیه نامیده می‌شود. واژه **گزاره(حکم)** را برای گزاره‌هایی استفاده می‌کنیم که اهمیت کمتری دارند اما جذابیت ذاتی دارند. ارائه مثال‌هایی از تفاوت بین مفاهیم قضیه و گزاره(حکم) بسیار دشوار است به‌طوری که نویسندگان مختلف گزاره‌های یکسان را در دسته‌های مختلفی قرار می‌دهند. جایی دیدم، که دو ریاضی‌دان برجسته، مانند بچه‌ها در مورد تفاوت گزاره(حکم) و قضیه مشاجره می‌کنند، البته این اتفاق کم پیش می‌آید؛ نمی‌توانند ترسیمی دقیق از تمایز بین آن‌ها داشته باشند. در حقیقت، در این کتاب هم، از قضیه به معنای هر نوع گزاره درست استفاده خواهد شد.

مثال ۱.۱۴.

موارد زیر درست است.

۱. *ناپلئون کورسایی*[۳] *بود.*

۲. *هر عدد طبیعی را می‌توان به‌شکل حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت.* (*این در قضیه ۵.۲۵ نشان داده خواهد شد.*)

•لم

گزاره‌ای که خود یک گام در مسیر اثبات گزاره‌ای دیگر است را **لم** گوییم. برای لم‌ها به نسبت گزاره‌ها(حکم‌ها)، اهمیت کمتری در نظر گرفته می‌شود و مجددا تمایز بین دسته‌بندی‌ها نسبتا واضح نیست.

نکته جالب توجه این است که اغلب آن‌ها، درنهایت به نتیجه مطلوبی تبدیل می‌شوند که سودمندتر از گزاره‌ای هستند که در اثباتش از آن‌ها استفاده می‌شود.

•نتیجه

گزاره‌ای که از یک قضیه یا گزاره (حکم) به‌دست می‌آید را **نتیجه** گوییم.

مثال ۲.۱۴.

ناپلئون فرانسوی بود. (*زیرا کورسا متعلق به فرانسه بود و در مثال* ۱.۱۴ (۱) *دیدیم که ناپلئون کورسایی بود.*)

سایر اصطلاحات

•اثبات

ریاضی‌دانان مسئله‌ها را حل می‌کنند، اثبات تضمین می‌کند که راه‌حل‌های آن‌ها صحیح است.

تفسیری که درست بودن یک گزاره را شرح می‌دهد **اثبات** گوییم. از آنجا که تاکید بر اثبات، یکی از ویژگی‌های تعریف ریاضیات پیشرفته است، پس در مورد اثبات خیلی بیشتر خواهیم گفت. به‌عبارتی، این کتاب درباره اثبات است.

[۳] کورسا یا کورسیکا جزیره‌ای کوهستانی در دریای مدیترانه و متعلق به فرانسه است.

•حدس

حدس گزاره‌ای است که فکر می‌کنیم درست است ولی اثباتی برای آن نداریم. ساختن حدس‌ها آسان است. ساختن حدس خوب، سخت‌تر است. هر ریاضی‌دان خوب در هنگام کار کردن حدس‌هایی را می‌سازد، آزمایش می‌کند و اصلاح می‌کند.

•اصل

فرض اساسی درباره یک حالت را **اصل** گویند. اصول را می‌توان به‌عنوان حقایقی در نظر گرفت که نیازی به اثبات ندارند (فقط برای اینکه ما را به هدف سوق دهند.) و یا می‌توانند در تعریف‌ها مورد استفاده قرار گیرند. اقلیدس در اثر خود روی هندسه پنج اصل را در نظر گرفته است، به‌عنوان‌مثال، بین هر دو نقطه می‌توان یک خط رسم کرد، و قضیه‌ها از این اصول نتیجه می‌شوند. نکته این است که این اصول تنها حقایقی هستند که بدون اثبات از آن‌ها استفاده می‌شود. اصول در تعریف‌ها نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌عنوان‌مثال، **گروه** مجموعه‌ای است که با روشی یک جفت عضو آن را در هم ضرب می‌کند تا عضو سومی تولید کند. این ضرب، که عمل دوتایی نامیده می‌شود، باید برخی از خواص را برآورده کند؛ این خواص را اصول می‌نامیم. بیش از این در مورد اصول صحبت نخواهیم کرد.
آخرین قضیه فرما

شاید مرور آخرین قضیه فرما برای دیدن استفاده نادرست ریاضی‌دانان از واژه‌های بالا جالب باشد.
آخرین قضیه فرما در بین ریاضی‌دانان معروف است و داستان آن در کتابی با عنوان آخرین قضیه فرما نوشته سایمن سینگ[۴] بیان شده است.

قضیه ۱.۱۴.
قضیه آخر فرما: *اعداد صحیح و مثبت x، y و zی وجود ندارند که به ازای $n > 2$ در معادله $x^n + y^n = z^n$ صدق کنند.*

احتمالا این قضیه شگفت‌انگیز باشد زیرا برای $n = 2$، یعنی $x^2 + y^2 = z^2$، معادله جواب‌های زیادی دارد. فرما این گزاره را حدود سال ۱۶۳۰ میلادی در یک دفترچه یادداشت نوشت و ادعا کرد که اثبات آن را در ذهن دارد اما به دلیل طولانی بودن بیش از حد آن، جای کافی برای نوشتن در حاشیه وجود ندارد. او هرگز اثباتی ارائه نکرد و هیچ فرد دیگری نیز نتوانست؛ تا این که اندرو وایلز[۵] در سال‌های دهه ۱۹۹۰ اثباتی برای آن ارائه داد. بااین‌وجود این گزاره به‌عنوان آخرین قضیه فرما شناخته شد، درصورتی‌که حدود ۳۵۰ سال یک حدس بود. وایلز با اثبات قضیه بسیار بزرگتری آن را نتیجه گرفت. این قضیه به‌عنوان حدس تانییاما- شیمورا شناخته شده است هر چند یک قضیه است.
بنابراین آخرین قضیه فرما که یک حدس بود نتیجه‌ای از حدس تانییاما - شیمورا است که در حقیقت یک قضیه است!
خوشبختانه، این مثال نشان می‌دهد که ریاضی‌دانان در استفاده از این اصطلاحات همواره انعطاف‌پذیر هستند.

---

[۴] *Simon Singhs book Fermat's Last Theorem*
[۵] *Andrew Wiles*

تمرین

۱. چند کتاب بیابید و ارتباط بین تعدادی از تعریف‌ها، لم‌ها، گزاره‌ها (حکم‌ها)، قضیه‌ها و نتایج را در آن‌ها بررسی کنید.

۲. دو کتاب پیدا کنید که در آن‌ها گزاره‌ای یکسان در یکی به‌عنوان گزاره (حکم) و در دیگری به‌عنوان قضیه مطرح شده باشد.

چکیده

- تعریف، مفهوم یک کلمه را شرح می‌دهد.
- لم، گزاره(حکم)، قضیه و نتیجه همگی گزاره‌های درست هستند.
- اثبات، توضیحی است برای اینکه چرا یک گزاره درست است.
- حدس، گزاره‌ای است که فکر می‌کنیم درست است ولی اثباتی برای آن نداریم.
- اصل، یک فرض اساسی در مورد یک موضوع ریاضی است.

فصل ۱۵

خواندن تعریف

در هندسه ...، افراد شروع به تبیین مفاهیم کلمات خود می‌کنند؛ که ...، آن‌ها را تعریف می‌نامند.

"توماس هابز[۱]، ۱۶۵۱ "

در ریاضیات پیشرفته تعریف‌ها حیاتی هستند. به دقتی نیاز داریم که همه بتوانیم بر سر چیزی که درباره آن صحبت می‌کنیم به توافق برسیم. بااین‌حال، باتوجه‌به اولویت‌های شخصی، ممکن است تعریف‌های ریاضی‌دانی با ریاضی‌دان دیگری اندکی متفاوت باشد، پس باید هوشیار بود.

بیشتر اوقات دلیل اختصاص یک نام به یک شی ریاضی در طول زمان فراموش می‌شود. بیشتر نام‌ها از کلمات انگلیسی عادی گرفته می‌شود، اما ممکن است مفهوم ریاضی آن‌ها با آنچه که در صحبت‌های روزمره به کار می‌رود متفاوت باشد و هیچ اشاره‌ای به تعریف نکند. مثلا، مهمترین اشیا مورد علاقه در جبر عبارتند از گروه‌ها، حلقه‌ها و میدآن‌ها! نام اشیا می‌تواند طنز آمیز باشد، مانند حرص و آز یا می‌تواند از نام یک فرد گرفته شده باشد، مانند حلقه گرنشتاین[۲]. در مورد دوم هیچ تضمینی وجود ندارد که شخص با آن ارتباط داشته باشد، دانیل گرنشتاین ادعا کرده است که تعریف حلقه گرنشتاین را نمی‌داند، بااین‌وجود، بعد از او آن را حلقه گرنشتاین نامیدند.

تعریف چیست؟

هر تعریف ریاضی، مفهوم یک کلمه (یا عبارت) را به روشی خاص بیان می‌کند. به‌طورکلی کلمه (یا عبارت) برحسب ویژگی‌ها بیان شده است.

برای شروع به چند مثال (تقریبا ساده) می‌پردازیم.

۱. یک عدد صحیح **زوج** است، اگر حاصل‌ضرب عدد ۲ در عدد صحیح دیگری باشد.

۲. یک عدد صحیح **فرد** است، اگر زوج نباشد .

۳. مجموعه X با تعداد متناهی عضو یک **مجموعه متناهی** است.

۴. اگر یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱ فقط بر خودش و ۱ بخش‌پذیر باشد، آنگاه آن را **اول** می‌نامیم.

۵. عدد اول p را **اوّل دوقلو** می‌نامیم، اگر اعداد $p+۲$ یا $p-۲$ اول باشند.

---

[۱] توماس هابز ($Thomas\ Hobbes$) یکی از فیلسوفان سیاسی برجستهٔ انگلستان بود که بیشتر به سبب کارهایش در فلسفهٔ سیاسی و کتاب لوایِتان ($Leviathan$) شهرت دارد. این کتاب در سال ۱۶۵۱ نوشته شده و بنیان بسیاری از نظریه‌های قرارداد اجتماعی را در فلسفهٔ سیاسی به وجود آورده است.

[۲] Gorenstein

۶. عدد صحیح و مثبت n را **عدد مربع** می‌نامیم، اگر عددی صحیح مانند x وجود داشته باشد به‌طوری‌که $n = x^2$.

۷. یک عدد طبیعی را **مربعی** می‌نامیم، اگر ارقام آن آخرین ارقام مربع آن باشد.

۸. یک عدد اول را **مربعی دوقلو**گوییم، اگر مربعی و دوقلو باشد.

دو قسمت آخر ساخته شده‌اند تا به‌عنوان مثال مورد استفاده قرار گیرند، بنابراین انتظار نداشته باشید آن‌ها را در کتاب‌های دیگر ببینید.

هدف یک تعریف

هدف اصلی تعریف این است که شیئی را که در موردش صحبت می‌کنیم، هر کسی بشناسد. به‌عنوان‌مثال، در فصل اول دیدیم که برخی ریاضی‌دانان مجموعه اعداد طبیعی را شامل ۰ و برخی فاقد ۰ تعریف می‌کنند؛ این گیج‌کننده است. اما اگر چند تعریف درباره یک شی، توسط نویسنده که متفاوت از خواننده است مورد استفاده قرار گیرد ابهام بزرگتری ایجاد می‌شود. لذا نویسنده با ارائه یک تعریف صریح از چنین ابهامی جلوگیری می‌کند.

در مورد اعداد طبیعی دو مفهوم متفاوت با نام یکسان ارائه شده است. می‌توان حالتی را در نظر گرفت که دو تعریف متفاوت اما در حقیقت با مفهوم یکسان ارائه شود.

دلیل اصلی ریاضی برای ارائه یک تعریف، مشخص‌کردن موضوعاتی جذاب است که ارزش مطالعه کردن داشته باشند. (اگرچه گاهی تعریفی ارائه می‌کنیم که موضوعات بد را حذف کنیم.) همچنین، از نظر روانشناسی، ساده‌تر است که بر هر مفهومی که با آن سروکار داریم، نامی بگذاریم.

تعریف‌ها را می‌توان به‌عنوان پاسخ یک مسئله به کار برد. به‌عنوان‌مثال، اگر i را ریشه دوم ۱− تعریف کنیم، آنگاه می‌توانیم شروع به تعریف اعداد مختلط کنیم. تعریف اعداد مختلط مقدمه‌ای برای ورود به نظریه خوب معادلات مربعی (که همواره دارای جواب هستند) می‌باشد و به‌طور شگفت‌انگیز، به حل مسائلی مانند معادلات دیفرانسیل معمولی کمک می‌کنند.

در مطالعه ریاضیات، نام‌گذاری دقیق تعریف‌ها، حیاتی و مهم است. تعریف باید شامل همه حالت‌های درست باشد در غیر این صورت چیز دیگری تعریف کنید. یک مشکل عمومی که در بین دانشجویان یافتم این است که در برخی مسائل نمی‌توانند پیشرفت کنند؛ زیرا تعریف یک اصطلاح را نمی‌دانند. این مثالی است از اینکه دانشجویان، ریاضیات را به‌عنوان "به‌کارگیری یک فرآیند" می‌بینند نه به‌عنوان "درک مفاهیم".

طبیعت تعریف‌های ریاضی، اگر و تنها اگر

ارائه تعریف‌ها جایی رخ می‌دهد که ریاضی‌دانان تردید دارند. در یک تعریف شامل " اگر" آنچه مورد نظر است یک "اگر و تنها اگر" است. بخش " تنها اگر" تعریف به‌عنوان یک بخش واضح و روشن حذف شده است. به‌عنوان‌مثال در تعریف فوق عدد صحیح n مربعی است اگر به ازای xی صحیح $n = x^2$، باید به‌شکل گزاره "اگر و تنها اگر" خوانده شود:

عدد صحیح n مربعی است اگر و تنها اگر به ازای xی صحیح $n = x^2$.

به عبارت دیگر عدد را مربعی می‌نامیم، اگر شرط درست باشد، اما تنها اگر شرط درست باشد. به‌عبارت‌دیگر هیچ عدد مربعی وجود ندارد که در شرط صدق نکند. نکته مهمی که باید در ذهن داشته باشیم این است که فقط در تعریف‌های ریاضی می‌توان " اگر" را به‌عنوان "اگر و تنها اگر" خواند؛ ولی برای مثال هنگام خواندن قضیه‌ها این تصور را نداشته باشید.

چگونه خواندن یک تعریف

- **مشاهده**

روشن است که در یک تعریف باید به‌طور دقیق شرایط مفروض را مشاهده کنیم. در نظر داشته باشید که اجازه ندارید هیچ چیز را اضافه کنید. دقت کنید که در یک تعریف (مثال) نه فقط بخشی از شرایط بلکه همه آن‌ها باید درست باشند. به‌عنوان‌مثال، در تعریف "مربعی ـ دوقلو" فوق، لازم است که عدد اول هم مربعی و هم دوقلو باشد. مثلا اگر یک عدد اول دوقلو باشد ولی مربعی نباشد، آنگاه مربعی ـ دوقلو نیست.

- **چطور برخورد کنیم؟**

اولین وظیفه این است که مشخص کنیم برخورد ما چیست. آیا این چیزی است که هم اکنون خوب می‌شناسیم و یک خاصیت اضافه دارد؟ برای مثال یک عدد اول دوقلو صرفا عدد اول p است با این شرط اضافی که $p+۲$ یا $p-۲$ اول هستند. می‌توانیم سوالات خود را مطرح کنیم. آیا این تعریف، مشابه یا متفاوت از تعریفی است که هم اکنون می‌شناسیم؟ آیا این مشابه چیز دیگری است؟ آیا این تعریفی شناخته شده به همراه یک شرط اضافه است؟ برای مثال زیرمجموعه حقیقی X زیرمجموعه‌ای از X است همراه با این شرط اضافه که با X برابر نیست.

- **چه مثال‌هایی از این تعریف موجود است؟**

برای هر تعریف ارائه شده نیاز است که بپرسیم آیا چنین اشیائی وجود دارند؟ مسلما بعید است تعریفی ارائه کنید که هیچ شیئی در آن صدق نکند! نکته در این است که با شک و تردید اولیه نسبت به تعریف، درک خود را از آن بیشتر کنیم. چنین اشیائی، درصورت‌وجود چقدر رایج هستند؟ آیا آن شی منحصربه‌فرد است؟ آیا تعدادی متناهی از آن وجود دارد؟ یا تعداد نامتناهی؟

به مثال صفحه ۱۳۴ برمی‌گردیم. روشن است که اعداد زوج و فرد وجود دارند. به وضوح تعداد نامتناهی مجموعه متناهی وجود دارد. بنابراین توزیع آن‌ها فراوان است و به راحتی می‌توان مثال‌ها را ساخت. درباره اعداد اول دوقلو چه می‌توان گفت؟ خوب، ۵ و ۷ اول دوقلو هستند. به همین ترتیب ۴۱ و ۴۳. اما ممکن است فقط همین تعداد موجود باشند. اگر به فهرست اعداد اول کمتر از ۱۰۰۰ نگاه کنید خواهید دید که بیش از این‌ها وجود دارند. بنابراین می‌توان پرسید که آیا تعداد اعداد اول دوقلو نامتناهی است؟ بد نیست بدانید که هیچ کس نمی‌داند.

نمونه‌ای دیگر، اعداد مربع را یادآوری می‌کنیم. یک عدد طبیعی را مربع می‌نامیم، هرگاه ارقام آن آخرین ارقام مربع آن باشد. آیا مثالی از آن وجود دارد؟ واضح است که $۲۵ = ۵^۲$ و رقم آخر ۵ است. پس ۵ مربع است. آیا اعداد مربع دیگری وجود دارد؟ خوب آزمایش نشان می‌دهد که $۵۷۷۶ = ۷۶^۲$ پس ۷۶ نیز مربعی است. از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ اعداد ۱، ۵، ۶، ۲۵ و ۷۶ مربع هستند. بنابراین فقط پنج عدد از بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ دارای این خاصیت هستند. به راحتی می‌توان دید که با بزرگتر شدن اعداد، این خاصیت کمتر دیده می‌شود. حال چندین ایده در مورد مفهوم مربع داریم.

- **مثالهای استاندارد بیابید.**

از بین مثال‌ها باید مثال‌های استانداردی انتخاب کنیم که خواص تعریف را به روشنی نشان دهند و مهم‌تر از این به ما کمک کنند که تعریف‌ها را به یاد آوریم. (در استفاده از مثال‌ها برای تعریف‌ها باید دقت کنیم زیرا گاهی اوقات این مثال‌ها می‌توانند گمراه کننده باشند. باید درست انتخاب کنیم!) به‌عنوان‌مثال وقتی که با تعریفی شامل اعداد اول مواجه می‌شویم؛ من اغلب از اعداد ۳، ۵ و ۱۳ (عدد ۲ کمی خطرناک است. اندکی بعد دلیل آن را می‌بینید.) ببرای مثال استفاده می‌کنم. زیرا این اعداد برای محاسبات به اندازه کافی کوچک هستند. اگر با مجموعه‌های نامتناهی سروکار داشته باشیم، اغلب $\mathbb{Z}$، مجموعه اعداد صحیح را به‌عنوان‌مثال انتخاب می‌کنم.

همان‌طور که در فصل بعد خواهیم دید یکی از دلایل یافتن مثال‌های استاندارد این است که بتوانیم آن‌ها را در تجزیه و تحلیل قضیه‌ها به کار گیریم و درک و فهم خود را عمیق‌تر کنیم.

- **مثالهای بدیهی بیابید.**

مفهوم مثال بدیهی یک صفت نسبی و وابسته به متن است. اساسا یک شی بدیهی است، هرگاه به‌طور روشن یک مثال باشد. در جستجوی مثال‌های خیلی خیلی ساده هستیم. مثال‌های بدیهی درک ما را نسبت به تعریف وسعت می‌دهند و می‌توانند در هنگام تجزیه و تحلیل قضیه‌ها و اثبات‌ها ارزشمند باشند.
اعداد ۰ و ۱ ، اغلب بدیهی فرض می‌شوند. بنابراین وقتی برای اولین بار با تعریف‌های فوق مواجه می‌شوید، ممکن است شخصی بپرسد که عدد ۰ زوج است یا فرد؟ (زوج است زیرا حاصلضرب ۲ و ۰ است). در تعریف $n!$ ممکن است بپرسند $0!$ چه باید باشد؟ این مورد در تمرین‌ها بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.
به‌طور مشابه می‌توانیم بپرسیم " آیا ۱ عددی اول است؟" در حقیقت خیر، در تعریف ارائه شده برای اعداد اول باید اعداد بزرگتر از ۱ باشند. چرا ریاضی‌دانان این شرط را لحاظ کرده‌اند؟ در حقیقت، می‌توانیم یک را به‌عنوان عدد اول فرض کنیم. واضح است که بر ۱ و خودش بخش‌پذیر است. مسئله آنجاست که اگر ۱ عدد اول باشد، آنگاه خیلی از گزاره‌های درست در مورد اعداد اول نقض می‌شوند. اساسا تجربه نشان داده است که ریاضی‌دانانی که تدریس می‌کنند، اول بودن عدد ۱ را ایده‌ای مناسب نمی‌دانند.
مجموعه تهی، $\emptyset$، یک مجموعه بدیهی است. نمی‌توانید مجموعه‌ای فاقد عضو و بدیهی‌تر از تهی بیابید! می‌توان پرسید " آیا تهی یک مجموعه متناهی است؟" پاسخ مثبت است زیرا مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد. یعنی تعداد عناصرش صفر است. مجموعه‌های تک عضوی مثال‌های خوبی برای مجموعه متناهی می‌باشند. یعنی اغلب بدیهی هستند.
در مثال ۶.۱ دیدیم که $X \subseteq X$ و $\emptyset \subseteq X$ مثال های بدیهی از زیرمجموعه‌ها هستند.
برای توابع روی مجموعه اعداد حقیقی یا مجموعه اعداد صحیح، تابع f با ضابطه
$f(x) = 0$ یا هر تابع ثابت دیگر مثال‌های بدیهی هستند. در هندسه خطوط، دوایر و حتی صفحه‌ها مثال‌های بدیهی هستند.
خیلی مهم است که همواره به یاد داشته باشید که بدیهی بودن وابسته به متن است. در برخی حالت‌ها ۰ و ۱ بدیهی نیستند (به اعداد دو دویی فکر کنید.)

- **مثالهای خطرناک بیابید.**

این نیز مشابه قسمت قبل است. مجددا وابسته به موضوع است. در این‌جا منظور از مثال خطرناک، مثالی از تعریف است که در مرز تعریف قرار گیرد. بنابراین شخص می‌تواند یک مثال بدیهی را خطرناک فرض کند. به‌هرحال، بیشتر اوقات خواستار چیزی قوی‌تر و آسیب‌شناسی شده هستیم. برای مثال، در توپولوژی مثال‌هایی از منحنی‌ها وجود دارند که کل صفحه را پر می‌کنند. ممکن است انتظار داشته باشیم که یک منحنی، شیئی یک بعدی را بپوشاند. اما چنین چیزی وجود ندارد. این یک مثال افراطی از آنچه اتفاق می‌افتد است.
برای یک لحظه اجازه دهید مثالی در مرز یک تعریف را در نظر بگیریم. بنابراین در تعریف ارائه شده از زیرمجموعه X در فصل اول، می‌توان X و $\emptyset$ را به‌عنوان زیرمجموعه‌های خطرناک در نظر گرفت. زیرا نمی‌توان زیرمجموعه‌هایی از X پیدا کرد که از $\emptyset$ کوچکتر یا از X بزرگتر باشند. برای نمونه‌ای دیگر، ۲ مثالی خطرناک از اعداد اول است زیرا اولین عدد اول و تنها عدد اول زوج است.

- **نا_مثال‌ها را بیابید.**

ایده خوبی است که چند مثال که در شرایط تعریف صدق نمی‌کنند را بشناسیم. چنین مثال‌هایی را نا_مثال می‌نامیم. این را با مثال نقض (مثالی است که نشان دهد یک گزاره نادرست است.) اشتباه نگیرید.
در واقع، نا_مثال‌ها ابزار مفیدی برای یافتن مثال‌های نقض یک گزاره‌اند. اما می‌توان آن‌ها را برای تثبیت یک تعریف به کار گرفت. برای نمونه وقتی تعریف تابع پیوسته[3] را یادآوری می‌کنیم. یک نا_مثال خاص یعنی یک تابع ناپیوسته را در نظر می‌گیرم.

[3] تعریف تابع پیوسته به دلیل پیچیدگی زیاد در این‌جا قابل بیان نیست. اگر ریاضیات پیشرفته‌تری را مطالعه کردید، به آن برخورد می‌کنید یا به زودی با آن ملاقات خواهید کرد.

یک ناـمثال برای مجموعه متناهی، مجموعه اعداد صحیح است. مجموعه $\emptyset$ یک نامثال برای یک مجموعه نامتناهی است ولی نسبتا خطرناک است. لذا هر مجموعه متناهی دیگر، نسبت به تهی بهتر است.

- **خلق اشیا جدید از اشیا پیشین**

هنگامی که یک تعریف خلق می‌شود شایسته است که اشیا جدیدی از روی اشیا قدیمی ساخته شود. برای نمونه، در فصل اول دیدیم که با استفاده از مفهوم مجموعه می‌توان مفاهیم زیرمجموعه، اشتراک، اجتماع و حاصل‌ضرب مجموعه‌ها را ساخت.

به‌علاوه اگر شی، یک مجموعه یا یک خاصیت باشد، می‌توان پرسید آیا این خاصیت برای زیرمجموعه، اشتراک و غیره برقرار است؟ برای مثال آیا زیرمجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است؟ بله متناهی است و آیا زیرمجموعه یک گروه نیز گروه است؟ خیر زیرا ممکن است عمل دوتایی روی زیرمجموعه کار نکند. مثلا ممکن است حاصل‌ضرب دو عضو x و y از زیرمجموعه در زیرمجموعه نباشد. (برای تعریف دقیق عمل دوتایی بخش تمرین را ببینید.)

تمرین

۱. برای موارد زیر مثال بیابید.

(آ) فرض کنید X یک مجموعه باشد، یک **عمل دوتایی** روی X را با نگاشت $\star : X \times X \longrightarrow X$ تعریف می‌کنیم. یعنی دو عضو X را می‌گیرد و عضو سوم را تولید می‌کند. معمولا، برای دو عضو x و y عضو سوم را به‌شکل $x \star y$ می نویسیم. برای مثال، فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ و $\star = +$، آنگاه $\star$ صرفا عمل جمع روی اعداد صحیح است.

(ب) یک عمل دوتایی را **جابجایی** می‌نامیم، اگر برای همه $x, y \in X$، $x \star y = y \star x$.

(ج) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **محدب** نامیده می‌شود، اگر برای همه $x < y$ و $۰ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم:

$$f(tx + (۱ - t)y) \leq tf(x) + (۱ - t)f(y).$$

(د) فرض کنید x یک عدد طبیعی باشد، مجموع مربعات ارقام آن را حساب کنید و عدد جدیدی تولید کنید. این فرآیند را ادامه دهید تا عدد ۱ تولید شود و یا اینکه تا بی‌نهایت بار تکرار شود. اگر این فرآیند به ۱ ختم شود آنگاه عدد صحیح x را **عدد شاد** می نامیم.

۲. همه می‌دانیم که برای اعداد a، b ، c و d داریم $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ و اینکه این اتحاد تا چه اندازه مفید است. چرا نمی‌توانیم جمع دو کسر را مشابه این تعریف کنیم؟ یعنی نمی‌توانیم برای اینکه محاسبات ساده‌تر شود جمع را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} \quad ?$$

۳. عبارت n فاکتوریل که با $n!$ نمایش داده می‌شود، قبلا به‌شکل

$$n! = n \times (n - ۱) \times (n - ۲) \times ... \times ۲ \times ۱$$

تعریف شده است. برای هر عدد صحیح نامنفی n، $n!$ شکلی از چیدمان اولین n عدد است (بدون تکرار). نشان دهید که دو تعریف مختلف برای $n \geq ۱$ و اینکه با تعریف جدید $۰! = ۱$ بر هم منطبق هستند. (حتی می‌توان تعریف را با آنچه تابع گاما نامیده می‌شود توسیع داد؛ این را بررسی کنید.)

چکیده

- شرایط داده شده را مشاهده کنید.
- بازخورد چیست؟
- چه مثال‌هایی موجود است؟
- مثال‌های استاندارد بیابید.
- مثال‌های بدیهی بیابید.
- مثال‌های خطرناک بیابید.
- نا_مثال‌ها را پیدا کنید.
- از اشیا قدیمی‌تر اشیا جدید بسازید.

فصل ۱۶

خواندن قضیه

اولین اصل این بود که هرگز درستی چیزی را نپذیرم مگر اینکه بدانم هیچ شک و شبهه‌ای در آن نیست.

"رنه دکارت[۱]، ۱۶۳۷ "

قضیه‌ها و اثبات‌ها، قلب ریاضیات هستند. در این فصل توضیح خواهیم داد که با یک قضیه جدید چگونه برخورد کنیم و در ادامه اثبات‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همان‌طور که قبلا شرح داده شد بیشتر دانشجویان تصور می‌کنند که ریاضیات به‌کارگیری فرآیندها برای حل مسئله‌هاست مانند: فرآیند مشتق‌گیری از حاصل‌ضرب دو عبارت یا یک کسر یا روش حل معادلات دیفرانسیل به کمک حل معادله درجه دو. در حالی که ریاضیات پیشرفته فراتر از آن است و گزاره‌ها نسبت به فرآیندها و الگوریتم‌ها، اهمیت بیشتری دارند.

استفاده از قضیه‌ها در حل مسئله‌ها واضح نیست، به‌عبارتی امکان ندارد که قضیه‌ها یک روند حل مسئله ارائه دهند. در این فصل سه قضیه ارائه می‌شود که به‌جای به‌کارگیری یک الگوریتم، در مورد ساختار اشیا خاص ریاضی هستند.

یک نتیجه حاصل از این مطلب این است که دانشجویان انتظار دارند که قضیه‌ها از چگونگی انجام چیزی بگویند، لذا مفهوم درون قضیه از بین می‌رود.

دقت کنید که از این‌جا به بعد هر گزاره درستی را قضیه می‌نامیم و تا لازم نباشد به گزاره‌ها (حکم‌ها) و لم‌ها ارجاع نمی‌دهیم.

سه قضیه

به منظور مطالعه قضیه‌ها به قضیه‌های دیگری نیز، نیاز خواهیم داشت.

قضیه ۱.۱۶.
اگر m و n اعدا طبیعی فرد باشند، آنگاه mn نیز عدد صحیح فرد است.

قضیه ۲.۱۶.
تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.

قضیه ۳.۱۶.
عدد $\sqrt{2}$ گنگ است، یعنی نمی‌توان آن را به‌شکل $\frac{m}{n}$ نوشت که در آن m و n اعداد صحیح باشند.

حالا باید متقاعد شوید که اولین قضیه درست است و شاید بخواهید اثبات خودتان را ارائه کنید. دومی و سومی قضیه‌های قدیمی هستند (بیش از دو هزار سال قدمت دارند.) و کمتر به چشم می‌آیند. (هر دو به کمک برهان خلف قابل اثباتند. فصل ۲۳ را ببینید.)

[۱] رنه دکارت ($Ren\ Descartes$) ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی بود که بین سال‌های ۱۵۶۹ تا ۱۶۵۰ میلادی می‌زیست.

تجزیه و تحلیل قضیه‌ها

•مفروضات و نتایج را مشخص کنید.

همان‌طور که از فصل ۷ می‌دانید، استلزام‌ها و قضیه‌ها را می‌توان به‌شکل زیر نوشت.

”گردایه‌ای از مفروضات، حکمی را نتیجه می‌دهند.“

یعنی به‌شکل ” اگر ... آنگاه...“ هستند. اولین هدف در روبرو شدن با یک قضیه تعیین دقیق مفروضات و حکم‌هاست. اغلب جای بحث دارد، اما باید دقت کنید که مفروضات و حکم‌ها کدامند.
برای اولین قضیه داریم

عبارت ” m و n طبیعی و فرد هستند“ مفروضات هستند.

و

” mn یک عدد صحیح فرد است “ حکم است.

قضیه دوم را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم
” اگر X مجموعه اعداد اول باشد، آنگاه X نامتناهی است.“
هر چند نسخه‌ای نازیبا از قضیه است و یک X غیرضروری را برای شروع معرفی می‌کند ولی مفروضات و حکم‌ها به وضوح مشخص اند.
قضیه سوم را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

” اگر $x = ۲$ آنگاه، $\sqrt{x}$ گنگ است. “

یا

” اگر $x = \sqrt{۲}$ آنگاه، x گنگ است. “

آیا قضیه چیزی درباره ۲ یا $\sqrt{۲}$ می‌گوید؟ پاسخ جای بحث دارد. درهرصورت، فرض درباره یک عدد خاص است و حکم در مورد گنگ بودن است.

• توانایی مفروضات و احکام را ارزیابی کنید.

بهترین قضیه‌ها دارای مفروضات ضعیف و حکم‌های قوی هستند.
فرض قوی به مجموعه‌ای کوچک از اشیا اشاره دارد. **حکم قوی** چیزی بسیار دقیق و معین را در مورد آن اشیا بیان می‌کند. در هر دو مورد، **ضعیف** خلاف قوی است.
ریاضی‌دانان خواستار مفروضات ضعیف و حکم‌های قوی هستند. یعنی، مجموعه بسیار گسترده‌ای از اشیا (فرض ضعیف) را در نظر می‌گیریم و مطلب بسیار مشخصی در مورد آن‌ها (حکم قوی) بیان می‌کنیم.
فرض قضیه ۲.۱۶ در بالا قوی است؛ فقط به مجموعه اعداد طبیعی اشاره می‌کند. (ازسویِ‌دیگر اگر فقط به اعداد اول توجه کنید آنگاه، فرضی ضعیف است چرا که چیزی را درباره همه اعداد اول بیان می‌کند. این هم جای بحث دارد!)
به‌طور مشابه، قضیه ۳.۱۶ فقط خاصیت ریشه دوم عدد ۲ را بیان می‌کند بنابراین دارای فرضی بسیار قوی است. ازسوی دیگر قضیه ۱ دارای فرضی ضعیف‌تر (یا عمومی‌تر) است. ما اجازه داریم هر عدد طبیعی فرد را اختیار کنیم، که تعداد زیادی از آن‌ها وجود دارد.
می توان مفروضات قضیه ۱.۱۶ را با جایگزینی اعداد صحیح به‌جای فرض اعداد طبیعی ضعیف‌تر کرد. این جایگزینی کل گزاره را به گزاره‌ای قوی‌تر تبدیل می‌کند، به‌هرحال برای یک قضیه خوب خواهان مفروضات ضعیف‌تر و حکم‌های قوی‌تر هستیم.
با تغییر دادن مفروضات می‌توان روشن کرد که یک قضیه تا چه اندازه خوب است. بسیاری از ریاضی‌دانان در اولین رویارویی با یک قضیه این کار را انجام می‌دهند.
در مورد قضیه ۳.۱۶ با بررسی ریشه دوم اعداد اول می‌توان این فرض را تضعیف کرد. یعنی

" اگر p اول باشد، آنگاه $\sqrt{p}$ گنگ است."

این گزاره درست است. (به‌عنوان یک تمرین در فصل ۲۳ آمده است.) با در نظر گرفتن اعداد طبیعی می‌توان آن را بیشتر تضعیف کرد:

"اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه $\sqrt{n}$ گویا نیست."

این گزاره آخر نادرست است. زیرا برای همه اعداد طبیعی n درست نیست. برای مثال $\sqrt{4}$ گنگ نیست.
بنابراین اگر مفروضات را خیلی زیاد تضعیف کنیم می‌توانیم گزاره های نادرستی را به‌دست آوریم. بخش مهمی از تلاش‌های ریاضی برای این است که تعیین کنیم که چقدر می‌توانیم فرض‌ها را تضعیف کنیم. به‌عنوان‌مثال، بهترین فرض ممکن در مورد n به‌طوری که $\sqrt{n}$ گنگ باشد چیست؟ در این‌جا بهتر است که اگر فرض را ضعیف کنیم، آنگاه $\sqrt{n}$ گنگ نباشد.
یک حکم قوی چیزی قطعی را می‌گوید. همه قضیه‌های فوق دارای حکم‌های قوی هستند. حال، قضیه زیر را در نظر بگیرید.

"فرض کنید $x^2+2x+1=0$. آنگاه، $x \geq -1000$. "

این قضیه حکم بسیار ضعیفی دارد، احتمالا حدس می‌زنید درست باشد. قویترین حکم " $x=-1$ " است (که درست است.).
در فصل ۳۳ درمورد تضعیف مفروضات بیشتر گفته خواهد شد.

• **با قضیه‌های قبلی مقایسه کنید.**

می‌توان قدرت مشاهدات خود را به‌کار گرفت. قضیه فعلی را با قبلی مقایسه کنید. مفروضات و حکم‌ها چه تفاوت‌هایی دارند؟ آیا محدودیت آن‌ها بیشتر است یا کمتر؟ یعنی آیا آن‌ها ضعیف‌تر هستند یا قویتر؟ این به شما این امکان را می‌دهد که قضیه را در حالت کلی موضوع قرار دهید و روابط گوناگون بین قضیه‌ها را ببینید.

• **جزئیات را مشاهده کنید.**

در یک قضیه تقریبا هر کلمه‌ای حتی کلمات کوچک، مهم خواهد بود . هر کلمه‌ای را بخوانید و به آن توجه کنید و در مورد مفهوم آن‌ها فکر کنید.
برای مثال، آیا در قضیه ۱ توجه کردید که مفروضات در مورد اعداد طبیعی و حکم در مورد اعداد صحیح بود؟
یک دلیل خوب برای مشاهده این است که آنچه را به‌صراحت مشاهده می‌شود آسانتر به خاطر بسپاریم. به یاد آوردن حکم کافی نیست؛ مفروضات نیز به همان اندازه اهمیت دارند. بنابراین، اگر خواستید که "قضیه فیثاغورس" (قضیه ای معروف که در صفحه ۱۶۵ ذکر شده) بیان کنید، کافی نیست که فقط بگویید "$c^2=a^2+b^2$". ابتدا باید توضیح دهید که a، b و c طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه هستند و c وتر آن است.

•**آنچه قضیه بیان می کند و چگونگی استفاده از آن را دسته‌بندی کنید.**

یک قضیه واقعا چه می‌گوید؟ آیا اجازه محاسبه می‌دهد؟ آیا دسته‌بندی می‌کند؟ (یعنی می‌گوید: برخی چیزها چه هستند؟)
به‌عنوان‌مثال، قضیه ۱.۱۶ در مورد فرد بودن حاصل‌ضرب را می‌توان در بررسی محاسبات به کار برد. (مثلا برای اینکه ببینیم آیا یک برنامه کامپیوتری که عمل ضربی را انجام می‌دهد درست کار می‌کند؟) قضیه ۲.۱۶ مفهومی را درباره ساختار مجموعه اعداد اول بیان می‌کند. اگر مجموعه اعداد اول متناهی باشد، آنگاه احتمالا می‌توانستیم که همه آن‌ها را با کامپیوتر پیدا کنیم، یا می‌توانستیم قضیه‌های مربوط به آن‌ها را با استفاده از آن فهرست اثبات کنیم. البته همان‌طور که می‌دانید، نامتناهی بودن آن‌ها نشان می‌دهد که این گزینه‌ها قابل انجام نیست.
عبارت گنگ بودن $\sqrt{2}$ را می‌توان به‌عنوان قضیه دسته‌بندی در نظر گرفت و نوع $\sqrt{2}$ را مشخص کرد.

•شکل بکشید.

رسم یک شکل همیشه ایده خوبی است. اما در برخی موارد قابل قبول نیست. این درمورد اعداد اول و قضیه‌های گنگ کمک زیادی نخواهد کرد. اما درمورد قضیه " فرد بودن mn " خوب کار می‌کند.
توجه کنید که امکان گمراهی در کار با تصاویرکم نیست؛ لذا مراقب باشید.

•مثال‌های بدیهی و سایر مثالهای مرزی را به کار ببرید.

قضیه را روی مثال‌های بدیهی و مثال‌های مرزی (از اشیا موجود در مفروضات) به‌کار بگیرید. اگر عدد خاصی ۰ یا ۱ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر تابع بدیهی $f(x) = ۰$ را در نظر بگیریم چه رخ خواهد داد؟ اگر مجموعه تهی را در نظر بگیریم چه اتفاقی می‌افتد؟ در مورد دایره و خط چطور؟
این مثال‌ها به درک دقیق‌تر ما کمک می‌کنند. اغلب، تصویر روشن‌تری از جایی که قضیه اعمال می‌شود ارائه می‌دهند.
به‌عنوان مثالی مرزی، عبارت " $y = x^۲$ و $z = y^۲$ ، بنابراین $z \neq y$ " را در نظر بگیرید. وقتی که y و $y^۲$ متفاوت باشند به نظر می‌رسد که این عبارت درست باشد اما همیشه درست نیست؛ مقدار $x = ۱$ و $y = ۱$ را در نظر بگیرید.

• آیا عکس آن درست است؟

برای هر استلزام عکس آن را ببینید. یادآوری می‌کنیم که " $B \implies A$ " عکس " $A \implies B$ " است و اگر " $A \implies B$ " درست باشد، آنگاه ممکن است " $B \implies A$ " درست یا نادرست باشد.
در نظر گرفتن عکس یک استلزام باعث می‌شود که مفروضات و نتایج را مورد توجه قرار دهیم و گاهی چیزهای مهمی به دست می‌آید.
عکس اولین قضیه عبارت است از:
" اگر mn یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه m و n اعداد طبیعی فرد هستند."
این درست نیست. برای نشان دادن نادرستی آن کافی است یک مثال نقض پیدا کنیم. قرار دهید $m = -۱$ و $n = ۳$ آنگاه $mn = -۳$ یک عدد صحیح فرد است ولی m یک عدد طبیعی نیست.
سخنرانان و نویسندگان اغلب بهترین نتیجه ممکن را ارائه می‌دهند، بنابراین این احتمال وجود دارد که عکس آن درست نباشد و اگر نامفهوم به نظر می‌رسد آن را بررسی کنید. اما اگر عکس آن درست نیست، پس یک مثال نقض پیدا کنید؛ این درک شما از مسئله را عمیق‌تر می‌کند و تمرینی است برای پیدا کردن مثال‌های نقض، که در هنگام حل مسئله بسیار مفید هستند.

• بازنویسی برحسب نمادها یا عبارات

روشی مناسب برای درک قضیه‌ای که با واژه‌ها نوشته شده است بازنویسی آن بر حسب نمادهاست، و برعکس. بنابراین مثال " اگر mn یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه m و n اعداد طبیعی فرد هستند. "برحسب نمادها عبارت است از
$mn \in \{x \in \mathbb{Z} | x = ۲j - ۱,\ j \in \mathbb{Z}$ برای برخی$\}$
$\implies m, n \in \{x \in \mathbb{N} | x = ۲j - ۱,\ j \in \mathbb{N}$ برای برخی$\}$.
گاهی بازنویسی برحسب نمادها قضیه را واضح‌تر می‌کند و به خاطر سپردن آن ساده‌تر می‌شود و گاهی هم چنین نیست؛ برای مثال
نتیجه قضیه فیثاغورس وقتی که به‌شکل $c^۲ = a^۲ + b^۲$ نوشته می‌شود واضح‌تر از زمانی است که به‌شکل " مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابراست. " نوشته می شود.

• در مورد ناـمثال‌ها چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

مثال‌هایی در نظر بگیرید که در مفروضات صدق نمی‌کنند یعنی ناـمثال‌ها. آیا هنوز نتایج برای برخی از این موارد درست است؟ به‌طور مشابه اگر یکی از مفروضات قضیه را حذف کنیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ هنگامی که اثبات مطالعه شده است، امکان پاسخ دادن به این سوالات ساده‌تر خواهد بود.

در قضیه ۱.۱۶ می‌توان حالت‌هایی که فقط یکی از m و n فرد هستند یا هیچ کدام فرد نباشند را در نظر گرفت و بررسی کرد که چه اتفاقی می‌افتد. می‌بینیم که در این حالت‌ها گزاره نادرست است. بنابراین این قضیه، قضیه خوبی است؛ نمی‌توانیم مفروضات زوج یا فرد بودن را بیش از این تضعیف کنیم و گزاره درستی خلق کنیم. اگرچه می‌توان مفروضات " m و n اعداد طبیعی فرد هستند" را به " m و n اعداد صحیح فرد هستند" تضعیف کنیم و هنوز گزاره درستی داشته باشیم، اما نمی‌توان شرط زوج یا فرد بودن را بیشتر از این تضعیف کرد.

•تعمیم

اگر فرضی را از گزاره A حذف کنیم، آنگاه گزاره ضعیفتر را تعمیمی از A می‌نامیم. برای مثال، گزاره " اگر p عدد اولی باشد آنگاه $\sqrt{P}$ گنگ است" تعمیم گزاره "$\sqrt{۲}$ گنگ است" می باشد.

همواره باید به دنبال تعمیم گزاره‌ها باشید. اگر گزاره‌ای را تعمیم دادید و بتوانید برای گزاره تعمیم یافته مثالی نقض بیابید، آنگاه می‌بینید که این فرض برای قضیه اصلی حیاتی است. برای اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان، تعمیم دادن خیلی مهم است، در فصل ۳۳ به آن خواهیم پرداخت.

تمرین

۱. قضیه‌های زیر را بررسی کنید.

(آ) فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$. آنگاه mn زوج است اگر و تنها اگر m و n زوج باشند.

(ب) فرض کنید تابع f محدب باشد. آنگاه

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{۲}.$$

(ج) اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، آنگاه $|A \times B| = |A||B|$.

(د) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۳$، برای n نقطه متمایز روی یک دایره که به‌طور متوالی توسط خطوط راست به هم وصل می شوند، مجموع زوایای داخلی شکل حاصل برابراست با $(n-۲) \times ۱۸۰^\circ$.

(ذ) اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۷$، آنگاه

$$\frac{n}{n^۲ - ۸n + ۱۲} \geq \frac{۱}{n}.$$

(و) فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد و S مجموعه همه زیرمجموعه‌های مجموعه A باشد. آنگاه $|S| = ۲^{|A|}$. (مجموعه S را مجموعه توانی A می‌نامند.)

(ه) اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع محدب باشند، آنگاه،
توابع $h(x) = f(x) + g(x)$ و $m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ محدب هستند.

(ی) برای مجموعه‌های A، B و C داریم:

(۱) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$،

(۲) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$،

(۳) $A \neq B$ اگر و تنها اگر $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$،

(۴) $A \cup B \subset C$ اگر و تنها اگر $A \subset C$ و $B \subset C$.

در حالتهای مرزی که یک (یا همه) مجموعه‌ها متناهی هستند چه اتفاقی رخ خواهد داد؟

۲. قضیه زیر را تحلیل کنید:

قضیه ۴.۱۶.

فرض کنید a، b، c و d اعداد حقیقی باشند که همگی صفر نباشند. فرض کنید

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

یک زوج از معادلات برحسب متغیرهای x و y باشد و $p, q \in \mathbb{R}$. این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به فردی است اگر و تنها اگر $ab - cd \neq ۰$.

چکیده

- فرض‌ها و حکم‌ها را پیدا کنید.
- قدرت فرض‌ها و حکم‌ها را ارزیابی کنید.
- با قضیه‌های قبلی مقایسه کنید.
- جزئیات را مشاهده کنید.
- آنچه قضیه بیان می‌کند و روش استفاده از آن را طبقه‌بندی کنید.
- یک شکل مفید رسم کنید.
- قضیه را روی مثال‌های ساده اعمال کنید.
- قضیه را روی مثال‌های بدیهی و مرزی اعمال کنید.
- آیا عکس آن درست است؟
- بر حسب واژه‌ها یا نمادها بازنویسی کنید.
- در مورد نا‐مثال‌ها چه اتفاقی رخ می‌دهد؟
- تعمیم دهید.

فصل ۱۷

اثبات

دلایلی که خوب و صحیح به نظر می‌رسند را با دلایل خوب و صحیح اشتباه نگیرید.

”آنون“

ریاضیات شگفت‌انگیز است؛ ریاضیات باعث می‌شود که هر سخن و نظری را به سادگی نپذیریم. حقیقت چیزی نیست که یک مقام مافوق می‌گوید تا با دلایلی مانند ”چون من می‌گویم“ یا چون در خواب دیده‌اند، یا پری‌ها در باغ به او گفته‌اند، یا حتی به استناد برخی از سنت‌های باستانی، اثبات شود. حقیقت ابتدا مشخص و سپس با اثبات ریاضی تصدیق می‌شود.

اثبات چیست؟

اثبات، شرح چرایی درست بودن یک گزاره است. به‌طور دقیق، یک شرح متقاعد کننده برای اینکه چرا گزاره درست است. منظور از متقاعد کردن یعنی قانع کردن یک ریاضی‌دان. (منظور یک نقطه نظر فلسفی مهم است که به آن وارد نمی‌شوم؛ چرا که بیشتر به امور عملی علاقه‌مندم.)

معمولا اثبات گزاره‌ها با گزاره‌های بدیهی آغاز می‌شود، و با استفاده از مراحل منطقی کوچک و به‌کارگیری تعریف‌ها، اصطلاحات و گزاره‌های اثبات شده قبلی ادامه می‌یابند تا گزاره مورد نظر حاصل شود.

مفهوم اثبات از دیدگاه یک ریاضی‌دان متفاوت از کاربرد روزمره آن است. در استفاده روزمره یا به‌عنوان‌مثال: اثبات در دادگاه شاهدی است بر اینکه احتمالا چیزی درست است. ریاضی‌دانان به بیش از این نیاز دارند. دوست داریم ۱۰۰٪ اطمینان یابیم که گزاره ثابت شده است. دوست نداریم که تقریبا مطمئن باشیم.

چگونه اطمینان یابیم که یک قضیه ثابت شده است؟ میلیون‌ها نفر شاهد اثبات قضیه فیثاغورس هستند؛ می‌توانیم مطمئن باشیم که درست است. با این حال، اثبات نتایج جدیدتر ممکن است شامل اشتباهاتی باشد. درحقیقت طبق تجربه می‌دانم که برخی از اثبات‌های موجود در کتاب‌ها و مجلات علمی و پژوهشی اشتباه هستند.

چرا گزاره‌ها اثبات می‌شوند؟

در موضوعات غیر ریاضی پذیرش یا عدم پذیرش بیش‌تر گزاره‌ها به سلیقه و عقاید شخصی شما بستگی دارد؛ اما وجود اثبات در ریاضیات به این معنی است که این موضوع قبلا وجود نداشته و این دلیل اصلی درستی آن است. فایده آن، این است که می‌توان با مطالعه اثبات آن، درستی یک گزاره را ارزیابی کرد.

با اثبات گزاره‌ها می‌توان ریاضیات را ساخت. در واقع یک گزاره را از روی سایر گزاره‌ها می‌سازیم. اثبات گزاره‌ها به ریاضی‌دانان قدرت واقعی می‌دهد همچنین امکان می‌دهد که اعتماد به نفس داشته باشیم و پیشرفت کنیم. برای مثال، فیلسوف‌ها در مورد سوالات مشابهی که یونانیان باستان درگیر آن بودند، هنوز هم بحث می‌کنند اما در ریاضیات این‌گونه

نیست؛ ریاضیات، نسبت به آن زمان، به‌شدت تغییر کرده است.
یک دلیل خوب دیگر اثبات کردن این است که اگر اثبات‌های خود را بنویسید برای شما سودمند هستند. جایی را که خوب نفهمیده‌اید یا ضعف دارید برای شما مشخص می‌کند؛ لذا خواهید دانست کجا به کار بیشتری نیاز دارید.

خواندن اثبات ها سخت است.

بنابراین اثبات‌ها به‌عنوان تجربه شخصی مفید هستند و پایه ریاضیات را قوی می‌کنند. به ویژه زمانی که این نتایج را در شرایط زندگی واقعی اعمال می‌کنیم. ولی هنوز دانشجویان لجوجانه در برابر اثبات‌ها مقاومت می‌کنند. دانشجویان زیادی را دیده‌ام که از این جنبه فوق‌العاده موضوع دور می‌شوند و می‌پرسند " چرا باید یک اثبات را بخوانم؟" یا " چرا باید چیزی را ثابت کنم؟ من که به شما اعتماد دارم ". شکایت اصلی این است که " از اثبات متنفرم. آن‌ها را نمی‌فهمم و نمی‌توانم آن‌ها را انجام دهم."

می‌توانم این نظرات را درک کنم. برای اکثر دانشجویان اثبات گزاره‌ها جدید است. همان‌طور که قبلا اشاره شد: بسیاری از ریاضیات قبل از اثبات، فرآیندی مانند چگونگی حل یک معادله درجه دو یا روش مشتق‌گیری از حاصل‌ضرب دو تابع است؛ لذا در کنار چنین فرآیندهایی اثبات فقط به‌عنوان یک عارضه اضافی به نظر می‌رسد. همچنین، اثبات سخت، و فهمیدنش دشوار است. یک دلیل آن این است که در یک اثبات نوشته شده، بسیاری از کارهای اولیه حذف شده و همان کارهای اولیه به اثبات کننده کمک می‌کند که اثبات را دریابد.

فردی که اثبات اصلی را ارائه داده است در یک جا ننشسته و در یک گام اثبات را شروع و به پایان برساند. برعکس، احتمالا از وسط شروع کرده به بن‌بست رسیده، در دورهایی چرخیده، متوقف شده، دوباره شروع کرده و به‌طورکلی به‌شکل تصادفی به سمت اثبات حرکت کرده است. هنگامی که اثبات را به‌دست آورده آن را نوشته و احتمالا چند بار آن را بازنویسی و اصلاح کرده و تمام ابتکارات کاذب و حدس‌های اولیه را حذف کرده است.

بااین‌وجود، این مسیر کشف در دسترس خواننده نیست. در فصل بعد سعی می‌کنیم این مشکل را برطرف کنیم. (و اگر بخواهید فصل بعد را در یک جمله خلاصه کنید این است: از مثال‌ها استفاده کنید تا اثبات‌ها را ببینید.)

در رابطه با این سوال که آیا شما باید چیزهای درست را بپذیرید؟ چرا نمی‌توانید چیزی که شخص دیگری گفته است درست است را بپذیرید؟ بله، اگر بخواهید دیگری به‌جای شما فکر کند می‌توانید بپذیرید، اما این کتاب در مورد اندیشیدن برای خویشتن است. برای اینکه به‌طور واقعی مانند یک ریاضیدان بیندیشید باید اثبات‌ها را در آغوش بگیرید.

خلق اثبات‌ها دشوار است، اما امید هست.

دلیل دیگری برای دانشجویانی که دوست ندارند اثبات کنند این است که برای آن‌ها ساختن اثبات بسیار سخت است. هیچ فرآیند، هیچ الگوریتمی، هیچ نقشه راهی یا روش جادویی برای خلق اثبات وجود ندارد. به نظر می‌رسد هنر باشد. چنین برداشت می‌شود که هر اثباتی به یک بینش منحصربه‌فرد نیاز دارد تا کارکرد مفیدی داشته باشد. همه چیز ناامید کننده به نظر می‌رسد .

بااین‌حال، راهبردهای بسیاری وجود دارد که می‌توانیم از آن‌ها بهره ببریم. ممکن است همه ما هنرمندان بزرگی نباشیم، اما با آگاهی از چشم‌انداز و ترکیبات، می‌توانیم نقشه‌های خود را بهبود ببخشیم. روش‌هایی وجود دارد که می‌توانیم آن‌ها را به کار گیریم. ریاضیات برای همه، یکسان است. به‌عنوان‌مثال، بگذارید بگوییم ما باید ثابت کنیم که جواب یک معادله منحصربه‌فرد است. آنچه ما انجام می‌دهیم این است که فرض کنیم جواب دیگری وجود دارد و سپس نشان دهیم که تفاضل آن‌ها صفر است، یعنی آن‌ها برابر هستند. مثال‌های ساده دیگری وجود دارند برای اینکه ببینیم در کجا از فرض‌ها استفاده شده است و به‌طور آگاهانه الگوها و شباهت‌های موجود در اثبات‌ها را جستجو کنیم.

هدف اصلی کتاب این است که به شما ایده‌هایی برای خلق اثبات ارائه دهد. این هم مانند حل مسئله نیازمند تمرین است. وقتی اثبات‌های بیشتری خوانده و مطالعه کردید و هرچه بیشتر نوشتید بهتر می‌توانید آن‌ها را خلق کنید.

به کجا می رویم؟

در فصل بعد خواهیم دید که چگونه یک اثبات را از هم جدا کنیم تا بتوان بیشترین استفاده را از آن برد، و سپس قسمت سوم را با نگاهی به قضیه فیثاغورس و اثبات آن، کامل خواهیم کرد. در قسمت چهارم جزئیات روش‌های مختلف اثبات که در زیر آمده است را خواهیم دید:

- مستقیم،
- حالت‌ها،
- تناقض،
- استقرا ریاضی و
- عکس نقیض.

تمرین

۱. بعضی از اثبات‌هایی که قبلا دیده‌اید را جمع آوری کنید.

بەویژه، اثبات‌هایی که نمی‌فهمید را پیدا کنید. آنچه را که در اثبات نمی‌دانید شناسایی کنید. آیا شروع آن مبهم است؟ آیا در نقطه‌ای از بدنه اصلی اثباتی که شروع کردید چیزی را درک نمی‌کنید؟ آیا در انتهای آن است؟ یعنی، نمی‌دانید چرا اثبات به پایان رسید.

چکیده

- اثبات تضمین می‌کند که گزاره درست است.
- معمولاً روش ارائه یک اثبات با آنچه که در ابتدا کشف شده است، خیلی تفاوت دارد.
- خواندن و خلق اثبات‌ها سخت هستند.
- اثبات دوباره گزاره‌ها کمک می‌کند تا مهارت‌های خلق اثبات خود را توسعه دهید.
- برای اینکه به‌طور واقعی مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید باید اثبات را در آغوش بگیرید.

فصل ۱۸

خواندن اثبات

حرف کسی را قبول نکن.

"ضرب‌المثل لاتین"

همان‌طور که در فصل‌های قبل شرح داده شد، اثبات قلب ریاضیات است؛ ریاضیات بدون اثبات قدرتی ندارد. در این بخش نشان می‌دهیم که چطور به یک اثبات برسید و آن را برای کنترل‌پذیر شدن، به قسمت‌های قابل درک بشکنید.

کلیدهای مهم و تذکرات مفید مربوط به اینکه چرا یک قضیه درست است، اغلب از آخرین نسخه یک اثبات برداشته شده‌اند. متأسفانه، خطوط ساختار از بین رفته‌اند، خواننده باید آن‌ها را بازسازی کند. اثبات را یک جعبه بسته تصور کنید که باید بازش کنید.

شاید تجربه بیشتری نیاز باشد تا از توصیه‌های زیر سود کامل را ببرید؛ بسیاری از آن‌ها را باید فورا رها کنید، اما خواندن دوباره و در زمانی دیگر می‌تواند مفید باشد.

یک قضیه ساده و اثبات آن

درک قضیه زیر آسان است. با قضیه ۱.۱۶ در فصل گذشته شباهت‌هایی دارد ولی متفاوت است. اثبات بعدی مثال اصلی این فصل است.

قضیه ۱.۱۸.
فرض کنید m و n اعداد طبیعی باشند. حاصل‌ضرب mn فرد است اگر و تنها اگر m و n فرد باشند.

آیا این قضیه، معقول به نظر می‌رسد. چرا با قضیه ۱.۱۶ متفاوت است؟ ایده به کار رفته در فصل قبل را برای این گزاره جدید به کار ببندید.

برهان. فرض کنید که m و n فرد هستند. تعریف می‌کنیم: $m = ۲k + ۱$ و $n = ۲j + ۱$، k و j اعداد طبیعی هستند. پس $mn = ۲(۲kj + j + k) + ۱$. باتوجه‌به اینکه $۲kj + j + k$ یک عدد طبیعی است، آن را r می‌نامیم، داریم: $mn = ۲r + ۱$. لذا mn فرد است. حال برای عکس آن فرض می‌کنیم که یکی از m و n زوج باشد. بدون آنکه از کلیت کم شود می‌توان m را زوج فرض کرد پس $m = ۲k$ برای عدد طبیعی مانند k. لذا داریم $mn = ۲kn$، mn بر ۲ بخش‌پذیر است و در نتیجه زوج است. بنابراین mn فرد است، اگر m و n زوج نباشند. این یعنی mn فرد است نتیجه می‌دهد که m یا n فرد هستند. پس تنها راه برای اینکه mn بتواند فرد باشد فرد بودن m و n است. ■

توجه کنید که پایان اثبات با یک مربع نشانه‌گذاری شده است. بعضی اوقات آن را سنگ قبر هالموس می‌نامند زیرا اولین بار توسط پاول هالموس ریاضی‌دان به کار گرفته شد تا نشان دهد اثبات تمام شده است.

اگر هنوز اثبات را درک نمی‌کنید نگران نباشید، باید روشن‌تر شود پس ایده زیر را به کار می‌بریم و جزئیات پنهان شده را بازسازی می‌کنیم. همچنین اثبات صحیح نیست. اثبات شامل یک خطای غیر مهلک است. آیا می‌توانید آن را پیدا

کنید؟ (غیر مهلک به این معنی است که خطا می‌تواند تصحیح شود و گزاره درست اثبات شود.)

چگونه یک اثبات را بخوانیم؟

در حالی که توصیه زیر را می‌خوانید، درباره چگونگی به‌کارگیری آن برای اثبات قضیه بالا بیندیشید.

• **به‌کارگیری روش‌های خواندن**

روش‌های مطالعه که پیش از این ارائه شد را به کار گیرید. برای رسیدن به یک مرور کلی، مطالعه‌ای سطحی داشته باشید، بررسی کنید که چه چیزی مهم است، سوال بپرسید و غیره. هدف باید یافتن قسمتی باشد که محور اثبات است.
در این‌جا به نظر می‌رسد که اثبات به نتیجه‌گیری از محاسبات وابسته است.

• **قسمت‌بندی کنید.**

اثبات را به بخش‌های مستقل منطقی تقسیم کنید. اثبات‌ها معمولا تنها با یک استدلال طولانی ادامه پیدا نمی‌کنند، بلکه به تعدادی از استدلال‌های مجزا مانند محاسبات، بازبینی گزاره‌ها و غیره تقسیم می‌شوند. در اثباتی که در بخشی جدا و بعد از مقدمه آمد، در پاراگراف دوم، ما را از فرآیند اثبات عکس قضیه آگاه می‌کند. راه دیگر این است که گزاره قضیه را ببینیم. قضیه "اگر و تنها اگر" است، بنابراین به احتمال قوی، اثبات به دو قسمت مجزای "اگر" و "تنها اگر" تقسیم می‌شود.

(۱) "فرض کنید m و n اعداد طبیعی هستند. حاصل‌ضرب mn فرد است اگر m و n فرد باشند." (این همان "mn فرد است $\Leftarrow$ n و m فرد هستند" می‌باشد.)

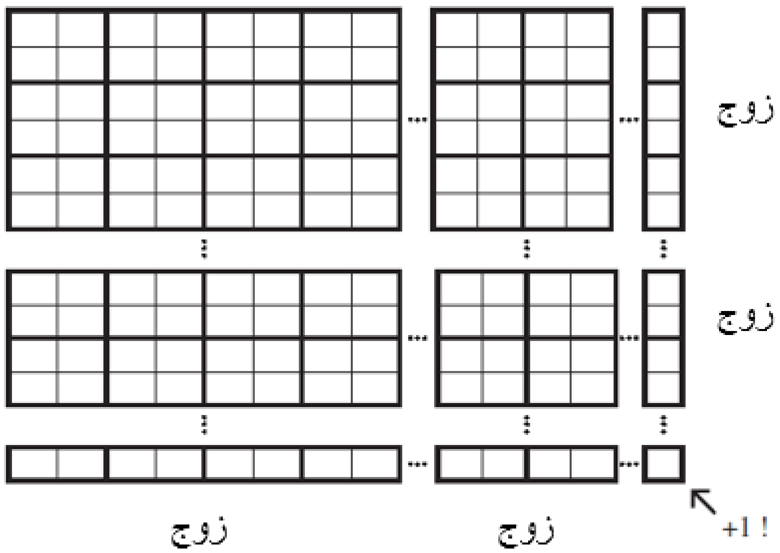
(۲) فرض کنید m و n اعداد طبیعی باشند. "حاصل‌ضرب mn فرد است تنها اگر m و n فرد باشند" (این با "m و n فرد هستند $\Leftarrow$ mn فرد است" یکی است.)

•**تشخیص روش‌های به کار رفته**

ریاضی‌دانان تعدادی روش اثبات دارند: محاسبات، مستقیم، استقرا، عکس نقیض، تناقض، حالت‌ها، استدلال‌های شمارشی و غیره، که تعدادی از آن‌ها با جزئیات در قسمت ۴ آمده‌اند. تصمیم بگیرید که از کدام یک استفاده کنید، برای یک اثبات معنادار ترکیبی از روش‌ها معمول است. قسمت "m و n فرد هستند نتیجه می‌دهد که mn فرد است"به‌طور مستقیم با محاسبات اثبات شده است.
و اما در مورد عکس آن، که "mn فرد باشد، آنگاه m و n فرد هستند" است، به‌طور مستقیم عمل نمی‌شود: با فرض اینکه m یا n فرد نیستند شروع می‌کنیم و با رشته‌ای از استلزام‌ها نشان می‌دهیم که mn فرد نیست. یعنی عکس نقیض گزاره اثبات شده است. (به خاطر آورید که
"نقیض $A \Longrightarrow$ نقیض B" با $A \Longrightarrow B$ یکی است؛ فصل ۸ را ببینید.) توجه کنید که این آشکارا بیان نشده است. پس باید آن را تحلیل کنیم، کار بزرگی نیست "گزاره عکس نقیض را اثبات خواهیم کرد ...."
در موقعیت‌های کلی‌تر ممکن است اثبات قضیه جدید از قضیه دیگری یا یک تعریف و غیره استفاده شود. دقت کنید کدام یک به کار برده می‌شود.

• **جایی که مفروضات به کار گرفته شده‌اند را بیابید.**

مشخص کنید که فرض‌ها در کجا مورد استفاده قرار گرفته‌اند. آن‌هایی که یک بار (ممکن است بیشتر) به کار گرفته شده‌اند یا آن‌هایی که غیرضروری بوده‌اند. (در مورد فرض‌های غیرضروری در فصل ۳۳ سخن خواهیم گفت.) این شامل پیدا کردن جای به‌کارگیری قضیه‌هایی که قبلا اثبات شده‌اند، نیز می‌شود. همچنین این قضیه‌ها فرض‌هایی دارند؛ اطمینان حاصل کنید که فرض‌های آن‌ها برقرار و فعال هستند! در مجموع به خاطر بسپارید که اگر قضیه‌ای به‌صورت مکرر در



شکل ۱.۱۸: تصویری برای روشن شدن اثبات قضیه ۱.۱۸.

اثبات‌های متفاوت به کار گرفته می‌شود، باید مهم باشد و توان بالفعلی دارد که در اثبات‌های شما مورد استفاده قرار گیرد پس آن را خوب یاد بگیرید.

در فرض اثبات که m و n فرد هستند (در قسمت ”اگر“ گزاره) ضرب چند مرتبه به کار گرفته شده است. باتوجه‌به اینکه اعداد فرد به چه شکل هستند، آنجایی که $m = ۲k + ۱$ و غیره از آن بهره می‌گیریم. شناسایی فرض‌ها برای ”تنها اگر“ اندکی سخت‌تر است. برای به‌کارگیری روش عکس نقیض، نقیض گزاره را فرض می‌کنیم، که البته با وجود کمی تغییرشکل به کار گرفته شده است.

•اثبات را برای یک مثال به کار ببندید.

برای درک یک اثبات، به‌کارگیری هر گام برای یک حالت خاص یا به هم پیوسته که در مفروضات صدق می‌کند، روشی بسیار مؤثر است. این قطعه بااهمیتی از اطلاعات برای موفقیت خارج از این کتاب است.

در مثال بالا این بسیار بدیهی است، بااین‌وجود می‌توان آن را انجام داد. فرض کنید $m = ۳$ و $n = ۷$ و اثبات را برای آن‌ها بازنویسی می‌کنیم. البته برای اثبات قسمت ”تنها اگر“ نیاز است که m را زوج فرض کنیم، بنابراین می‌توان آن را ۶ گرفت. هیچ شرطی برای زوج یا فرد بودن n قرار داده نشده است، پس در هر دو حالت بررسی کنید. این حالت شکلی از فعال شدن است.

این روش به خصوص برای اثبات‌های گیج‌کننده خوب کار می‌کند، اما متأسفانه در هر حالتی کارایی ندارد.

•یک تصویر رسم کنید.

خواندن یک اثبات، شبیه حل یک مسئله است، پس روش‌های فصل ۵ را به کار بگیرید؛ مثلا با رسم تصویر مسئله را حل کنید.

در اثبات بالا، تصویر شبیه شکل ۱.۱۸ است.

تصویر باید شما را قانع کند. همه مستطیل‌ها، تعداد مربع‌هایشان زوج است، به جز مربع تنهایی که در پایین گوشه‌ی سمت راست تصویر است. پس تعداد مربع‌ها، عددی فرد است.

تصاویر بسیار گمراه‌کننده هستند پس هشدار می‌دهیم که در استفاده از آن‌ها دقت کنید، چرا که بسیاری از ریاضی‌دانان با قدرت تصویر فریب داده شده‌اند.

- **متن را بررسی کنید.**

دوباره فعال شوید، صحیح بودن متن را بررسی کنید. به‌کارگیری قضیه‌ها را مورد کنکاش قرار دهید. هیچ قضیه‌ای در مثال ما به کار گرفته نشده است، اما اگر در یک اثبات گفته شود: "با استفاده از قضیه ۶.۳"، مطمئن شوید که قضیه ۶.۳ می‌تواند به کار گرفته شود. اگر در اثباتی گفته می‌شود: "یک محاسبه نشان می‌دهد"، آن محاسبه را انجام دهید.
در مثال ادعا شد که $mn = ۲(۲kj + j + k) + ۱$، و این فوری حاصل نمی‌شود، پس باید آن را به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned} mn &= (۲k+۱)(۲j+۱) \\ &= ۴kj + ۲j + ۲k + ۱ \\ &= ۲(۲kj + j + k) + ۱. \end{aligned}$$

در مثال بالا، در پاراگراف دوم می‌بینیم که "بدون کاستن از کلیت" (صفحه ۳۳۵ را برای بحث کامل‌تر ببینید) m، زوج فرض شده است. حالتی که m زوج نباشد را مورد بررسی قرار دهید. این به این معنی است که n زوج است، درحالی‌که طبق فرض یکی از آن دو (حداقل یکی) زوج است. پس یک دسته‌بندی ساده با m در حالی که n زوج است و n در حالی که m زوج است داریم. لذا این چیزی کمتر از کلیت فرض نیست.

- **اشتباهات را بیابید، حالات مرزی را بررسی کنید.**

ریاضی‌دانان هم انسان هستند و اشتباه می‌کنند. فعالانه این اشتباهات را جستجو کنید. هر چیزی را باور نکنید و واقعا تلاش کنید که نشان دهید متن غلط است. فرض‌های پنهان را بیابید و کارایی واقعی قضیه‌های به کار گرفته شده را بررسی کنید.
حالات مرزی را بررسی کنید، مثلا مرز توابع، تابع صفر به نظر می‌رسد. در مثال بالا m را برابر ۱ قرار دهید، این اولین عدد طبیعی فرد است، این یافتن یک مرز است. آنگاه با $m = ۲k + ۱$ قرار می‌دهیم: $۲k + ۱ = ۱$، که $k = ۰$ است. آه، این یک عدد طبیعی نیست که در اثبات آمده است زیرا در مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ وجود ندارد. پس اثبات نادرست است! هر چند این کاستی مهلکی نیست و می‌توان با اضافه کردن صفر به تعریف‌مان از اعداد طبیعی، یا گرفتن k در $\mathbb{N} \bigcup \{۰\}$، یا با فرض عدد صحیح بودن k، آن را درست کرد. با هر یک از این روش‌ها، گزاره قضیه درست است؛ اگر چه اندک، اما اثبات اصلی ایراد داشت.
یک حالت مرزی خوب وقتی است که یک عدد صفر است، مانند آنچه در زیر نشان داده شده است. گزاره زیر را در نظر بگیرید.

قضیه ۲.۱۸.
فرض کنید a، b، c و d اعداد طبیعی هستند. اگر $ab = cd$ و $a = c$، آنگاه $b = d$.

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} & ab = cd & & \\ \iff\ & ab = ad, & & \text{و چون } a = c \\ \iff\ & b = d, & & \text{با حذف کردن.} \end{aligned}$$

■

به نظر متقاعد کننده است. زمانی مسئله پیش می‌آید که حالت مرزی $a = c = ۰$ را در نظر می‌گیریم. پس صرف نظر از اینکه b و d چه باشند برای مثال $b = ۴$ و $d = ۳$، داریم: $ad = bc$، آنگاه $۳ \times ۰ = ۴ \times ۰$، اما $۳ \neq ۴$ است. این نشان دهنده اهمیت بررسی حالت مرزی یک گزاره است.
استدلال ناقص بالا در مجموعه‌ها نیز می‌تواند به کار گرفته شود:
ممکن است از $A \times B = C \times D$ و $A = C$ نتیجه گرفته شود که $B = D$ است. برایجلوگیری از این از مشکل نیاز است که فرض شود که A مجموعه تهی نیست؛ که مشابه صفر در حالت بالا است.
حالت دیگر وقتی است که دو ورودی در مفروضات مساوی هستند. برای مثال یکی از اصول هندسی اقلیدسی را به این صورت ببینیم: "برای هر دو نقطه x و y در صفحه، تنها یک خط گذرنده از آن‌ها وجود دارد." به نظر معقول می‌رسد: تصویر را در دستانمان می‌بینیم.

ولی با انتخاب دو نقطه یکسان چه اتفاقی می‌افتد؟ بی‌نهایت خط گذرنده از آن نقطه موجود است. گزاره درست گزاره زیر است:
"برای هر دو نقطه مجزای x و y در صفحه، تنها یک خط گذرنده از آن‌ها وجود دارد."

•به‌کارگیری یک نا-مثال

دقیقا مشخص کنید که تعمیم یک نا-مثال کجا خراب می‌شود. این کار می‌تواند یک ابزار یادگیری مؤثر باشد.
برای مثال اثبات داده شده در فصل ۲۳ برای اینکه $\sqrt{۲}$، گنگ است را در نظر بگیرید، می‌توان با استفاده از اثبات برای نشان دادن اینکه $\sqrt{۴}$ گنگ است اقدام کرد. این گزاره درست نیست، ولی تنها به دلیل تلاش برای استفاده از اثبات می‌توان نشان داد که چطور و چرا اثبات برای $\sqrt{۲}$ کار می‌کند.

• تأمل

مثل همیشه پس از آن تأمل کنید، آیا اثباتی شبیه اثبات‌های دیگر دیده‌اید؟ بعضی از انواع اثبات‌ها دوباره و دوباره دیده می‌شوند؛ این فرآیند، آن‌ها را برای یادگیری و استفاده در کارتان آسانتر می‌کند.

•چگونه یک اثبات را به ذهن بسپارید.

آسان‌ترین راه برای به خاطر سپردن یک اثبات فهمیدن آن است. یادگیری بعضی چیزها به وسیله حفظ کردن یا تکرار روش سختی است، برای فهمیدن تلاش کنید. از طرف دیگر، ممکن است به اجبار و برای بهبود سرعت پاسخگویی در آزمون، بعضی از نکات را حفظ کنید.
از چگونگی ساخت یک اثبات آگاه شوید و نقطه کلیدی هر بند را بدانید. آیا انجام یک محاسبه است؟ فرض کلیدی در کجا به کار رفته است؟ آیا نمادی تعریف شده است؟ این‌ها برای به خاطر سپردن و یادداشت کردن آسانترند. اثبات از چه نوعی است؟ کدام روش قسمت ۴ به کار گرفته شده است؟
تلاش کنید که اثبات را در چند جمله جمع کنید و یادداشت کنید که به چه معنی است نه اینکه چه می‌گوید. پس برای اثبات قبل یادداشت کنید.
"از $m = ۲k + ۱$ و $n = ۲j + ۱$، استفاده می‌شود، یک محاسبه، ضرب را به‌شکل $۲r + ۱$ ارائه می‌دهد.
برعکس: از عکس نقیض استفاده کنید. بدون کم شدن از کلیت استدلال، m یا n را زوج فرض کنید."
توجه کنید که نمی‌گوییم "فرض کنید m زوج است." به این دلیل که اگر از نقیض فرد بودن m و n استفاده کنیم، آنگاه به‌طور خودکار نتیجه می‌شود که m یا n زوج است. شما باید مهارت خوبی در کار با خروجی نقیض‌ها داشته باشید.

تمرین

۱. اثبات‌هایی از تمرین ۱.۱۷ را با استفاده از روش‌های این فصل تحلیل کنید. آیا اثبات‌ها شفاف‌تر می‌شوند؟ حداقل اندکی؟

۲. اثبات قضیه ۴.۱۶ از فصل ۱۶ را تحلیل کنید.

برهان. معادلات را برای سادگی به‌شکل (۱) و (۲) نام‌گذاری می‌کنیم، آنگاه $d(1) - d(2)$ معادله $(ad - bc)x = pd - qb$ را می‌دهد، پس داریم:

$$x = \frac{(pd - qb)}{(ad - bc)}.$$

به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که

$$y = \frac{(qa - pc)}{(ad - bc)}.$$

روشن است که این جواب یکتاست.
برای عکس آن، با فرض اینکه a، b، c و d همگی با هم صفر نیستند، بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم که a ناصفر است. پس، $x = (p - by)/a$ جواب (۱) برای هر $y \in \mathbb{R}$ است. حال (۱) این جواب را دارد، و چون $ad - bc = 0$ است داریم:

$$\begin{aligned} cx + dy = q \quad &\Longleftrightarrow \quad cx + \frac{bc}{a}y = q \Longleftrightarrow cax + bcy = aq \\ &\Longleftrightarrow \quad c(ax + by) = aq \Longleftrightarrow cp = aq. \end{aligned}$$

پس اگر $cp = aq$، آنگاه هر جواب (۱)، جوابی برای (۲) به دست می‌دهد و بنابراین دستگاه، به تعداد بی‌نهایت جواب دارد. از طرف دیگر، اگر $cp \neq aq$ باشد، آنگاه پاسخ (۱) جواب (۲) نیست، و بنابراین هیچ جوابی وجود ندارد. ■

۳. گزاره‌ای از تمرینات فصل ۱۶ را در نظر بگیرید: برای مجموعه‌های A و B داریم $A \neq B$ اگر و تنها اگر $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$ باشد.

برهان. فرض کنید که $A = B$ باشد. آنگاه

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

اگر $A \neq B$ باشد، آنگاه $x \in A$ موجود است به‌طوری که $x \notin B$ یا وجود دارد $x \in B$ که $x \notin A$. باتوجه‌به تعریف، $x \in A \setminus B$ پس $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. بنابراین $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$. استدلالی مشابه، نتیجه در احتمالات دیگر اثبات می‌شود. ■

اثبات را تحلیل کنید (و فراموش نکنید که حالت مجموعه تهی را در نظر بگیرید!).

چکیده

- روش‌های خواندن را به کار ببندید.
- اثبات را به قسمت‌های کوچکتر بشکنید.
- روش مورد استفاده را مشخص کنید.
- مشخص کنید که کدام فرض به کار گرفته شده است.
- اثبات را برای یک مثال به کار ببندید.
- یک تصویر رسم کنید.
- متن را بررسی کنید.
- اشتباهات را بیابید.
- اثبات را برای یک نا-مثال به کار بگیرید.
- با فهمیدن به خاطر بسپارید.

فصل ۱۹
قضیه فیثاغورس

خرد فناناپذیر و هر چیز دیگری فانی است.

”فیثاغورس“

احتمالا قضیه فیثاغورس مشهورترین قضیه ریاضی است. حتی اکثر غیر ریاضی‌دانان نیز از ارتباط مثلث‌ها و مربع یک چیز مشهور مانند وتر، تصور مبهمی دارند.
باتوجه‌به اینکه مطالب فصل‌های گذشته در مورد ”چگونه خواندن یک قضیه“ و ”چگونه خواندن یک اثبات“ بسیار مهم هستند، عملکرد آن‌ها را با به‌کارگیری درمورد این قضیه مشهور مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس در این فصل، قضیه و اثبات آن به طور جدا از هم مورد بحث قرار می‌گیرند؛ عکس و تعمیم آن را نیز خواهیم دید.

صورت قضیه فیثاغورس

از آنجا که در حال مطالعه ریاضی هستید، احتمالا نسبت به یک غیر ریاضی‌دان، تصور بهتری از چیستی صورت یک قضیه دارید؛ ولی آن را دوباره بیان می‌کنیم:

قضیه ۱.۱۹.
در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر با مجموع مربع‌های اضلاع دیگر مثلث برابر است.

تمرین ۱.۱۹.
با استفاده از ایده‌های فصل ۱۶، قضیه را بخوانید و تحلیل کنید. تحلیل خود را با تحلیل ارائه شده زیر مقایسه نمایید.

مروری بر قضیه

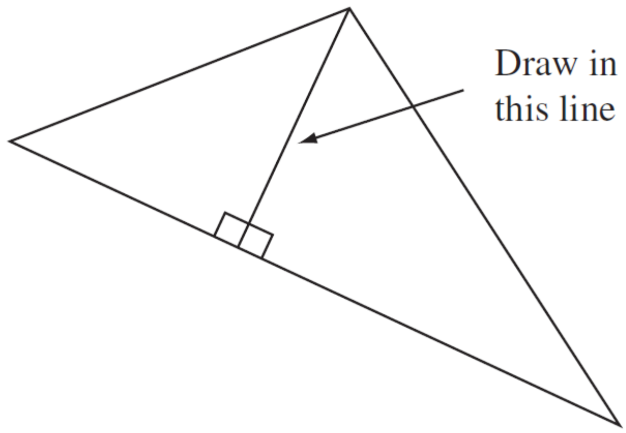
هر چند قضیه را قبلا دیده‌ایم، ولی قصد داریم آن را تحلیل کنیم. به‌طور واضح بررسی می‌کنیم که معنی همه عبارات چیست . برای مثال، وتر چیست؟ این روشن است، اما در مورد روش‌های دیگر فصل ۱۶ چه می‌توان گفت؟ آن‌ها را باید به کار می‌گیریم.

- **فرض‌ها و حکم‌ها را بیابید**

گزاره ارائه شده برای قضیه ”فیثاغورس“، مثال خوبی است اما به‌شکل ”$A \Longrightarrow B$“ یا ”اگر ... و آنگاه ...“ نیست. می‌توان آن را با چند روش به این شکل بازنویسی کرد. برای مثال،

”اگر T یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a ,b و وتر c باشد، آنگاه $c^۲ = a^۲ + b^۲$.“

روشن است که مفروضات به همه مثلث‌های قائم‌الزاویه مربوط هستند: ” T یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a ,b و وتر c است“ و حکم، معادله‌ای مرتبط با طول‌ها است:



شکل ۱.۱۹: هر مثلث دو مثلث قائم‌الزاویه ارائه می‌دهد.

"$c^۲ = a^۲ + b^۲$".

•ارزیابی قدرت فرض‌ها و نتایج

فرض‌ها و نتایج را ارزیابی می‌کنیم. فرض در مورد مثلث‌های قائم‌الزاویه است. مثال‌های زیادی از این دست موجود است، اما تنها زیرمجموعه کوچکی از همه مثلث‌ها هستند. ممکن است وسوسه شویم و بگوییم که این گزاره ضعیف است ولی اینطور نیست. اما آن را در نظر بگیرید که برای هر مثلث، می‌توان دو مثلث قائم‌الزاویه ارائه داد؛ شکل ۱.۱۹ را ببینید. بنابراین، با وجود نظر اول، این قضیه در مورد همه مثلث‌ها سخنی دارد. به این معنی که فرض بسیار ضعیف و خوب است. بهتر است مثال‌های بیشتری از قضیه دیده شود.

حکم، گزاره‌ای بسیار واقعی، صریح و یک معادله است. اگر تنها یک نامساوی (مانند $c^۲ \geq a^۲ + b^۲$) بود، تأثیر کمتری داشت. این یک حکم قوی است.

همچنین توجه کنید که با حکم می‌توان محاسباتی را انجام داد: با داشتن طول اضلاع زاویه قائم، ضلع سوم را به‌دست آورد. توانمند شدن در محاسبات حکم، همیشه خوب است.

باتوجه‌به این می‌دانیم که یک قضیه بزرگ داریم که بسیار مفید است و به ما اجازه می‌دهد که نسبت‌هایی از تعداد زیادی از اشیا را محاسبه کنیم. در حقیقت همان‌طور که ممکن است بدانید، محاسبه فاصله‌ها را در مختصات دکارتی ممکن می‌سازد.

•با قضیه‌های قبل مقایسه کنید.

قضیه‌های زیادی برای مقایسه با این قضیه بسیار ساده از هندسه پایه نداریم. قضیه دیگری از هندسه پایه هست که می‌گوید: در یک مثلث (نه لزوما قائم‌الزاویه) مجموع زاویه‌ها ۱۸۰ درجه (یا ۲π رادیان) است. می‌توان دید که این دو در مفهوم مشابه هستند و با داشتن دو تا می‌توان سومی را محاسبه کرد. تفاوت در این است که یکی در مورد زاویه‌ها و دیگری در مورد طول‌هاست. بنابراین کاملا مکمل یکدیگرند.

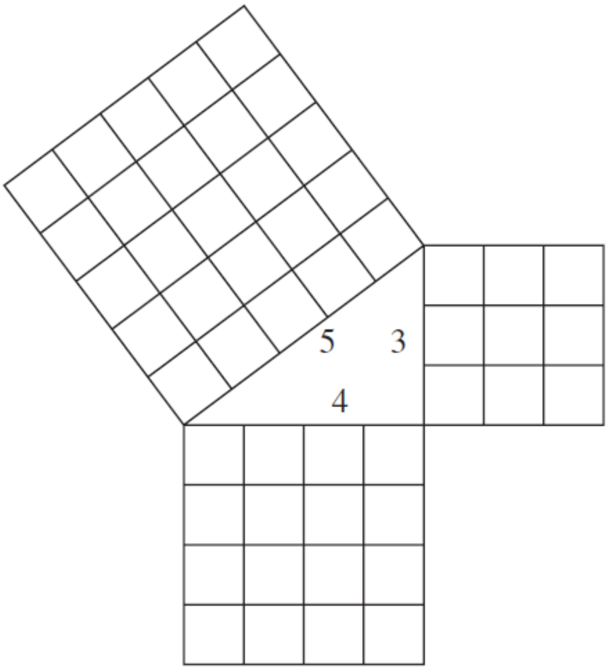
حال قضیه‌ای که طول اضلاع را به هم مربوط می‌کند، و قضیه‌ای که زاویه‌ها را به هم مربوط می‌کند را مشاهده می‌کنیم. می‌توان پرسید که آیا قضیه‌ای وجود دارد که این دو را به هم مربوط کند. بله، چنین قضیه‌ای وجود دارد.

تمرین ۲.۱۹.

قضیه‌ای را بیابید که زاویه‌ها و طول اضلاع یک مثلث را به هم مربوط کند.

•جزئیات را مشاهده کنید!

تا حدودی روشن است که جزئیات زیادی در قضیه فیثاغورس برای مشاهده وجود ندارد. جزئیاتی که ممکن است به خاطر آورید قائم‌الزاویه بودن مثلث و متساوی‌الساقین نبودن آن است. (برای مشاهده مثال‌هایی که گزاره را نقض می‌کنند،



شکل ۲.۱۹: مثلث نمونه $(۳, ۴, ۵)$

تمرین پایان فصل را ببینید.)

•دسته‌بندی کنید که قضیه چه کاری انجام می‌دهد و چطور می‌توان از آن استفاده کرد.

پیش از این در مورد اینکه قضیه چه کاری انجام می‌دهد بحث کرده‌ایم؛ به ما کمک می‌کند تا طول ضلع سوم یک مثلث درحالی‌که طول دو ضلع دیگر آن داده شده است را محاسبه کنیم.

•یک تصویر رسم کنید.

باتوجه‌به اینکه این یک قضیه هندسی است و درباره مثلث‌هاست، پس دلیل خوبی برای رسم یک تصویر داریم. در این حالت مثلث‌های زیادی رسم کنید و طول اضلاع آن‌ها را اندازه بگیرید. آیا اندازه اضلاع در این معادله صدق می‌کنند؟ این باید انجام شود، اما به خاطر داشته باشیم که اندازه‌گیری طول اضلاع تقریبی است.
تصویر نمونه که در شکل ۲.۱۹ ارائه شده است مثلثی با اضلاع $(۳, ۴, ۵)$ است. گاهی به اشتباه به‌عنوان اثبات قضیه ارائه می‌شود. درصورتی‌که تنها یک مثال (نه یک اثبات) است.

•قضیه را برای مثال‌های ساده به کار ببرید.

پیش از این در رسم تصاویر، قضیه را برای مثال‌های ساده مانند مثلث $(۳, ۴, ۵)$ به کار گرفتیم.
•قضیه را برای مثال‌های بدیهی و مرزی به کار ببرید.

فرض‌ها مربوط به مثلث‌های قائم‌الزاویه هستند. مثال‌های بدیهی و مرزی چنین موضوعاتی چیست؟باید گفت: وقتی $a = ۱$، $b = ۱$ و در نتیجه $c = \sqrt{۲}$، از مثال‌های بدیهی است. این مثلثی با دو ضلع با طول‌های گویا و یک ضلع با طول گنگ است. ممکن است کسی این را یک مثال نقض برای گزاره بپندارد "اگر دو ضلع مثلث گویا هستند پس بنابراین سومی نیز هست".
مثال سودمند دیگر $a = ۱$، $b = ۲$ و در نتیجه $c = \sqrt{۵}$ است. این تنها به ما نشان می‌دهد که وقتی یک ضلع دو برابر طول ضلعی دیگر است، چه اتفاقی می‌افتد. مثال جذاب دیگر $a = ۱$، $b = \sqrt{۲}$ و در نتیجه $c = \sqrt{۳}$ است. به این

علاقه‌مندم، برای اینکه استفاده از اولین سه عدد ۱، ۲ و ۳ را در بر دارد. مثلث $a = ۱$، $b = \sqrt{۳}$ و در نتیجه $c = \sqrt{۴}$ نیز خوب است، درحالی‌که یکی از زاویه‌های آن $\frac{\pi}{۶}$ است.

حال در مورد مثال‌های مرزی، مثلث قائم‌الزاویه مرزی چیست؟ می‌توان حالت $a = b$ را یک مثلث مرزی در نظر گرفت، این مثلث قائم‌الزاویه در یک حالت بسیار خاص است. در این حالت $c^۲ = ۲a^۲$، بنابراین $c = \sqrt{۲}a$ خواهد بود. به این معنی که اگر a گویا باشد، آنگاه c نمی‌تواند گویا باشد (چون $\sqrt{۲}$ گنگ است و مضرب گویایی از یک عدد گنگ، گنگ است). مثال دیگری که می‌توان برای حالت مرزی آورد این است که یکی از اضلاع را در مقایسه با دیگری بسیار بزرگ یا بسیار کوچک بسازیم. اگر b به صفر میل کند، آنگاه $b^۲$ بسیار کوچک است پس باید $c^۲$ به $a^۲$ میل کند. به‌عبارت‌دیگر c به a میل می‌کند. این را در یک شکل می‌توان دید. مثلثی با ضلع بسیار کوچک b در مقایسه با a رسم کنید. می‌توان دید که a و c تقریبا با هم مساویند.

پس مشاهده کردیم که جبر و هندسه همان‌طور که انتظار داشتیم با یکدیگر مرتبط هستند. جبر با هندسه مطابقت دارد. توجه کنید که اگر b با صفر مساوی باشد، آنگاه دیگر مثلث نداریم!

- **به‌کارگیری قضیه برای نامثال‌ها**

بیایید نا_مثال‌های قضیه را در نظر بگیریم. در این‌جا نا_مثال‌ها، مثلث‌هایی هستند که قائم‌الزاویه نیستند. اما در این حالت وتر را چگونه تعریف کنیم؟ همیشه ضلع روبروی زاویه قائمه را وتر می‌خواندیم. راهی برای مشخص کردن یک ضلع خاص وجود ندارد، بنابراین راهی برای تشخیص اینکه کدام یک از اضلاع باید نقش اضلاع زاویه قائمه را در $c^۲ = a^۲ + b^۲$ بازی کنند وجود ندارد. به روش دیگری برای تعریف c نیاز داریم. ممکن است آن را طویل‌ترین ضلع قرار دهیم. این باتوجه‌به اینکه $c^۲ = a^۲ + b^۲$، درست است، چرا که باید $c > a$ و $c > b$. برای مشاهده این، ملاحظه کنید که $b^۲ > ۰$ درست، پس $c^۲ > a^۲$، و در نتیجه $c > a$ است. به‌طور مشابه $c > b$ می‌باشد.

اگر در رسم تعدادی مثال تلاش کنید، آنگاه احتمالا می‌بینید که معادله حتی در محاسبه تقریبی اندازه‌گیری نیز صدق نمی‌کند. این ما را به این پرسش سوق می‌دهد که "آیا مثلث غیر قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که برای آن $c^۲ = a^۲ + b^۲$ باشد؟" در بخش بعد با همین سروکار داریم. وقتی می‌پرسیم "عکس قضیه درست است؟" همچنین باید نا_مثال‌های تمرین ۱۹.۱۲ را دید.

- **بازنویسی نمادها یا عبارات**

پیش از این، وقتی که گزاره "اگر ...، آنگاه ..." ارائه شد، قضیه را تا جایی که امکان داشت با نمادها نوشتیم. توجه کنید، اینکه تنها بگوییم "$c^۲ = a^۲ + b^۲$" کافی نیست. باید توضیح دهیم که a، b و c چه هستند، و c وتر مثلث قائم‌الزاویه هست.

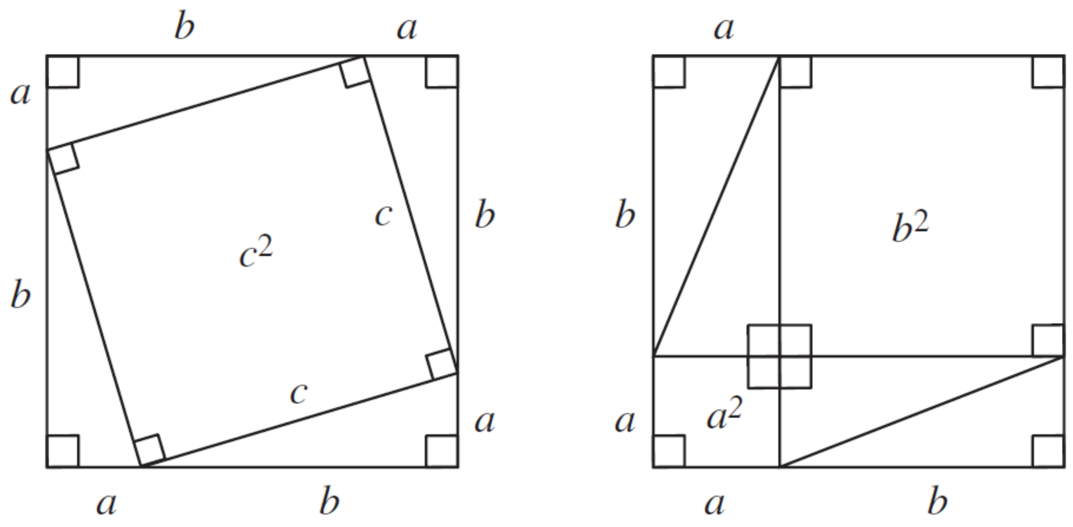
اثبات قضیه فیثاغورس

همان‌طور که پیش از این اشاره کردیم، اثبات کارایی قضیه به‌طور تقریبی برای بعضی از مثال‌ها یا حتی، به‌طور کامل در مثال‌های خاصی چون مثلث $(۳, ۴, ۵)$، کافی نیست. نیاز است که آن را برای همه مثلث‌ها اثبات کنیم. ممکن است اثبات‌های قبلی و از روی شکل این قضیه کافی باشد. اما به‌هرحال یکی از اهداف این کتاب تشویق به اندیشیدن برای خودتان و مستلزم شدن به بررسی هر استدلال ارائه شده است.

حال اثباتی از قضیه را می‌بینیم. صدها اثبات واژه به واژه وجود دارد[۱]. اثبات مورد علاقه من، هندسی است.

اثبات (قضیه فیثاغورس). اثبات با استفاده از دو مربع شکل ۳.۱۹ نشان داده می‌شود. برای رسم مربع اول، ابتدا مثلث قائم‌الزاویه دلخواهی با اضلاع زاویه قائمه a و b را رسم می‌کنیم، سپس هر یک از آن‌ها را به ترتیب به اندازه b و a ادامه می‌دهیم. سپس با کامل کردن رسم، مربع سمت چپ شکل ۳.۱۹ حاصل می‌شود. مربع دیگری شبیه مربع سمت

[۱] در کتاب *Elisha Loomis*، بیش از ۳۶۰ اثبات برای قضیه فیثاغورس موجود است.



شکل ۳.۱۹: اثبات قضیه فیثاغورس

چپ در طرف راست می‌توان رسم کرد. با استفاده از شکل می‌توان دید که دو مربع مساحت یکسانی دارند، بنابراین نتیجه می‌گیریم که

مساحت مربع سمت راست=مساحت مربع سمت چپ

$$c^۲ + (۴ \times (a,b) \text{ مساحت مثلث}) = a^۲ + b^۲ + (۴ \times (a,b) \text{ مساحت مثلث})$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲.$$

تمرین ۳.۱۹.

با استفاده از ایده‌های فصل ۱۸ (چگونه خواندن یک اثبات) اثبات را تحلیل کنید. تحلیل خودتان را با تحلیل زیر مقایسه کنید.

همه پیشنهادات فصل ۱۸ مناسب این اثبات نیستند. تلاش می‌کنیم تعدادی از آن‌ها که به این اثبات کمک می‌کند را به کار ببندیم.

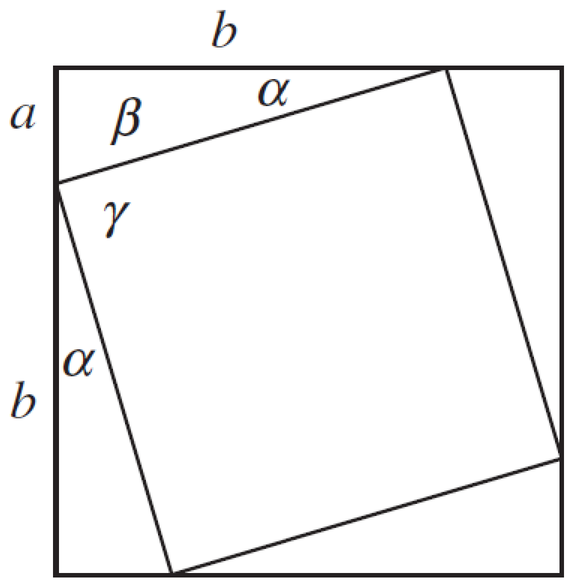
•آنجا که از مفروضات استفاده شده است را بیابید!

از اینکه "مثلث قائم‌الزاویه است" در کجا استفاده کرده‌ایم؟ این در ساختار مربع اول به کار رفته است. اگر اضلاع a و b در یک زاویه قائمه با یکدیگر تلاقی نمی‌کردند، آنگاه نمی‌توانستیم یک مربع بسازیم و در نتیجه نمی‌توانستیم نتیجه بگیریم که مساحت آن با مساحت مربع سمت راست مساوی است.

•متن را بررسی کنید.

اگر متن را بررسی کنید، ممکن است ببینید که واقعیت به کار گرفته شده است اما به‌طور آشکار مشخص نشده است. تصویر در اینکه مساحت مربع به ویژه مربع سمت چپ $c^۲$ است، بسیار متقاعد کننده است. ولی دقت کنید مربع بودن آن را نشان ندادیم. می‌دانیم که همه اضلاع با طول یکسان هستند، اما این به این معنی نیست که شکل یک مربع است. به یک لوزی یا بادبادک فکر کنید.

چگونه مطمئن شویم که واقعا یک مربع است؟ بله، نیاز است که نشان دهیم یکی از زاویه‌های درونی، قائمه است، وقتی برای یکی به‌دست آوریم، اثبات به طور مشابه برای همه کار می‌کند. (آیا دلیلش را می‌توانید ببینید؟) زاویه داخلی γ را در نظر بگیرید. فرض کنید زاویه کوچکتر مثلث شکل ۴.۱۹، α و زاویه بزرگتر آن، β باشد. پس باتوجه‌به اینکه یک خط مستقیم داریم، می‌توان دید که $\alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$.



شکل ۴.۱۹

اما باتوجه‌به اینکه مجموع زوایای یک مثلث 180° است و مثلث یک مثلث قائم‌الزاویه است، داریم: $\alpha+\beta+90^\circ = 180^\circ$. با استفاده از این دو معادله، درمی‌یابیم که نیاز است γ، 90° باشد. اگر این توضیح را اضافه کنیم، استدلال هم قانع کننده‌تر خواهد شد. درست است که قبل از این هم تصویر متقاعد کننده به نظر می‌رسید ولی باید در مورد تصاویر دقیق باشیم، آن‌ها می‌توانند گمراه کننده باشند.

تمرین ۴.۱۹.

تصویر به چه شکل دیگری می‌تواند ما را گمراه کند؟

در مورد عکس قضیه چه می‌توان گفت؟

حالا، روش مهمی از کشف قضیه‌ها را بررسی می‌کنیم: عکس آن درست است؟ این کمک می‌کند که گزاره‌ای به‌شکل "اگر ...، آنگاه ..." بنویسیم.

اگر T یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a، b و وتر c باشد، آنگاه $c^2 = a^2 + b^2$، عکس آن می‌شود:

اگر $c^2 = a^2 + b^2$، آنگاه T یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a، b و وتر c است. توجه کنید که این بیان کاملی از مطلب نیست؛ زیرا باتوجه‌به مفروضات نمی‌دانیم که a، b و c چه هستند. پس دوباره قضیه فیثاغورس را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

فرض کنید T مثلثی با اضلاعی به طول a، b و بلندترین ضلع آن به طول c باشد. اگر T یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، آنگاه $c^2 = a^2 + b^2$.

حال عکس آن می‌شود:

قضیه ۲.۱۹.

(عکس قضیه فیثاغورس): *فرض کنید T مثلثی با اضلاع به طول a، b وطول بزرگترین ضلع آن c باشد. اگر $c^2 = a^2+b^2$، آنگاه T یک مثلث قائم‌الزاویه است.*

این درست است یا نه؟ درست است! ولی چرا؟

برهان. فرض کنید T مثلثی با اضلاعی به طول a، b و c، و C زاویه روبرو به ضلع c باشد، آنگاه قانون کسینوس ایجاب می‌کند که

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C.$$

حال در نظر بگیرید که $c^۲ = a^۲ + b^۲$، آنگاه داریم:

$$۲ab\cos C = ۰.$$

از آنجا که a و b نمی‌توانند صفر باشند، پس باید $\cos C = ۰$ باشد. این نتیجه می‌دهد که $C = ۹۰^\circ + ۱۸۰^\circ n$، که n یک عدد صحیح است. باتوجه‌به اینکه $۰ < C < ۱۸۰^\circ$ است پس باید $C = ۹۰^\circ$ باشد، یعنی T یک مثلث قائم‌الزاویه است. ■

تمرین ۵.۱۹.

روش‌های فصل ۱۸ را به کار ببندید، چگونه خواندن یک اثبات را برای اثبات بالا به کار ببرید.

✍ توجه ۱.۱۹.

در اثبات عکس از قاعده کسینوس استفاده شد. اثباتی که در قضیه فیثاغورس هم استفاده می‌شود (صفحه ۲۹ و مطالب زیر را ببینید.) توجه کنید که قاعده کسینوس، کلی‌تر از قضیه فیثاغورس است، زیرا می‌توان قضیه فیثاغورس را از آن نتیجه گرفت. اگر یک مثلث قائم‌الزاویه داشته باشیم، پس $C = ۹۰^\circ$ است و بنابراین

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab \times ۰ = a^۲ + b^۲.$$

لذا، می‌توان دید که یک گزاره کلی‌تر می‌تواند در اثبات یک قضیه ساده‌تر به کار برده شود.

باتوجه‌به اینکه قضیه فیثاغورس و عکس آن درست هستند، دو گزاره معادل داریم (یعنی اگر $B \Longrightarrow A$ و $A \Longrightarrow B$، آنگاه $B \Longleftrightarrow A$). این به آن معنی است که قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۳.۱۹.

فرض کنید T یک مثلث با اضلاعی به طول a، b و بلندترین ضلع به طول c باشد. آنگاه T یک مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر $c^۲ = a^۲ + b^۲$ باشد.

برهان. این را می‌توان با ترکیبی از برهان قضیه فیثاغورس که ارائه شد و استدلال مربوط به عکس قضیه اثبات کنیم. دقت کنید که باتوجه‌به اینکه قضیه فیثاغورس در اثبات قاعده کسینوس به کار برده می‌شود، نمی‌توان به طور مستقیم از قاعده کسینوس در هر دو اثبات استفاده کرد! آیا این را کشف کرده بودید؟ ■

کمی بیشتر در مورد درک عکس قضیه

در نظر بگیرید که یک مثلث با اضلاعی به طول ۲/۰، ۲/۱ و ۲/۹ داریم. می‌بینیم که $۲/۹^۲ = ۲/۱^۲ + ۲/۰^۲$. بنابراین مثلث یک مثلث قائم‌الزاویه است.

تمرین ۶.۱۹.

این نتیجه را با استفاده از قضیه فیثاغورس یا عکس آن به دست آوردیم؟

فرض کنید که مثلثی با اضلاعی به طول ۳/۶، ۷/۷ و ۸/۴ داریم. در این حالت،

$$۳/۶^۲ + ۷/۷^۲ = ۷۲/۲۵ \neq ۷۰/۵۶ = ۸/۴^۲.$$

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه نیست.

تمرین ۷.۱۹.

این نتیجه را با استفاده از قضیه فیثاغورس یا عکس آن به دست آوردیم؟

استدلال اشتباه و معمول در پاسخ به پرسش بالا این است که اضلاع در معادله $c^۲ = a^۲ + b^۲$ صدق نمی‌کنند، بنابراین نمی‌توان از قضیه فیثاغورس استفاده کرد. لذا باید از عکس آن استفاده شود.

استدلال درست این است که طبق قضیه فیثاغورس، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای داشته باشید باید در معادله صدق کند. بنابراین اگر معادله صادق نباشد، پس راهی وجود ندارد که مثلث قائم‌الزاویه باشد. به این معنی که در حال به‌کارگیری گزاره عکس نقیض قضیه فیثاغورس یعنی گزاره معادل "اگر $c^۲ \neq a^۲ + b^۲$، آنگاه T قائم‌الزاویه نیست." هستیم.

تمرین

۱. بیشتر اوقات قضیه فیثاغورس بد نقل شده است. در فیلم جادوگر شهر آواز، مترسک یک گواهی‌نامه ارائه می‌دهد، و برای نشان دادن اندازه ذکاوتش انگشتش را به سمت پرستشگاهش اشاره می‌رود و می‌گوید "جذر وتر یک مثلث متساوی‌الساقین مساوی است با مجموع جذرهای اضلاع دیگر."
این قضیه فیثاغورس نیست گرچه شامل ریشه‌های توان دوم و مثلث‌های متساوی‌الساقین است. هر چند این قضیه فیثاغورس نیست ولی به این معنی نیست که گزاره غلط است. روش‌هایمان را برای تحلیل این گزاره به کار ببندید. این گزاره درست است؟ اگر نیست، یک مثال نقض بزنید.

۲. قضیه فیثاغورس در انیمیشن کمدی دیگری نیز نادرست نقل شده است. کبوتر چند عینک پیدا می‌کند و آن‌ها را بر چشمانش قرار می‌دهد و مانند مترسک انگشتش را به پرستشگاهش اشاره می‌رود و می‌گوید: "جمع جذرهای هر دو ضلع یک مثلث متساوی‌الساقین مساوی با جذر ضلع باقیمانده است." شخصیت دیگر فریاد می‌زند: "شما نادانید، آن یک مثلث قائم‌الزاویه است." چرا کبوتر و شخصیت دیگر هر دو نادرست می‌گویند؟

۳. قضیه‌های بسیاری در ریاضیات عمومی بدون اثبات ارائه شده‌اند. می‌توانید مثال‌های زیادی از این دست را بیابید. تلاش کنید که اثبات‌هایی از منابع دیگر برای آن‌ها پیدا کنید و با روش‌های فصل ۱۸ (چگونه خواندن یک اثبات) آن‌ها را تحلیل کنید.
تعدادی مثال که ممکن است برای بررسی به آن‌ها علاقه‌مند باشید:

(آ) مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است.
(ب) کم کردن یک عدد منفی با اضافه کردن یک عدد مثبت معادل است.
(ج) مقدار π، ...۳/۱۴۱۵۹ است.
(د) تعریف سینوس و کسینوس به مثلث وابسته نیست. (نیاز است در مورد مثلث‌های مشابه بدانید.)
(و) برای هر زاویه θ، $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$.
(ه) مساحت دایره با شعاع r، $\pi r^۲$ است.

۴. مثلث‌هایی با اضلاعی به طول‌های داده شده زیر مفروض‌اند. بررسی کنید کدام یک قائم‌الزاویه هستند و مشخص کنید از قضیه فیثاغورس یا عکس آن استفاده کرده‌اید.

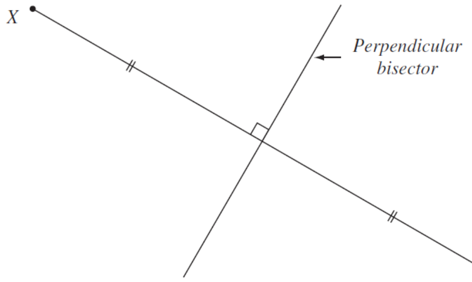
(آ) ۲۵, ۲۴, ۷
(ب) ۵۲, ۴۸, ۲۸
(ج) ۸۸/۰, ۸۰/۰, ۳۶/۹
(د) ۱/۷, ۱/۴, ۰/۸

۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که طول وتر گنگ، ولی دو ضلع دیگر با طول گویا باشند.

۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که طول وتر گویا، ولی دو ضلع دیگر با طول گنگ باشند.

۷. فرض کنید X و Y دو نقطه مجزا در صفحه باشند. خطی بین آن‌ها رسم کنید. در نقطه میانی یک خط عمود بر خط رسم کنید. شکل۵.۱۹ را ببینید. این خط را عمودمنصف X و Y می‌گویند. نشان دهید فاصله هر نقطه P روی عمودمنصف، از X و Y مساوی است. می‌گوییم P از X و Y متساوی‌الفاصله است.

۸. به فصل قبل و تمرین‌ها برگردید و دوباره قضیه‌ها و اثبات‌ها را تحلیل کنید. آیا چیزی که قبلا مشاهده نکرده باشید، می‌بینید؟



شکل ۵.۱۹: عمودمنصف

چکیده

- قضیه فیثاغورس: فرض کنید T یک مثلث با اضلاعی به طول a، b و بلندترین ضلع c باشد. اگر T یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، آنگاه $c^۲ = a^۲ + b^۲$.
- عکس قضیه فیثاغورس: فرض کنید T یک مثلث با اضلاعی به طول a، b و بلندترین ضلع c باشد. اگر $c^۲ = a^۲ + b^۲$، آنگاه T یک مثلث قائم‌الزاویه است.

بخش چهارم

روش‌های اثبات

فصل ۲۰

روش اثبات ۱: مستقیم

ساده‌ترین بهترین است.

"پند عامیانه"

نخستین روش اثبات یک قضیه، ساده‌ترین روش است که روش مستقیم نامیده می‌شود. اکثر گزاره‌ها را می‌توان به گزاره‌های کوچکتری به‌شکل "اگر A، آنگاه B" شکست. برای اثبات مستقیم A نتیجه می‌دهد B، باید ثابت کنید A نتیجه می‌دهد A_1، A_1 نتیجه می‌دهد A_2، A_2 نتیجه می‌دهد A_3 و غیره تا زمانی که A_r نتیجه دهد B، را به‌دست آورید. آنگاه شما $A \Longrightarrow B$ را اثبات کرده‌اید. هر استلزام باید باشد، یعنی نباید پرش بزرگی داشته باشیم که درک آن سخت شود!

مثال‌هایی از روش مستقیم

قبلا یک نمونه از روش مستقیم را در اثبات بخش "اگر" قضیه ۱.۱۸ دیده‌ایم. در این مورد برای اثبات قضیه، محاسبه ساده‌ای داریم. قضیه بعد مثالی دیگر از این نوع است.

قضیه ۱.۲۰.
فرض کنید m عددی صحیح باشد. اگر m فرد باشد، آنگاه m^2 نیز فرد است.

برهان. اگر m فرد باشد، آنگاه به ازای یک عدد صحیح r، $m = 2r + 1$. سپس

$$\begin{aligned} m^2 = (2r+1)^2 &= (2r+1)(2r+1) \\ &= 4r^2 + 2r + 2r + 1 \\ &= 4r^2 + 4r + 1 \\ &= 2(2r^2 + 2r) + 1. \end{aligned}$$

یعنی m^2 فرد است. ■

تعریف عدد اصلی در فصل اول را به یاد آورید و بررسی کنید که قضیه زیر پاسخی برای مسئله (۲) از فصل ۵ است.

قضیه ۲.۲۰.
فرض کنید A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند. پس،

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

روش های فصل ۱۸ را در بالا اعمال کنید. درمورد مثال‌های بدیهی چه رخ می‌دهد؟ مثلا برای $A = \emptyset$. درمورد موارد مرزی مانند $A = B$ چطور؟ درمورد نا ـ مثال‌ها چطور؟ مثلا، وقتی که یک یا هر دو مجموعه نامتناهی باشند چه رخ می‌دهد؟ چرا قضیه به مجموعه‌های متناهی محدود شده است؟ فرضیات چه هستند و چقدر خوب هستند؟ (خیلی خوب، زیرا فرض کردیم که مجموعه‌ها فقط متناهی باشند.) نتایج چقدر خوب هستند؟ (خیلی خوب، زیرا معادله‌ای در اختیار قرار می‌دهند که قابل محاسبه است. روش‌های محاسباتی همواره مفیدند!) آیا می‌توانیم شکلی رسم کنیم؟ بله، می‌توانیم یک نمودار وَن رسم کنیم.
حال به اثبات بپردازیم.

برهان. اگر ابتدا همه عضوهای A را و سپس همه عضوهای موجود در B را بشماریم، آنگاه عضوهایی که در A یا B هستند را شمارش کرده‌ایم، اما آن‌هایی که هم در A و هم در B هستند را دو بار شمارش کرده‌ایم. در اجتماع A و B، اعضایی که در هر دو مجموعه است فقط یک بار شمارش می‌شوند. بنابرین در $|A| + |B| - |A \cap B|$ اعضای موجود در A یا B فقط یک بار شمارش می‌شوند. لذا این با $|A \cup B|$ برابر است. ■

یک نمونه ساده دیگر (برتری خاصی ندارد) با مراحل بیشتر را امتحان کنیم. و این بار ایده پنهان آن و چگونگی امکان اثبات را ببینیم.

قضیه ۳.۲۰.
فرض کنید $p \in \mathbb{Q}$ و $p^۲ \in \mathbb{Z}$. پس $p \in \mathbb{Z}$.

چه فرض‌هایی داریم؟ اولین فرض $p \in \mathbb{Q}$ است. البته هنوز قضیه‌های زیادی را درمورد اعداد گویا نمی‌شناسیم. آنچه واقعا می‌شناسیم تعریف اعداد گویاست، یعنی می‌دانیم که برای برخی اعداد $a, b \in \mathbb{Z}$ داریم $p = \frac{a}{b}$ و می‌توانیم فرض کنیم که این ساده‌ترین شکل ممکن است.
فرض بعدی $p^۲ \in \mathbb{Z}$ است. یعنی $\left(\frac{a}{b}\right)^۲ \in \mathbb{Z}$، لذا، $\frac{a^۲}{b^۲} \in \mathbb{Z}$. این کسر نیز در ساده‌ترین شکل خود ظاهر شده است. اما این وقتی می‌تواند برقرار باشد که $b = \pm ۱$ زیرا $a^۲ \in \mathbb{Z}$ (چون $a \in \mathbb{Z}$). بنابراین می‌توانیم ببینیم که $p = \frac{a}{\pm ۱} = \pm a \in \mathbb{Z}$.
بیایید نسخه پیراسته‌ای از اثبات را بنویسیم:

برهان. بنا بر فرض به ازای برخی اعداد صحیح $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}$، داریم $p = \frac{a}{b}$ که کسر در ساده‌ترین شکل خود آمده است. بنابراین $p = \left(\frac{a}{b}\right)^۲ = \frac{a^۲}{b^۲}$. چون $p^۲ \in \mathbb{Z}$ و کسر در ساده‌ترین شکل ممکن است،
پس داریم $b^۲ = ۱$. لذا $b = \pm ۱$ و می‌توان نتیجه گرفت که $p = \frac{a}{\pm ۱} = \pm a \in \mathbb{Z}$. ■

توجه کنید که در این‌جا از تعریف عدد گویا استفاده کردیم، به‌عنوان‌مثال، $p = \frac{a}{b}$، این ایده مناسبی است که در هنگام تلاش برای پیدا کردن اثبات یک گزاره اِعمال شود.

قضیه ۴.۲۰.
فرض کنید m و n اعداد حقیقی باشند. اگر $n > m > ۰$، آنگاه

$$\frac{m+۱}{n+۱} > \frac{m}{n}.$$

یک روش اثبات عبارت بالا این است که سمت راست را به سمت چپ انتقال دهیم و نشان دهیم که چیزی بزرگتر از ۰ است. در عوض، آنچه باید اثبات شود فرض می‌گیریم و کار را از آنجا شروع می‌کنیم. این یک روش کاملا منطقی برای حل مسئله است. همان‌طور که بعدا خواهیم دید، استفاده از آن در نسخه اصلاح شده منطقی نیست.
داریم:

$$\begin{aligned} \frac{m+۱}{n+۱} &> \frac{m}{n} \\ (m+۱)n &> (n+۱)m \\ mn+n &> mn+m \\ n &> m. \end{aligned}$$

عالی! ما فقط ثابت کرده‌ایم که $\frac{m}{n} > \frac{m+۱}{n+۱}$ نتیجه می‌دهد $n > m$ و در طول مسیر از مثبت بودن m و n استفاده کردیم. البته این چیزی نیست که باید اثبات شود، اما امیدواریم که این استدلال برگشت‌پذیر باشد؛ خواهیم دید که هست.

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} n >&\ m \\ \Longrightarrow mn + n >&\ mn + m \\ \Longrightarrow (m+۱)n >&\ (n+۱)m \\ \Longrightarrow \frac{m+۱}{n+۱} >& \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

چون m و n مثبت هستند آخرین نامساوی درست است. ■

توجه داشته باشید که در اثبات از فرض‌ها استفاده شده است، به‌عنوان‌مثال، ابتدا از $n > m$ و از $n > ۰$ و $m > ۰$ در پایان استفاده می‌شود. همچنین توجه کنید که اثبات نهایی بسیار متفاوت از فرآیند پیدا کردن اثبات است. نسخه پیراسته را در نظر بگیرید؛ خط دوم این است که $mn + n > mn + m$. بررسی اولیه را با $n > m$ آغاز کرده‌ایم، آیا متوجه هستید که با اضافه کردن mn به طرفین پیش رفته‌ایم؟ این واضح نیست!

در مثال بعدی، دوباره از روش فرض کردنِ آنچه باید اثبات کنیم، استفاده می‌کنیم. مهم است که توجه داشته باشیم، این را تنها برای پیدا کردن اثبات فرض می‌کنیم، هنگامی که اثبات نهایی را می‌نویسیم از این فرض استفاده نمی‌کنیم.

قضیه ۵.۲۰.

حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی منفی عددی مثبت است.

اجازه دهید فرض کنیم که نمی‌دانیم چگونه این کار را انجام دهیم. من مجاز به استفاده از حقایقی مانند $۰ \times a = ۰$ و قانون توزیع‌پذیری یعنی، $x(y+z) = xy + xz$ هستم.

می‌خواهیم اگر x و y مثبت باشند، آنگاه، $(-x)(-y) > ۰$ باشد. می‌توانیم

$$(-x)(-y) = (-۱) \times x \times (-۱) \times y = (-۱) \times (-۱) \times xy.$$

را در نظر بگیریم چون این استدلال برگشت‌پذیر است باید اثبات کنیم که $(-۱) \times (-۱)$ مثبت است.

اینک با استفاده از قوانین ساده جبری اثبات را به نشان‌دادن $(-۱) \times (-۱) = ۱$ تقلیل دادیم.

واقعا، بیایید این معادله را بررسی کنیم. اگر فرض کنیم درست باشد، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ دوباره بر آن تأکید دارم که ما فرض کردیم چیزی درست است تا آن را بررسی کنیم. وقتی می‌خواهیم اثبات را بنویسیم نباید فرض کنیم که آن چیز درست است.

تنها کاری که باید انجام دهید این است که همه چیز را در یک طرف قرار دهید.

$$\begin{aligned} (-۱) \times (-۱) =&\ ۱ \\ (-۱) \times (-۱) - ۱ =&\ ۰. \end{aligned}$$

اینک می‌توانیم جملات را به‌شکل زیر جمع کنیم:

$$\begin{aligned} (-۱) \times (-۱) =&\ ۱ \\ (-۱) \times (-۱) - ۱ =&\ ۰ \\ (-۱) \times (-۱) + (-۱) =&\ ۰ \\ (-۱)((-۱) + ۱) =&\ ۰ \\ (-۱) \times ۰ =&\ ۰ \end{aligned}$$

به چیزی دست یافته‌ایم که درست است. آیا $(-۱) \times (-۱) = ۱$ را اثبات کرده‌ایم؟ به‌طور واقعی نه. ما گزاره را درست فرض کردیم و چیزی تولید کردیم که درست بود. نیاز است که به جهت دیگر برویم. با چیزی که درست است شروع کنید و کار را به سمت گزاره پیش ببرید.

واضح است که باید این بحث را معکوس کنیم! می‌توانیم با استفاده از $(-۱) \times ۰ = ۰$ تساوی $(-۱) \times (-۱) = ۱$ را اثبات کنیم.

بیایید این کار را درست انجام دهیم.

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} & (-۱) \times ۰ = ۰ \\ \Longrightarrow \quad & (-۱)((-۱) + ۱) = ۰ \\ \Longrightarrow \quad & (-۱) \times (-۱) + (-۱) = ۰ \\ \Longrightarrow \quad & (-۱) \times (-۱) + (-۱) + ۱ = ۱ \\ \Longrightarrow \quad & (-۱) \times (-۱) + ۰ = ۱ \\ \Longrightarrow \quad & (-۱) \times (-۱) = ۱. \end{aligned}$$

■

تمرین ۱.۲۰.

(آ) یک نسخه اصلاح شده از نتیجه $(-۱) \times (-۱) = ۱$ بنویسید که نشان دهد حاصل‌ضرب دو عدد منفی عددی مثبت است. یعنی، اثبات کاملی از قضیه ۵.۲۰ ارائه دهید.

(ب) از کدام قواعد جبری به‌طور ضمنی در اثبات استفاده کرده‌ایم؟ آیا هر یک از آن‌ها بر این دلالت دارند که حاصل‌ضرب دو عدد منفی عددی مثبت است؟ اگر چنین است، باید آنچه را که به‌عنوان یک **استدلال دوری** *شناخته می‌شود داشته باشیم. این جایی است که فرض می‌کنیم یک گزاره درست است و بعد از درستی آن برای اثبات خودش استفاده می‌کنیم. به‌عنوان‌مثال، "من بهترین کاندیدای ریاست جمهوری هستم، زیرا من از همه کاندیداهای دیگر بهتر هستم." استدلال دوری است. اساسا چنین می گوید: " من بهترین هستم، زیرا من بهترین هستم."*

چگونه می‌توان نشان داد که یک تساوی برقرار است؟

چند روش برای اثبات درستی یک تساوی وجود دارد. از نظر من، مهم‌ترین روش، روش زیر است.

معمولا برای ا درستی یک تساوی بهتر است که طرف پیچیده‌تر را انتخاب و با جایگزینی و ساده کردن عبارت طرف دیگر را به‌دست آوریم.

اگر با تساوی شروع و سعی کنید که دوباره آن را مرتب کنید، احتمال گرفتار شدن در یک دور وجود دارد.

به‌عنوان‌مثال، برای اینکه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ به‌طوری‌که برای $n \in \mathbb{Z}$ و $x \neq \frac{n\pi}{۲}$ ثابت کنیم $\tan x + \cot x = ۲ \csc ۲x$، موارد زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} && \text{بنا به تعریف } tan \text{ و } cot \\ &= \frac{\sin^۲ x + \cos x^۲}{\cos x \sin x} \\ &= \frac{۱}{\cos x \sin x} && \text{با استفاده از } \sin^۲ x + \cos x^۲ = ۱ \\ &= \frac{۱}{(\frac{۱}{۲}) \sin ۲x} && \text{با استفاده از فرمول نیم‌زاویه} \\ &= ۲ \csc ۲x && \text{بنا به تعریف } \csc ۲x \end{aligned}$$

گزینه‌های دیگری نیز برای اثبات $x = y$ وجود دارند:

(۱) $x = y \iff x - y = 0$،

(۲) $x = y \iff x \geq y$ و $x \leq y$،

(۳) $x = y \iff x = z$ و $y = z$.

اولین آن‌ها به نوعی شباهت زیادی به مثال فوق دارد. عبارت $x - y$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم آن را تقلیل دهیم تا به صفر برسیم. اثبات قضیه ۴.۲۷ مثالی معمول از دومی خواهد بود. سومی نسبتا واضح است و نیاز به توصیف ندارد؛ نشان می‌دهیم که x و y با شی دیگری مانند z برابر است. می‌توان با استفاده از آن نشان داد که عدد اعشاری تکراری ...۰٫۹۹۹ برابر ۱ است. در ابتدا می‌دانیم که $\frac{3}{3} = 1$. همچنین می‌دانیم که $\frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3}$ اما معروف است که $\frac{1}{3}$ دارای کسر اعشاری گسترش یافته ...۰٫۳۳۳۳۳ است و بنابراین ....۰٫۹۹۹۹۹ $= 3 \times$ ...۰٫۳۳۳۳۳ $= 3 \times \frac{1}{3}$. لذا، چون $\frac{3}{3} =$ ...۰٫۹۹۹۹۹ و $\frac{3}{3} = 1$، پس تساوی برقرار است. این نتیجه برای اکثر مردم بسیار شگفت‌انگیز است. ما به‌صورت بصری احساس می‌کنیم که ۱ و ...۰٫۹۹۹۹ اعداد اعشاری گسترش یافته مجزایی هستند و باید اعداد مختلفی را نمایش دهند. این نشان می‌دهد که این شهود اشتباه است.

اثبات اگر و تنها اگر

گزاره قضیه ۱.۱۸ در بخش ”چگونه خواندن اثبات“ از نوع ”اگر و فقط اگر“ است. این قضیه با شکستن اثبات به یک بخش ”اگر“ و یک بخش ”تنها اگر“ ثابت شده است. این یک روش معمولی حمله برای اثبات چنین گزاره‌هایی است. در مثال زیر این مطلب را در عمل خواهید دید و همچنین، گاهی اوقات، اثبات در یک جهت معکوس می‌شود تا جهت دیگر به‌دست آید.

قضیه ۶.۲۰.

فرض کنید $a \neq 0$، b و c اعداد حقیقی باشند. دراین‌صورت

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

بخش ”تنها اگر“ (جهت $\Longrightarrow$) چنین می‌گوید که اگر یک معادله درجه دوم داشته باشیم، آنگاه دارای جواب‌هایی به‌صورت $x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ است. اما توجه داشته باشید که نمی‌گوید که اگر به این شکل باشد آنگاه یک جواب است، بخش ”اگر“ (جهت $\Longleftarrow$) این کار را انجام می‌دهد.

پس باید با جدا کردن هر یک از این جهت‌ها سعی کنیم مسئله را اثبات کنیم. دومین آن‌ها یعنی، $\Longleftarrow$ به آسانی اثبات می‌شود. مانند اغلب معادلات، وقتی پاسخ را داریم می‌توانیم به آسانی جایگزین کنیم.

تمرین ۲.۲۰.

اثبات بخش ”اگر“ (جهت $\Longleftarrow$) را بنویسید.

اینک (جهت $\Longrightarrow$) بخش ”تنها اگر“ گزاره را در نظر می‌گیریم. ابتدا، با تقسیم کردن بر a کافی است این معادله $x^2 + (\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0$ را حل کنیم. بنابراین بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که معادله $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ را حل می‌کنیم. بعدا می‌توانیم به عقب برگردیم و با استفاده از $\alpha = \frac{b}{a}$ و $\beta = \frac{c}{a}$ جایگزینی بر حسب a، b و c را انجام می دهیم.

برای حل یک معادله درجه دوم به این شکل می‌توانیم مربع کامل را تشکیل دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
& & x^{۲} + \alpha x + \beta &= ۰ \\
&\Longrightarrow & (x + \frac{\alpha}{۲})^{۲} - (\frac{\alpha}{۲})^{۲} + \beta &= ۰ \\
&\Longrightarrow & (x + \frac{\alpha}{۲})^{۲} &= (\frac{\alpha}{۲})^{۲} - \beta \\
&\Longrightarrow & x + \frac{\alpha}{۲} &= \pm\sqrt{(\frac{\alpha}{۲})^{۲} - \beta} \\
&\Longrightarrow & x &= -\frac{\alpha}{۲} \pm \sqrt{(\frac{\alpha}{۲})^{۲} - \beta} \\
&\Longrightarrow & x &= -\frac{b}{۲a} \pm \sqrt{(\frac{b}{۲a})^{۲} - \frac{c}{a}} \\
&\Longrightarrow & x &= -\frac{b}{۲a} \pm \sqrt{(\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}) - \frac{ac}{a^{۲}}} \\
&\Longrightarrow & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a}.
\end{aligned}$$

اینک باید خوشحال باشیم، زیرا نتایج را برای هر دو جهت ثابت کردیم: $\Longleftarrow$ و $\Longrightarrow$. می‌توانیم آن را در دو بخش بنویسیم.

بااین‌حال، بیایید تأمل کنیم. باید مجددا به سراغ اثبات برویم. در واقع یک راه بهتر وجود دارد. ما با استفاده از یک فهرست طولانی از استلزام‌ها، یک استلزام را اثبات کردیم. باید بپرسیم که "آیا می‌توان همه استلزام‌ها را برعکس کرد و آیا هنوز هم درست هستند؟"

پاسخ مثبت است! آن را برای خودتان بررسی کنید. بنابراین نمی‌خواهیم در پاسخ، "اگر" و "تنها اگر" را جداگانه بررسی کنیم. می‌توانیم تلاش قبلی خود را برای به‌دست آوردن جهت $\Longleftarrow$ نادیده بگیریم. فقط بخش $\Longrightarrow$ را نوشتیم و می‌توانیم همه $\Longrightarrow$ ها را به $\Longleftrightarrow$ تغییر دهیم.

همچنین توجه داشته باشید که اگر بخواهید اثبات را به‌خاطر بسپارید، اینکه هر مرحله را حفظ کنید کار دشواری است، به‌جای عناصر اصلی اثبات را به یاد داشته باشید:

۱) *نماد $\Longleftrightarrow$ یعنی همه جهت ها*

۲) *معادله را به‌شکل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم که ضریب $x^{۲}$ برابر ۱ باشد. یعنی بر a تقسیم می‌کنیم.*

۳) *مربع کامل تشکیل می‌دهیم.*

۴) *برای بازگرداندن حالت ساده شده در (۲) به‌شکل اولیه، جایگزینی را انجام دهید.*

این اصل مطلب است، سایر موارد فقط تبدیل عبارت به‌شکلی ساده‌تر است.

اثبات این که یک مجموعه زیرمجموعه‌ای از دیگری است.

برای اثبات اینکه یک مجموعه زیرمجموعه‌ای از دیگری است از تعریف استفاده می‌کنیم. یعنی $X \subseteq Y$ اگر (و البته، تنها اگر) برای هر $x \in X$ داشته باشیم $y \in Y$.

قضیه ۷.۲۰.

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. دراین‌صورت $A \cap B \subseteq A \cup B$.

برهان. فرض کنید $x \in A \cap B$. پس،

$$\begin{array}{ll} & x \in A \cap B \\ \Longrightarrow & x \in A \text{ و } x \in B, \quad \text{بنا به تعریف } \cap \\ \Longrightarrow & x \in A, \quad \text{بنا به تعریف منطقیِ و}, \\ \Longrightarrow & x \in A \text{ یا } x \in B \quad \text{بنا به تعریف منطقیِ یا}, \\ \Longrightarrow & x \in A \cup B, \quad \text{بنا به تعریف } \cup. \end{array}$$

توجه داشته باشید که یک عضو دلخواه از مجموعه پیشنهادی را انتخاب کردیم و دیدید که به کجا می‌رسد. این یک روش معمول حمله است.

تمرین ۳.۲۰.

مثال نقضی برای گزاره "برای همه مجموعه‌های A و B داریم $A \cap B \subset A \cup B$." پیدا کنید.

اثبات این که دو مجموعه با هم برابر هستند.

دیدیم که چگونه نشان می‌دهیم که یک مجموعه زیرمجموعه‌ای از دیگری است. اکنون می‌خواهیم که بدانیم چطور ثابت کنیم دو مجموعه برابر هستند. یک روش معمول برای انجام این کار داشتن مجموعه‌ای از تساوی‌هاست که این دو را به هم ارتباط دهد.

مثال ۱.۲۰.

فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند. پس،

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

برهان. داریم

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x | x \in A \cap (B \cup C)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ و } x \in B \cup C\} \\ &= \{x | x \in A \text{ و } (x \in B \text{ یا } x \in C)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ و } x \in B) \text{ یا } (x \in A \text{ و } x \in C)\} \\ &= \{x | x \in (A \cap B) \text{ یا } x \in (A \cap C)\} \\ &= \{x | x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

■

در گزاره زیر از روش دیگری استفاده شده است که مشابه ایده‌ای است که نشان می‌دهد، برای دو عدد x و y، $x = y$ اگر و تنها اگر $x \leq y$ و $y \leq x$.

گزاره ۱.۲۰. *فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. پس، $X = Y$ اگر و تنها اگر $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$.*

برهان. اگر $X = Y$، آنگاه X و Y دقیقا عناصر یکسانی دارند. بنابراین اگر $x \in X$ آنگاه $x \in Y$. اما این به سادگی، بنا بر تعریف زیرمجموعه، می‌گوید $X \subseteq Y$. به‌طور مشابه اگر $x \in Y$ آنگاه $x \in X$، بنابراین $Y \subseteq X$.

اینک، برای عکس آن، فرض کنید که $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$. اگر $X \subseteq Y$، آنگاه هر عضوی از X عضوی از Y است. اگر $Y \subseteq X$، آنگاه هر عضوی از Y عضوی از X است. بنابراین X و Y دارای عناصر یکسانی می‌باشند، یعنی $X = Y$. ■

تمرین ۴.۲۰.
با استفاده از فصل ۱۸ *(خواندن اثبات) اثبات را تجزیه و تحلیل کنید. آیا می‌توانید اثبات را بهتر کنید؟*

بنابراین اثبات تساوی دو مجموعه را به این تنزل دادیم که نشان دهیم هر کدام زیرمجموعه دیگری است. این یک ایده بسیار قدرتمند است و به‌طور مرتب در ریاضیات ظاهر می‌شود، پس آن را در جعبه ابزارتان قرار دهید.

تمرین

۱. *با استفاده از روش های فصل ۱۸ (چگونه خواندن یک اثبات) خطاهای اثبات مستقیم زیر را بیابید:*
اگر n زوج باشد، آنگاه $۲^n - ۱$ اول نیست.
"اثبات:" عدد n زوج است $\Longleftarrow$ برای یک عدد طبیعی k، $n = ۲k$.

$$\Longrightarrow ۲^n - ۱ = ۲^{۲k} - ۱ = (۲^k)^۲ - ۱ = (۲^k - ۱)(۲^k + ۱).$$

بنابراین، $۲^n - ۱$ را می‌توان به‌شکل حاصل‌ضرب دو عدد نوشت، لذا نمی‌تواند اول باشد.

۲. *نشان دهید مجموع دو عدد فرد متوالی مضربی از ۴ است. عکس آن چیست؟ آیا آن نیز درست است؟*

۳. *نشان دهید هر عدد صحیح xی که آخرین رقم آن ۵ باشد مضربی از ۵ است. آیا عکس آن درست است؟*

۴. *فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابعی بین مجموعه‌های X و Y باشد. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. موارد زیر را اثبات کنید:*

(آ) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(ب) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. *مثال نقضی برای گزاره* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *بیابید و مثالی بسازید که نشان دهد گاهی اوقات ممکن است این تساوی برقرار باشد.*

۵. *تعریف متمم یک مجموعه را از فصل ۱ به‌خاطر بیاورید. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. موارد زیر را اثبات یا رد کنید.*

(آ) $(A^c)^c = A$.

(ب) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(ج) $A \cap B = A \setminus (A \cap B^c)$.

(د) $AB = A \setminus (A \cap B)$.

۶. *ثابت کنید که*

(آ) $A \cap (B \cup C) \subseteq B \cup (A \cap C)$.

(ب) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(ج) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$، *آیا در حقیقت این مجموعه‌ها برابرند؟*

۷. *فرض کنید x و y اعداد گویایی باشند به‌طوری‌که $x < y$. ثابت کنید عدد $z \in \mathbb{Q}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x < z < y$. یعنی بین هر دو عدد گویا عدد گویای دیگری وجود دارد.*

ترکیب و نفی گزاره‌ها از فصل اول را به یاد آورید، و برای اثبات چیزی که وجود دارد سعی کنید آن را از روی چیزهایی که می‌شناسید بسازید، یعنی z را از روی x و y بسازید.

۸. *هم‌ارز بودن گزاره‌های زیر را برای زیرمجموعه‌های A و B از X اثبات کنید.*

(آ) $A \subseteq B$.

(ب) $A \cap B^c = \emptyset$.

(ج) $A^c \cup B = X$.

۹. *ثابت کنید گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.*

(آ) *وجود دارد x منحصربه‌فردی به‌طوری‌که، $P(x)$ درست است.*

(ب) $\exists x\ (P(x)$ و $\forall y\ (P(y) \Longrightarrow y = x))$.

(ج) وجود دارد x به‌طوری‌که به ازای هر y، $P(y)$ درست است اگر و تنها اگر $x = y$.

(د) $\exists x\ P(x)$ و $\forall y, z\ ((P(y)$ و $P(z)) \Longrightarrow y = z)$.

۱۰. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ آرایشی از اعداد $1, 2, \ldots, n$ باشند. (برای مثال اگر $n = 6$ می‌توانیم داشته باشیم: $5, 2, 1, 6, 3, 4$.) ثابت کنید اگر n فرد باشد، آنگاه $(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_3 - 3)\ldots(x_n - n)$ زوج است.

۱۱. فرض کنید x یک عدد باشد. ثابت کنید x^n فرد است اگر و تنها اگر x فرد باشد. (راهنمایی: یک جهت آن را با استفاده از عکس نقیض و جهت دیگر را با استفاده از قضیه دو جمله‌ای اثبات کنید.)

چکیده

- در روش مستقیم، برای اثبات $A \Longrightarrow B$، فرض می‌کنیم A برقرار است و ادامه می دهیم تا B به‌دست آید.
- می‌توانیم $x = y$ را به یکی از روش‌های زیر اثبات کنیم.

(۱) طرف پیچیده‌تر را انتخاب کنیم و آن را ساده کنیم تا به طرف دیگر برسیم؛
(۲) $x - y = 0$؛
(۳) $x \leq y$ و $y \leq x$؛
(۴) $x = z$ و $y = z$.

- برای اثبات $X \subseteq Y$: فرض می‌کنیم $x \in X$ و ادامه می‌دهیم تا اینکه نشان دهیم $x \in Y$.
- برای اثبات تساوی دو مجموعه X و Y:

(۱) از رشته‌ای از تساوی‌ها استفاده کنید، یا
(۲) ثابت کنید $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$.

- برای اثبات "$A \Longleftrightarrow B$"، نشان دهید "$A \Longrightarrow B$" و "$A \Longleftarrow B$".
- چکیده ای از چکیده:

(۱) تساوی $x = y$ با $x - y = 0$ هم‌ارز است،
(۲) تساوی $x = y$ با $x \leq y$ و $y \leq x$ هم‌ارز است،
(۳) تساوی $X = Y$ با $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$ هم‌ارز است،
(۴) تساوی "$A \Longleftrightarrow B$" با "$A \Longrightarrow B$" و "$A \Longleftarrow B$" هم‌ارز است.

فصل ۲۱
برخی اشتباهات معمول

خطا کار انسان است. برای پایان دادن به آن رایانه بخرید.

"آنون"

احتمالا روش اثبات مستقیم یکی از بنیادی‌ترین روش‌ها است و در روش‌های دیگر نیز استفاده خواهد شد. بااین‌وجود، چند مشکل وجود دارد که ممکن است به آسانی گرفتار آن‌ها شویم. دو مورد از رایج‌ترین آن‌ها، **درست فرض‌کردن چیزی که باید اثبات شود و استفاده نادرست از هم‌ارزی‌ها است.** باید آن‌ها را در این فصل بررسی کنیم. بهتر است به‌جای پخش اشتباهات رایج در سرتاسر کتابی که شامل اشتباهات دیگری نیز هست؛ همه را در یک فصل جمع آوری کنیم. همچنین توضیحی درمورد اینکه چرا نمی‌توانیم بر صفر تقسیم کنیم آورده شده است ، اشتباهی که احتمالا قبلا نیز درمورد آن اطلاع داشتید، اما ممکن است دلیلی برای آن نداشته باشید. من تمام این اشتباهات را دیده‌ام، و مانند بسیاری از ریاضی‌دانان چنین اشتباهاتی را انجام داده‌ام.

- **آنچه را باید اثبات کنید درست فرض نکنید.**

احتمالا رایج‌ترین اشتباه در اثبات‌ها درست فرض‌کردن چیزی است که باید اثبات شود. فرض کنید که مجبوریم گزاره P را اثبات کنیم. اگر فرض کنیم درست است، آنگاه اینکه بتوانیم آن را اثبات کنیم جای تعجبی ندارد؛ به نظر می‌رسد گزاره $P \Longrightarrow P$ به‌وضوح درست است. خطایی دیگر در این روش این است که P درست فرض شده و از آن برای اثبات درستی چیز دیگری استفاده شده باشد؛ بنابراین نتیجه‌گیری می‌شود که P درست است. البته این یک استدلال نادرست است. (این می‌گوید $P \Longrightarrow Q$، اما Q درست است، پس P درست است.)
به‌عنوان‌مثال، گزاره زیر را در نظر بگیرید:

" اگر a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$."

یک اثبات سفسطه‌آمیز چنین است: " داریم

$$a^۲ + b^۲ \geq ۲ab \Longrightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰ \Longrightarrow (a-b)^۲ \geq ۰.$$

باتوجه‌به اینکه مربع هر عدد حقیقی نامنفی است، پس نامساوی آخر درست است. بنابراین $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$."
خطای موجود در این اثبات این است که نتیجه‌ای (که باید در گزاره ثابت شود) درست فرض شده است. (یعنی، $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$) و منجر به چیزی شده است که می‌دانیم درست است. بااین‌حال، صرف اینکه یک حقیقت شناخته شده حاصل شده است، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که گزاره درست است.
گزاره درست "$۱ = ۱ \Longrightarrow -۱ = ۱$" که در صفحه ۸۲ بحث کردیم را در نظر بگیرید. بخشی از گزاره تساوی "$۱ = ۱$" را بیان می‌کند که درست است ولی بدیهی است که نمی توانیم از "$۱ = ۱$" چنین نتیجه‌گیری کنیم که "$-۱ = ۱$".

اثبات واقعی درست عکس این استدلال است؛ با $(a-b)^2 \geq 0$ شروع کنید، چیزی که می‌دانیم درست است، کار را با معکوس کردن جهت استلزام‌های بالا ادامه می‌دهیم تا نتیجه حاصل شود. سعی کنید آن را انجام دهید و ببینید!

- **فرض درست بودن آنچه باید اثبات شود بعد از یافتن روش اثبات!**

حال یک توصیه واقعا گیج‌کننده ارائه می‌دهیم. قبلا گفتم که در هنگام اثبات یک گزاره چیزی که باید ثابت شود را درست فرض نکنید. بااین‌وجود، هنگامی که مشکل حل شد، یعنی اثبات پیدا شد، می‌توان آنچه را باید ثابت شود درست فرض کرد. نمونه‌هایی از این موارد را بارهاوبارها در فصل قبل دیده‌ایم.

این راهبرد اغلب مسئله را باز می‌کند و به ما اجازه می‌دهد که اثبات را پیدا کنیم. در مثال بالا دیدیم که نتیجه $a^2+b^2 \geq 2ab$ درست فرض شد و منجر به چیزی شد که می‌دانیم درست است، یعنی، $(a-b)^2 \geq 0$. خوشبختانه، در این مورد (ممکن است در موارد دیگر درست نباشد) می‌توان همه فلش‌ها را معکوس کرد و از $(a-b)^2 \geq 0$ به $a^2+b^2 \geq 2ab$ رسید.

بنابراین هنگام حل مسئله، به‌عنوان یک ابزار اکتشافی می‌توان آنچه را که باید اثبات شود درست فرض کرد تا ببینیم به چه چیزی منجر می‌شود، اما زمان نوشتن نسخه نهایی اثبات، چنین چیزی درست نیست.

- **ریشه دوم یک تابع است، بنابراین تنها یک مقدار به ما می‌دهد.**

به بیان دقیق‌تر این اشتباه منطقی نیست، اما از آنجا که بسیاری از دانشجویان از معنی واقعی علامت ریشه دوم بی‌اطلاع هستند خطایی منطقی را سبب می‌شوند.

اینکه طوری تدریس شود که ریشه دوم یک عدد، دو عدد به ما بدهد چیزی کاملا رایج است: یکی مثبت و دیگری منفی. در حقیقت این درست نیست. اگر $\sqrt{\ }$ یک تابع باشد، پس، بنا به تعریف تابع، هر ورودی تنها یک خروجی دارد. بنابراین $\sqrt{4} = 2$ نه اینکه $\sqrt{4} = \pm 2$. لذا، برای حل معادله $x^2 - 4 = 0$ می‌گوییم "آن را مرتب می‌کنیم تا $x = \pm\sqrt{4}$ به‌دست آید، بنابراین $x = 2$ یا $x = -2$." نه "$x = \sqrt{4}$، بنابراین $x = 2$ یا $x = -2$."

اگر ریشه دوم تابع نیست، پس چه چیزی است؟ از دیدگاه عملی: اگر یک تابع نیست، پس چگونه می‌خواهیم از آن مشتق بگیریم؟ همچنین، اگر واقعا به این فکر می‌کنیم که دو عدد باید بیرون بیایند، پس چرا در فصل قبل در فرمول حل معادله درجه دوم یعنی، $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$، از نماد $\pm$ استفاده کردیم؟ زیرا اگر تصمیم گرفتیم که تابع ریشه دوم، دو مقدار می‌دهد، پس کافی است بنویسیم $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و این رابطه دو جواب ارائه می‌دهد.

به‌طور خلاصه، همواره ریشه دومی از a را انتخاب کنید که جواب مثبت معادله $x^2 = a$ باشد. (و توجه کنید که جواب‌های معادله $x^2 = a$ عبارتند از $x = \pm\sqrt{a}$.)

- **مشکلی دیگر با ریشه های دوم**

ریشه‌های دوم باعث مشکلات زیادی می‌شوند. بخشی از این به دلیل روانشناسی است (به دلیل بالا) و بخشی از آن به این دلیل است که اغلب در تمرین‌ها برای نزدیک شدن به پاسخ، ریشه‌های دوم را حذف می‌کنیم. یک اشتباه رایج به شرح زیر است: اگر داشته باشیم $\sqrt{x^2+y^2} - 2x = 4$، آنگاه نمی‌توانیم فقط هر جمله را به توان دو برسانیم تا $x^2+y^2+4x = 16$، را به‌دست آوریم. برای درک چرایی آن، توجه کنید که چنین ادعا شده است که $a+b=c \Longrightarrow a^2+b^2=c^2$. به راحتی می توانیم یک مثال نقض برای آن ارائه دهیم.

- **از استلزام‌ها درست استفاده کنید.**

وقتی معادلات را حل می‌کنیم، از یک مرحله به مرحله بعد می‌رویم به‌این‌ترتیب که نشان می‌دهیم اولی دومی را نتیجه می‌دهد. بااین‌وجود، مهم است بررسی شود که آیا دومی اولی را نتیجه می‌دهد. آنچه که می‌خواهیم انجام دهیم، دنباله‌ای از معادلات هم‌ارز است که همه جواب‌ها را (البته نه بیشتر از آن) پیدا کنیم. معادله زیر و راه‌حل آن باید این نکته را روشن

کند:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+۳} &= x+۱\\ x+۳ &= (x+۱)^۲, \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}\\ x+۳ &= x^۲+۲x+۱\\ ۰ &= x^۲+x-۲\\ ۰ &= (x+۲)(x-۱).\end{aligned}$$

بنابراین جواب‌ها عبارتند از $x=۱$ و $x=-۲$. جایگزینی $x=۱$ در معادله اصلی نشان می‌دهد که پاسخ درست است. اما اگر $x=-۲$ را در معادله جایگزین کنیم، داریم $\sqrt{-۲+۳}=-۲+۱$، یعنی، $\sqrt{۱}=-۱$. بنابراین $x=-۲$ جواب معادله نیست (از عمل ریشه دوم گرفتن درست استفاده کردیم!). این مشکل به این دلیل به‌وجود می‌آید که اگر معادله $f(x)=g(x)$ را به توان دو برسانیم و سپس آن را حل کنیم جواب‌های معادله $f(x)=-g(x)$ نیز به‌دست می آید.

استفاده دقیق از جهت استلزام‌ها، راه حل را روشن می کند:

$$\begin{aligned}&\sqrt{x+۳} = x+۱\\ \Longrightarrow\quad & x+۳ = (x+۱)^۲, \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}\\ \Longleftrightarrow\quad & x+۳ = x^۲+۲x+۱\\ \Longleftrightarrow\quad & ۰ = x^۲+x-۲\\ \Longleftrightarrow\quad & ۰ = (x+۲)(x-۱).\end{aligned}$$

اولین استلزام برگشت پذیر نیست (زیرا $a^۲=b^۲$، $a=b$ را نتیجه نمی‌دهد بلکه نتیجه آن $a=\pm b$ می‌باشد.) و بنابراین می‌دانیم که ممکن است در پایان جواب‌های بسیاری داشته باشیم.

همچنین نشان می‌دهد که استفاده صحیح از علامت "نتیجه می‌دهد که" چقدر اهمیت دارد. این مورد در صفحه ۴۶ ذکر شده است.

- **بر صفر تقسیم نکنید یا چرا $\frac{۱}{۰}$ همان ∞ نیست؟**

اشتباه معمول بعدی نیز یک اشتباه منطقی نیست. اگرچه می‌توان با استفاده از منطق نشان داد که چرا نباید مرتکب این اشتباه شویم. احتمالا تاکنون به‌عنوان‌مثالی برای تشریح تقسیم نکردن بر صفر، اثباتی از ۱=۲ دیده باشید. ممکن است چنین عملی از نظر پنهان بماند، پس مراقب باشید!

یک استدلال به شرح زیر است: فرض کنید $a=b$. آنگاه،

$$\begin{aligned}ab &= a^۲, \quad \text{چون } a=b\\ \Longrightarrow ab-b^۲ &= a^۲-b^۲, \quad \text{با کم کردن } b^۲ \text{ از طرفین}\\ \Longrightarrow b(a-b) &= (a-b)(a+b)\\ \Longrightarrow b &= a+b, \quad \text{با تقسیم طرفین بر } a-b\\ \Longrightarrow b &= ۲b, \quad \text{چون } a=b\\ \Longrightarrow ۱ &= ۲.\end{aligned}$$

وقتی که بر $a-b$ تقسیم می‌کنیم، تقسیم بر صفر پیش می‌آید . چون فرض کردیم $a=b$، پس باید $a-b$ صفر باشد. استدلال غلط است.

این سوال مطرح می‌شود که "چرا نمی‌توانیم بر صفر تقسیم کنیم؟" اجازه دهید به سوال دیگری پاسخ دهیم. فرض کنید بتوانیم بر ۰ تقسیم کنیم. آنگاه " وقتی بر صفر تقسیم می‌کنیم چه چیزی به‌دست می‌آوریم؟" به‌عنوان مثال، $\frac{۱}{۰}$ چیست؟ می‌توانیم به‌صورت زیر شرح دهیم:

به $\frac{1}{x}$ نگاه کنید و فرض کنید که x کوچکتر و کوچکتر شود. می‌بینید که با کوچکتر شدن x، $\frac{1}{x}$ بزرگتر می‌شود. بنابراین می‌توانیم $\frac{1}{0}$ را "بی‌نهایت" تعریف کنیم.

ریاضی‌دانان "بی‌نهایت" را با ∞ نشان می‌دهند، بنابراین ادعا می‌کنیم که $\frac{1}{0} = \infty$ که در ابتدا خوب به نظر می‌رسد. بعد از همه این‌ها، می‌بینیم که $\frac{2}{0}$ باید $\frac{2}{0} = 2 \times \left(\frac{1}{0}\right) = 2 \times \infty = \infty$ باشد. یعنی چنین احساس می‌کنید که ۲ برابر بی‌نهایت با بی‌نهایت یکی است، آیا اینطور نیست؟

مشکل زمانی رخ می‌دهد که ما $0 \times \frac{1}{0}$ را در نظر بگیریم. صفر برابر هر چیزی باید صفر باشد، بنابراین

$$0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty = 0.$$

از آنجا که اگر صفر تا بی‌نهایت داشته باشیم، می‌گوییم هیچ بی‌نهایتی نداریم، بنابراین باید پاسخ صفر باشد. از سوی دیگر، یکی از قوانین محاسباتی، قاعده حذف می‌باشد: $a \times \left(\frac{b}{a}\right) = b$ بنابراین باید داشته باشیم:

$$0 \times \frac{1}{0} = 1.$$

پس، با ترکیب این دو نتیجه داریم

$$0 = 0 \times \frac{1}{0} = 1.$$

به‌عبارتِ‌دیگر، با اجازه دادن به تقسیم کردن بر صفر به‌طور واضح یک تساوی نادرست را تولید می‌کنیم یعنی $0 = 1$.

نکته در این است که اگر اجازه تقسیم بر صفر داشته باشیم، نمی‌توانیم هر دو عبارت ، به ازای هر xی $x \times 0 = x$ و به ازای هر a و bی $a \times \left(\frac{b}{a}\right) = b$ را داشته باشیم. متأسفم، اما واقعیت دارد. بنابراین اگر یک $\frac{x}{0}$ مقدار داشته باشد (حتی اگر آن مقدار ∞ باشد) سریعا در محاصره قرار می‌گیریم.

ما نیز مانند ریاضی‌دانان می‌توانیم قوانینی را که می‌خواهیم انتخاب کنیم. البته همه انتخاب‌ها منجر به نظریه مفیدی نمی‌شوند. در واقع، می‌توانید نظریه‌ای ارائه دهید که $\frac{1}{0}$ را به‌عنوان ∞ تعریف کند، اما پس از آن باید قوانین مفیدی مانند $a \times \left(\frac{b}{a}\right) = b$ را از دست بدهید.

درمورد بی‌نهایت، نباید آن را به‌عنوان یک عدد، و به همین ترتیب به‌عنوان موضوع قواعد جبری در نظر گرفت، اما می‌توان آن را به‌عنوان یک مفهوم در نظر گرفت. درمورد بی‌نهایت در فصل ۳۰، بیشتر خواهیم گفت.

- **عدد $-x$ همواره منفی نیست!**

این یک اشتباه روانشناختی جالب است. فرض کنید x یک عدد صحیح باشد. تعجب آور است که برخی از افراد از این "واقعیت" برای اثبات اینکه $-x$ منفی است استفاده می‌کنند.

به آسانی می‌توان دید که این نادرست است. هر عدد صحیح منفی را در نظر بگیرید، مثلا -3، لذا $-x = -(-3) = 3$ حاصل عددی مثبت است.

مسئله این است که از نظر روانشناختی با دیدن علامت منفی مغزمان به‌طور خودکار فرض می‌کند که عدد باید منفی باشد.[1] بنابراین $-x < 0$ لزوما درست نیست!

- **منفی‌سازی و نامساوی‌ها**

این فرضیه روانشناختی طبیعی که تمام اعداد نامشخص مثبت‌اند، هنگام مواجهه با نامساوی‌ها مشکلاتی ایجاد می‌کند.

به‌عنوان‌مثال، اگر $5 < \frac{1}{x}$، سپس تجدید آرایش آن به‌شکل $x < \frac{1}{5}$ طبیعی به نظر می‌رسد. در هنگام مواجهه با تساوی‌ها اغلب بدون اندیشیدن، عبارات را از سمتی به سمت دیگر منتقل می‌کنیم. اما برای نامساوی‌ها باید مراقب باشیم. فرض کنید در بالا $x = -2$. لذا $5 < \frac{1}{-2} = \frac{1}{x}$ درست است اما $x = -2 < \frac{1}{5}$ درست نیست. پس جابه‌جایی آخر اشتباه بود.

[1] همچنین، اغلب به کودکان چنین تدریس می شود که $-x$ را به‌عنوان " منفی x" تلفظ کنند.

به دلیل استفاده از این ایده که می‌توان طرفین نامساوی را در x ضرب کرد اشتباه رخ می‌دهد. اگر دو طرف یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب کنیم جهت نامساوی تغییر می‌کند.

بنابراین اگر $x > 0$، آنگاه $\frac{1}{x} < 5$ به $x > \frac{1}{5}$ تبدیل می‌شود و اگر $x < 0$ به $x < \frac{1}{5}$ تبدیل می‌شود. این فرایند شکستن به موارد مختلف در فصل بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تمرین

۱. اشتباه استدلال زیر چیست؟ " داریم

$$۲ = ۴ \Longrightarrow ۲\pi = ۴\pi \Longrightarrow \sin ۲\pi = \sin ۴\pi \Longrightarrow ۰ = ۰.$$

بنابراین ۴ = ۲.“ کدام یک از استلزام‌ها برگشت‌پذیر نیست؟

۲. قضیه زیر را در نظر بگیرید:
برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، عدد $n^۲ + ۵n + ۶$ اول نیست. اشتباه استدلال‌های زیر را بیابید.

(آ) برای $n = ۲$ داریم $n^۲ + ۵n + ۶ = ۲^۲ + ۵ \times ۲ + ۶ = ۲۰$ که اول نیست. بنابراین قضیه درست است.

(ب) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد، به‌طور خاص $n > ۰$. اگر $n^۲ + ۵n + ۶$ اول نباشد، آنگاه به ازای بعضی اعداد طبیعی p و q داریم $n^۲ + ۵n + ۶ = pq$ به‌طوری‌که $۰ < p < n^۲ + ۵n + ۶$ و $۰ < q < n^۲ + ۵n + ۶$.
چون $n^۲ + ۵n + ۶ = pq$ و p و q مساوی ۱ یا $n^۲ + ۵n + ۶$ نیست، لذا $n^۲ + ۵n + ۶$ اول نیست، که نشان داده شد.

۳. اشتباه اثبات زیر درمورد اینکه مجموع دو عدد گویا، عددی گویا است را بیابید. فرض کنید اعداد m و n گویا باشند، پس می‌توان نوشت $m = \frac{p}{q}$ و $n = \frac{r}{s}$ که p، q، r و s اعداد صحیح هستند (q و s غیر صفر می‌باشند).
آنگاه

$$m + n = \frac{p}{q} + \frac{r}{s}.$$

چون مجموع دو کسر نیز یک کسر می‌باشد، پس $m + n$ نیز باید یک کسر باشد. لذا $m + n$ گویا است.

۴. در متن بالا اثباتی ارائه شد که ما نمی‌توانیم $\frac{۱}{۰}$ را ∞ تعریف کنیم. بااین‌وجود، شاید بتوانیم آن را از واقعیت دیگری نتیجه بگیریم!

همه ما می‌توانیم با $۰ = \frac{۱}{\infty}$ موافق باشیم. زیرا اگر a به ∞ نزدیک شود آنگاه $\frac{۱}{a}$ به صفر نزدیک می‌شود. حال فرض کنید به ازای xی $x = \frac{۱}{۰}$ آنگاه، $x = \frac{۱}{\frac{۱}{\infty}}$. چون برای تمام yها

$y = \frac{۱}{\frac{۱}{y}}$ پس باید داشته باشیم $x = \infty$. یعنی، $\frac{۱}{۰} = \infty$.
همه اشتباهات این استدلال را بیابید.

۵. این خطای دیگری است که انجام می‌شود. این خطا چیست؟

در زیر گزاره $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \left((y + ۱)x^۲ = \frac{۱+y}{y^۴}\right)$ اثبات شده است.

فرض کنید $x = \frac{۱}{y^۲}$، آنگاه

$$(y + ۱)x^۲ = (y + ۱)\left(\frac{۱}{y^۲}\right)^۲ = \frac{y+۱}{y^۴} = \frac{۱+y}{y^۴}.$$

۶. برای اشتباهات رایج در منطق ریاضی نام‌های خیالی وجود دارد. مشخص کنید عبارت‌های ”انکار فرض“ و ”نیاز مسئله“ چه چیزی هستند.

چکیده

- آنچه را باید اثبات کنید درست فرض نکنید.
- ریشه دوم یک تابع است.
- ریشه دوم a جوابی مثبت از معادله $x^{2} = a$ می‌باشد.
- $\frac{1}{0}$ برابر ∞ نیست.
- ممکن است $-x$ منفی نباشد.
- در برخورد با نامساوی‌ها و اعداد منفی مراقب باشید.

فصل ۲۲

روش اثبات ۲: اثبات با حالات

شگردها را کم کم انجام دهید.

"افسانه ایسپ: کلاغ و کوزه آب"

قبلا دیده‌ایم که با اثبات $y \geq x$ و $y \leq x$ می‌توان $x = y$ را اثبات کرد. به‌عبارت‌دیگر این مسئله را به دو حالت تقسیم کرده‌ایم، این روش در ریاضیات بسیار رایج است. اغلب می‌توان برخی از مسئله‌ها را به حالت‌های مختلف تقسیم‌بندی و هر مورد را به‌صورت جداگانه و با استفاده از روش‌های مختلف یا حتی همه موارد را با روشی یکسان حل کرد.

مسئله مشهور چهار رنگ این است که برای رنگ کردن یک نقشه (از نوع جغرافیایی) به‌طوری‌که هیچ دو کشور هم‌مرزی هم‌رنگ نباشند تنها به چهار رنگ نیاز است. اثبات این قضیه شامل استفاده از این نظریه است که مسئله را به تعداد محدودی از انواع نقشه‌ها تقسیم کنیم. درصورتی که حدود یک هزار نوع از این نقشه‌ها وجود دارد، برای بررسی اینکه همه می‌توانند با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی شوند باید از یک کامپیوتر استفاده کنیم.

مثال‌هایی از حالت‌ها

مثال ۱.۲۲.

به ازای هر عدد $n \in \mathbb{Z}$، عدد $n^۲ + ۳n + ۷$ فرد است.

این را می‌توان به دو حالت تقسیم کرد: (آ) عدد n زوج و (ب) عدد n فرد است.

اگر n زوج باشد، آنگاه بنا بر تعریف عدد زوج، عدد صحیحی چون k وجود دارد که $n = ۲k$. بنابراین

$$\begin{aligned} n^۲ + ۳n + ۷ &= (۲k)^۲ + ۳(۲k) + ۷ \\ &= ۴k^۲ + ۶k + ۷ \\ &= ۲(k^۲ + ۳k + ۳) + ۱. \end{aligned}$$

لذا وقتی n زوج باشد، عبارت $n^۲ + ۳n + ۷$ فرد است.

حال برای حالت دیگر، اگر n فرد باشد، آنگاه به ازای یک عدد صحیح k،

$n = ۲k + ۱$. لذا

$$\begin{aligned} n^۲ + ۳n + ۷ &= (۲k + ۱)^۲ + ۳(۲k + ۱) + ۷ \\ &= ۴k^۲ + ۱۰k + ۱۱ \\ &= ۲(k^۲ + ۵k + ۵) + ۱. \end{aligned}$$

این نیز فرد است. بنابراین به ازای هر عدد صحیح n، عبارت $n^۲ + ۳n + ۷$ فرد است.

توجه ۱.۲۲.

همین‌طور که می‌بینید **روش حالت‌ها** *همه احتمالات خسته‌کننده را شامل می‌شود، ازاین‌رو گاهی آن را روش* **فرسایشی** *می‌نامند.*

مثال ۲.۲۲.

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $n^۳ - n$ مضربی از ۳ است (در فصل ۲۴ روش دیگری برای اثبات این مطلب خواهیم دید: روش استقرا.)

به ازای عدد $k \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$ عدد n را به‌شکل $n = ۳k + r$ می‌نویسیم که r برابر ۰، ۱ و یا ۲ است. (این واضح است، اما در فصل ۲۸ ثابت خواهد شد.) آنچه باید انجام دهیم این است که برای سه حالت $r = ۰$، $r = ۱$ و $r = ۲$ نشان دهیم گزاره درست است.

حالت اول: $r = ۰$. *در این حالت،* $n = ۳k$. *پس*

$$n^۳ - n = (۳k)^۳ - ۳k = ۲۷k^۳ - ۳k = ۳(۹k^۳ - ۳k).$$

بنابراین، $n^۳ - n$ مضربی از ۳ است.

حالت دوم: $r = ۱$. *در این حالت،* $n = ۳k + ۱$. *سپس*

$$\begin{aligned} n^۳ - n &= (۳k + ۱)^۳ - (۳k + ۱) \\ &= ۲۷k^۳ + ۲۷k^۲ + ۶k \\ &= ۳(۹k^۳ + ۹k^۲ + ۲k). \end{aligned}$$

لذا، $n^۳ - n$ مضربی از ۳ است.

حالت سوم: $r = ۲$. *در این‌جا،* $n = ۳k + ۲$. *بنابراین*

$$\begin{aligned} n^۳ - n &= (۳k + ۲)^۳ - (۳k + ۲) \\ &= ۲۷k^۳ + ۵۴k^۲ + ۳۳k + ۶ \\ &= ۳(۹k^۳ + ۱۸k^۲ + ۱۱k + ۲). \end{aligned}$$

دوباره، $n^۳ - n$ مضربی از ۳ است.

تمرین ۱.۲۲.

با محاسبه شکل کلی $n^۳ - n = (۳k + r)^۳ - (۳k + r)$ و جایگزینی $r = ۰, ۱, ۲$ اثبات را ساده‌تر کنید.

تابع قدر مطلق

در تعریف‌ها نیز می‌توان از حالت‌ها استفاده کرد. یکی از توابع مهم در ریاضیات تابع قدرمطلق است. می‌توان آن را با استفاده از حالت‌ها تعریف کرد.

قدرمطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نشان می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x|:=\begin{cases}x, & x\geq \circ \text{ برای},\\ -x, & x<\circ \text{ برای}.\end{cases}$$

در این‌جا دو حالت داریم، یکی برای xهای بزرگتر یا مساوی با ۰ و دیگری برای وقتی که کوچکتر از ۰ هستند. نکته در این است که ما علامت منفی را درصورت‌وجود حذف کرده‌ایم. تعریف را می‌توان به‌صورت $|x|=\sqrt{x^{2}}$ نیز ارائه کرد. (فراموش نکنید که ریشه دوم یک عدد همواره مثبت است.)

مثال ۳.۲۲.

۱) $|3|=3$،

۲) $|-3|=3$،

۳) $|-\frac{5}{2}|=\frac{5}{2}$،

۴) $|\pi|=\pi$،

۵) $|0|=0$.

قضیه نامساوی مثلث در بسیاری از شاخه‌های ریاضی، قضیه‌ای فوق‌العاده مفید است.

قضیه ۱.۲۲.

(قضیه نامساوی مثلث)
فرض کنید $x,y\in\mathbb{R}$. *پس*

$$|x+y|\leq|x|+|y|.$$

برهان. از آنجا که تابع قدرمطلق با استفاده از حالت‌ها تعریف شد و به علامت متغییر وابسته است، پس تعجبی ندارد که در اثبات، حالت‌ها به این بستگی دارند که علامت x و y هر دو مثبت یا هر دو منفی و یا مختلف‌العلامه باشند.

حالت اول: فرض کنید $x\geq 0$ و $y\geq 0$. پس $x+y\geq 0$، و

$$|x+y|=x+y=|x|+|y|.$$

بنابراین در این حالت گزاره برقرار است.

حالت دوم : فرض کنید $x<0$ و $y<0$. (و لذا $|x|=-x$ و $|y|=-y$. این را بررسی کنید.) لذا $x+y<0$، پس،

$$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)=|x|+|y|.$$

و درنتیجه گزاره برقرار است.

حالت سوم : فرض کنید یکی از متغیرهای x و y مثبت و دیگری منفی باشد. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $x\geq 0$ و $y<0$. این به دو زیر حالت $x+y\geq 0$ و $x+y<0$ منجر می‌شود.

زیر حالت ۱): فرض کنید $x+y\geq 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}|x+y|&=x+y\\&\leq x+(-y)\\&=|x|+|y|.\end{aligned}$$

زیر حالت ۲): فرض کنید $x+y<0$. چون برای $x\geq 0$، $-x\leq x$، داریم:

$$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)\leq x+(-y)=|x|+|y|.$$

لذا گزاره برقرار است. ■

هنگامی که این نامساوی را به اعداد مختلط تعمیم دهیم علت نام‌گذاری نامساوی مثلث برای آن مشخص می‌شود.

اهمیت روش حالت ها در مثال‌های مرزی

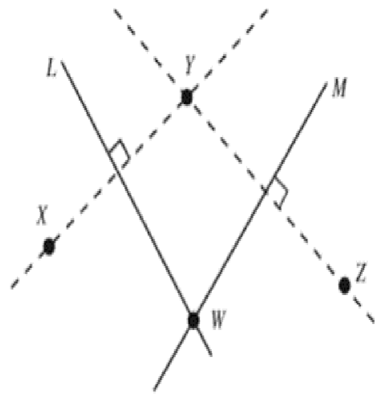
برای بررسی مثال‌های مرزی روش حالت‌ها بسیار مهم است. درحقیقت کمک می‌کند با موارد مرزی مواجه شویم. به‌عنوان‌مثال، اگر در هندسه سه نقطه تصادفی را در یک صفحه انتخاب کنیم، لزوما رئوس یک مثلث را تشکیل نمی‌دهند. همه آن‌ها می‌توانند روی یک خط واقع شوند. باید مراقب چنین مثال‌های مرزی باشیم.

قضیه زیر (در جای خود قضیه خوبی است) و اثبات آن این مطلب را تشریح می‌کند.

قضیه ۲.۲۲.

فرض کنید X، Y و Z نقاطی در صفحه باشند. لذا همه آن‌ها روی یک خط یا روی یک دایره قرار دارند.

برهان. عمودمنصف (صفحه ۱۷۶ را ببینید.) پاره خط بین X و Y را با L و عمودمنصف پاره خط بین Y و Z را با M نشان می‌دهیم. فرض کنید همه نقاط روی یک خط باشند چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت L و M موازی نیستند و باید در نقطه‌ای مانند W یکدیگر را قطع کنند. شکل زیر را ببینید.



چون W روی عمودمنصف L قرار دارد پس از X و Y هم‌فاصله است. (یعنی فاصله W تا X، با فاصله W تا Y، برابر است.) به‌طور مشابه از Y و Z نیز هم‌فاصله می‌باشد. از آنجا که فاصله W تا X ، Y و Z یکسان هستند نتیجه می‌گیریم که سه نقطه روی دایره‌ای به مرکز W و به شعاعی به اندازه فاصله W تا X قرار دارند. ■

تمرین ۲.۲۲.

روش‌های فصل‌های ۱۶ و ۱۸ را روی این قضیه و اثبات آن اعمال کنید.

همان‌طور که می‌توانید در اثبات ببینید ، حالت مرزی که باید مورد بررسی قرار گیرد این است که همه نقاط می‌توانند روی یک خط قرار گیرند بااین‌وجود، وقتی حالت مرزی دیگری را در نظر می‌گیریم، اثبات رد می‌شود. اگر سه نقطه انتخاب شده همگی یکسان باشند یا اگر دو مورد از آن‌ها یکسان باشند چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ (توجه داشته باشید که قضیه نمی‌گوید که نقاط باید مجزا باشند.)

اگر نقاط X و Y یکسان باشند، تعریف عمودمنصف امکان‌پذیر نیست. بنابراین نمی‌توانستیم L را تعریف کنیم. آیا این یک مشکل است؟ آیا قضیه اشتباه است؟

خوشبختانه، خطای موجود در اثبات مهلک نیست و گزاره قضیه نیازی به تغییر ندارد. پس از اولین خط اثبات درمورد برچسب زدن X، Y و Z باید موارد زیر را اضافه کنیم.

” اگر نقاط متمایز نیستند، دو یا چند تا از آن‌ها بر هم منطبق هستند. اگر همه این‌ها منطبق شوند، آنگاه نقاط بر روی تعداد بی‌نهایت خط قرار می‌گیرند که هر خطی که از نقطه عبور کند شرایط کافی را دارد. اگر دو نقطه یکسان باشند، خط منحصربه‌فردی از این نقاط یکسان و نقطه سوم عبور می‌کند. در هر صورت نتیجه‌گیری قضیه درست است و اینک فرض کنید که نقاط متمایز هستند.“

در حقیقت می‌توان گفت: *"اگر نقاط متمایز نباشند، حداقل دو نقطه وجود دارد که بر هم منطبق هستند از این رو، خطی که از این نقطه مشترک و نقطه سوم (احتمالاً غیر متمایز) می‌گذرد نشان می‌دهد که نقاط بر روی یک خط قرار می‌گیرند. حال برای حالتی که نقاط متمایز هستند . . . "*

تمرین

۱. *ثابت کنید که مربع هر عدد صحیح به ازای یک $k \in \mathbb{Z}$ به‌صورت $۳k$ یا $۳k+۱$ است.*

۲. *ثابت کنید که مکعب هر عدد صحیح به ازای یک $k \in \mathbb{Z}$ به‌صورت $۳k$، $۳k+۱$ یا $۳k+۸$ می‌باشد.*

۳. *موارد زیر درباره تابع قدر مطلق را برای $x, y \in \mathbb{R}$ اثبات کنید.*

(آ) $x \le |x|$ و $-x \le |x|$.

(ب) $-y \le x \le y \Longrightarrow (x \le y$ و $-x \le y) \Longrightarrow |x| \le y$.

(ج) $|xy| = |x||y|$.

(د) *برای* $y \neq ۰$، $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

(و) $||x| - |y|| \le |x - y|$.

(ه) $|x| = \sqrt{x^۲}$.

۴. *نشان دهید* $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

۵. *فرض کنید برای سه عدد a، b و c داشته باشیم $a = bc$. ثابت کنید که اگر دو عدد از این سه عدد غیر صفر باشند، آنگاه سومی نیز چنین است.*

۶. *با استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت کنید که برای همه $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$،*

$$\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha = ۱.$$

(به نوعی ، این تنها معادله مربوط به $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ است که بسیار ارزشمند است.)

با استفاده از روش حالت‌ها این معادله را برای همه $\alpha \in \mathbb{R}$ اثبات کنید. (ممکن است مجبور شوید سینوس و کسینوس را برای زوایای بزرگتر از $\frac{\pi}{۲}$ تعریف کنید.)

۷. ***تابع بیشینه*** *$\max(x, y)$ را با $\frac{x+y+|x-y|}{۲}$ تعریف کنید. ثابت کنید که این تابع مقدار بیشینه دو عدد x و y را مشخص می‌کند.*

۸. *تعریفی برای* ***تابع کمینه*** *ارائه دهید و نشان دهید که این تابع کمینه دو عدد را محاسبه می‌کند.*

۹. *این مسئله یکی دیگر از مسائل دارای چالش فکری است. عالی است، زیرا چنین به نظر می‌رسد که اطلاعات کافی برای پاسخ آن نداشته باشیم، و بدتر از آن، چگونه رنگ موی کودک به محاسبه مسئله کمک می‌کند؟*

دو دوست ریاضی‌دان، همدیگر را در خیابان ملاقات می‌کنند. اولی می‌گوید: ”سه پسر شما چند ساله هستند؟ سن آن‌ها را فراموش کرده‌ام. “ دومی می‌گوید: ” حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۳۶ و مجموع سن آن‌ها برابر است با تعداد پنجره‌های خانه‌ای که در آنجا است. اولی لحظه‌ای فکر می‌کند و می‌گوید: نمی‌توانم سن آن‌ها را به‌دست آورم.“ دومی می‌گوید ”اوه فراموش کردم که به شما بگویم پسر بزرگم موهای بوری دارد.“ اولی گفت ”در این حالت، سن پسرانت را می‌دانم.“

آیا می‌توانید سن آن‌ها را به‌دست آورید؟

چکیده

- گاهی وقت‌ها بهتر است که مسئله را به حالت‌های مختلف بشکنیم.
- ممکن است لازم شود که حالت های مرزی مسئله را جداگانه تجزیه و تحلیل کنیم.
- تابع قدرمطلق به‌صورت

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{برای } x \geq 0, \\ -x, & \text{برای } x < 0. \end{cases}$$

تعریف می شود.

- $|x| = \sqrt{x^2}$.
- نامساوی مثلث: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

فصل ۲۳

روش اثبات ۳: تناقض

بیایید هرگز مرتکب اشتباه عامیانه و خیالی "هر زمان رد کردم زیان دیدم" نشویم.

"رالف والدو اِمرسون [۱]"

قانون منع میانه از اینکه یک گزاره درست یا غلط است و بین این دو نمی‌تواند باشد، دفاع می‌کند. می‌توان از روشی دیگر استفاده کرد، فرض کنیم گزاره غلط است و به‌طور منطقی ادامه دهیم تا گزاره‌ای که می‌دانیم غلط است مانند $۱ = ۰$ یا ماه پنیر می‌سازد، را به دست دهد. بنابراین فرض ما، باید غلط باشد، گزاره نمی‌تواند غلط باشد (چرا که آن را به چیزی مضحک منتهی می‌کند) پس گزاره درست است.
این روش، اثبات با تناقض نام دارد. نامش از این حقیقت می‌آید که فرض می‌شود گزاره غلط است سپس با واقعیت‌های دیگر رد می‌شود. این روش به برهان خلف نیز مشهور است.

مثال‌های ساده از اثبات با تناقض

مثال اول تنها برای این است که به شما ایده اثبات با تناقض را نشان دهد. همانطور که در قضیه ۱.۲۰ دیده‌ایم، روش مستقیم برای اثبات گزاره آسان‌تر است.

قضیه ۱.۲۳.
هرگاه n یک عدد صحیح فرد باشد. آنگاه $n^۲$ نیز یک عدد صحیح فرد است.

برهان. خلاف آن را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که n یک عدد صحیح فرد است اما نتیجه غلط است، یعنی $n^۲$ یک عدد صحیح زوج است. چون n فرد است، $n = ۲k + ۱$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$. پس

$$n^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k + ۲k + ۱,$$

که با زوج بودن $n^۲$ تناقض دارد. بنابراین فرض ما که زوج بودن $n^۲$ است باید غلط باشد، یعنی $n^۲$ باید فرد باشد. ■

گزاره بالا به‌شکل $A \Longrightarrow B$ است. در حالت کلی اگر گزاره را غلط فرض کنیم، آنگاه فرض کرده‌ایم که گزاره "نقیض(B) و A" که نقیض گزاره"$(A \Longrightarrow B)$" است، درست می‌باشد، (صفحه ۸۳ را ببینید). برای استفاده از برهان خلف باید نشان دهیم که"نقیض(B) و A"، ما را به چیزی غلط هدایت می‌کند.
مثال دوم، یک مسئله سخت‌تر را حل می‌کند.

---

[۱] رالف والدو اِمرسون $(Ralphl\ Waldo\ Emerson)$ زاده ۱۸۰۲ و درگذشته ۱۸۸۲ فیلسوف و نویسنده آمریکایی بود.

مثال ۱.۲۳.
هیچ x و y صحیح مثبتی وجود ندارد که $x^۲ - y^۲ = ۱$ باشد.

برهان. نقیض آن را فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم که اعداد صحیح مثبتی موجود باشند که $x^۲ - y^۲ = ۱$ باشد. بنابراین داریم: $(x+y)(x-y) = ۱$. باتوجه‌به اینکه x و y صحیح هستند، لذا $x+y$ و $x-y$ نیز صحیح هستند، پس دو حالت داریم:
حالت اول: $x + y = ۱$ و $x - y = ۱$. با حل این دو معادله $x = ۱$ و $y = ۰$ به‌دست می‌آید که با مثبت بودن x و y تناقض دارد. حالت دوم باقی می‌ماند.
حالت دوم: $x + y = -۱$ و $x - y = -۱$. حل این‌ها، $x = -$ و $y = ۰$ را به‌دست می‌دهد، دوباره با مثبت بودن آن‌ها تناقض دارد. ■

همان‌طور که می‌بینید، گزاره

$$\text{“}\nexists x, y \in \mathbb{N} \quad (x^۲ - y^۲ = ۱)\text{”}$$

بود. فرض شد که نتیجه غلط است، به‌عبارت‌دیگر، نقیض آن

$$\text{“}\exists x, y \in \mathbb{N} \quad (x^۲ - y^۲ = ۱)\text{”}$$

درست است.

مثال ۲.۲۳.
مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اگر گزاره را به‌طور روشن به‌شکل یک استلزام بنویسیم می‌توان آن را بهتر دید. به‌عبارت‌دیگر: ”اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $y + x$ گنگ است.“ با استفاده از این حقیقت که نقیض ”$A \implies B$“ ”نقیض (B) و A“ است، فرض می‌کنیم که x گویاست، y گنگ است و $y + x$ گنگ نیست، همگی درست باشند.

برهان. فرض کنیم خلافش درست باشد، یعنی x گویا، y گنگ و $x + y$ گویا باشد. باتوجه‌به اینکه x گویاست پس به ازای اعداد صحیحی چون p و q، $x = \dfrac{p}{q}$ است. به‌طور مشابه گویا بودن $x + y$، نتیجه می‌دهد که به ازای اعداد صحیحی چون r و s، $x + y = \dfrac{r}{s}$ است. می‌بینیم:

$$\begin{aligned}
&x + y = \frac{r}{s} \\
&\implies \frac{p}{q} + y = \frac{r}{s} \\
&\implies y = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \\
&\implies y = \frac{rq - ps}{qs},
\end{aligned}$$

اما $\dfrac{rq - ps}{qs} \in \mathbb{Q}$ است که با گنگ بودن y تناقض دارد. پس گزاره درست است. ■

تمرین ۱.۲۳.
گزاره ”حاصل‌ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، یک عدد گنگ است.“ را در نظر بگیرید. گزاره را اثبات کنید یا یک مثال نقض بزنید. اگر مثال نقضی بیاورید، آیا می‌توانید با اندکی تغییر در گزاره، یک گزاره درست داشته باشید؟

مثال ۳.۲۳.
معادله $x^۷ + ۳x^۳ + ۵$ ریشه گویا ندارد.

خلافش را فرض کنید. یعنی x یک ریشه گویا برای معادله باشد. پس $x = \frac{p}{q}$ که p و q اعداد صحیح هستند و این، ساده شده‌ترین خارج قسمت آن است. (یعنی نمی‌توان صورت و مخرج را به عددی بزرگتر از ۱ تقسیم کرد. آنگاه داریم:

$$(\frac{p}{q})^{7} + 3(\frac{p}{q})^{3} + 5 = 0$$
$$p^{7} + 3p^{3}q^{4} + 5q^{7} = 0.$$

می‌توان بررسی کرد که وقتی p و q، فرد و زوج هستند چه اتفاقی رخ می‌دهد. چهار حالت برای بررسی وجود دارد.
حالت اول: اگر p و q هر دو زوج باشند، آنگاه $\frac{p}{q}$ ساده‌ترین شکل کسر نیست. بنابراین یک تناقض به‌دست آورده‌ایم.
حالت دوم: اگر p و q هر دو فرد باشند، آنگاه طرف چپ معادله $p^{7} + 3p^{3}q^{4} + 5q^{5} = 0$، فرد است. درحالی‌که طرف راست آن زوج است. (این را با استفاده از تمرینی از فصل ۲۰ بررسی کنید.) این یک تناقض است.
حالت سوم: اگر p زوج و q فرد باشد، آنگاه طرف چپ معادله فوق فرد است در حالی که طرف راست آن زوج است. دوباره، این یک تناقض است.
حالت چهارم: اگر p فرد و q زوج باشد، آنگاه، مجددا طرف چپ معادله فرد و طرف راست آن زوج است. یک تناقض. پس، x گویا نیست.

گنگ بودن ریشه دوم ۲

حال با استفاده از برهان خلف، یک قضیه کلاسیک و اثبات ریاضی آن را نشان می‌دهیم: $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است. این یعنی اینکه، نمی‌توان آن را به‌شکل خارج قسمت دو عدد صحیح نوشت.
نقیض این گزاره "$\sqrt{2}$ گویاست" می‌باشد. برای اینکه نشان دهیم این فرض ما را به یک گزاره غیرممکن هدایت می‌کند، پیش می‌رویم.

قضیه ۲.۲۳.
ریشه دوم ۲ گنگ است، یعنی نمی‌تواند به‌صورت $\frac{m}{n}$ که m و n صحیح باشند، نوشته شود.

برهان. فرض خلف این است که $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ که m و n صحیح هستند. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم این خارج قسمت، ساده شده‌ترین حالت آن است. پس داریم:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$
$$2 = (\frac{m}{n})^{2}, \qquad \text{با به توان ۲ رساندن دو طرف}$$
$$2 = \frac{m^{2}}{n^{2}}$$
$$2n^{2} = m^{2}.$$

باتوجه‌به اینکه m^{2}، حاصل‌ضرب ۲ و n^{2} است پس m^{2} زوج است. حال دو انتخاب برای m داریم: می‌تواند زوج یا فرد باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲۳، اگر m فرد باشد، m^{2} نیز فرد است. (آیا شما قضیه‌ای که این‌جا به آن ارجاع داده‌ایم را دیدید و آن را بررسی کردید؟) پس باید، m زوج باشد. در نتیجه، به ازای عدد صحیحی چون k، $m = 2k$. بنابراین با استفاده از معادله $2n^{2} = m^{2}$، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 2n^{2} &= (2k)^{2} \\ &= 2^{2}k^{2} \\ &= 4k^{2} \\ \Rightarrow n^{2} &= 2k^{2}. \end{aligned}$$

با استفاده از استدلال مشابه، از معادله بالا نتیجه می‌گیریم که n زوج است، یعنی برای عدد صحیحی مانند j، $n = ۲j$. به هر جهت فرض ما این بود که خارج قسمت $\frac{m}{n}$، ساده شده‌ترین شکل است. این نشان داده است که اینطور نیست:

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n} = \frac{۲k}{۲j} = \frac{k}{j}.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\sqrt{۲}$ نمی‌تواند به‌شکل خارج قسمت دو عدد صحیح نوشته شود. ■

تمرین ۲.۲۳.

(آ) *نشان دهید که $\sqrt{۳}$ گنگ است.*

(ب) *نشان دهید که $\sqrt{۵}$ گنگ است.*

(ج) *اثبات را برای نامثال "$\sqrt{۴}$ گنگ است" به کار ببرید. چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ در این حالت، کدام قسمت برهان نادرست است؟*

(د) *اگر p یک عدد اول باشد آیا برای اثبات اینکه $\sqrt{p}$ یک عدد گنگ است می‌توان روش را تعمیم داد؟*

چگونه می‌توان فهمید که باید از برهان خلف استفاده کنیم.

اثبات به‌وسیله برهان خلف را نمی‌توان تشخیص داد ولی زمانی که نتوان به‌طور مستقیم گزاره را اثبات کرد به طور خودکار روش برهان خلف را دستور کارمان قرارمی‌دهیم. برای مثال، برای اثبات اینکه چیزی وجود ندارد، فرض می‌کنیم وجود داشته باشد و به دنبال تناقض هستیم؛ و برعکس برای اثبات اینکه چیزی وجود دارد، فرض می‌کنیم وجود نداشته باشد.

نکته این است که کار با آنچه وجود ندارد، دشوار است. فرض وجود چیزی به این معنی است که می‌توان عملیاتی انجام داد. به‌عنوان‌مثال، برای اثبات اینکه عددی گنگ است، به سادگی فرض می‌کنیم که گویاست. پس می‌توان آن را به‌شکل $\frac{p}{q}$ نوشت که p و q صحیح هستند.

چگونگی نوشتن یک اثبات با برهان خلف

(۱) *حکم را غلط فرض کنید.(ریاضی‌دانان، اثبات با برهان خلف را تصدیق می‌کنند.)*

(۲) *فرض اینکه گزاره‌ای نادرست است به معنای استفاده از نقیض است.*

(۳) *بر روی اینکه چه چیزی نتیجه می‌دهد یک تناقض به‌دست آمده است، کار کنید.*

(۴) *اعلام کنید که تناقض پیدا شده است.*

تمرین

۱. نشان دهید که جوابهای معادله $x^5 - 2x^3 - 3 = 0$، کمتر از ۲ هستند.
(راهنمایی: آسان‌تر است که ریشه‌های کمتر از صفر را با یک تغییر متغیر بیابیم.)

۲. برای همه x و yهای صحیح نشان دهید که اگر xy فرد باشد، آنگاه x و y هر دو فرد هستند.

۳. با استفاده از برهان خلف، نشان دهید که تعداد نامتناهی عدد گنگ بین ۰ و ۱ وجود دارد.

۴. نشان دهید که اثبات با برهان خلف برای P، سخن منطقی زیر است:

P **معادل با است** $\Big(\sim P \Longrightarrow Q \wedge (\sim Q)\Big)$.

۵. نشان دهید که هیچ پاسخ صحیح مثبتی برای $y^2 = 1 + x + x^2$ وجود ندارد.

۶. نشان دهید که بزرگترین عدد گویای کمتر از $\sqrt{2}$ وجود ندارد.

۷. برای همه اعداد گویا x و y که $x < y$ است، نشان دهید که عدد گنگی مانند z وجود دارد که $x < z < y$.

۸. مسئله قبل را برای x و y گنگ و z گویا نشان دهید.

۹. مثالی از مجموع دو عدد گنگ بیاورید که گویا باشد. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ گنگ است یا گویا؟ شرح دهید.

۱۰. نشان دهید که $\log_2 3$ گنگ است. (راهنمایی: با استفاده از تعریف، $\log_2 3$ عدد x وجود دارد به‌طوری‌که $2^x = 3$.)

۱۱. اثبات یا رد کنید: اگر x گنگ باشد، آنگاه $\sqrt{x}$ نیز گنگ است.

۱۲. عدد $\sqrt[3]{2}$ گنگ است یا گویا؟ در هر صورت، آیا می‌توان حکم شما را تعمیم داد؟

۱۳. با فرض اینکه x و y اعداد صحیح مثبت هستند، نشان دهید $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$.

چکیده

- *در اثبات به‌وسیله برهان خلف، فرض می‌شود که نقیض حکم درست است و از آن چیزی نتیجه می‌شود که به‌وضوح غلط است.*
- *ریشه دوم ۲ گنگ است.*
- *گزاره‌ای بنویسید که بر "مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است"، دلالت کند.*

فصل ۲۴

روش اثبات ۴: استقرا

یکی دیگری را نتیجه می‌دهد.

"آنون"

روش بسیار قدرتمند استقرا که معمولا توسط ریاضی‌دانان مورد استفاده قرار می‌گیرد[۱] می‌تواند گیج‌کننده باشد چرا که به نظر آنچه باید اثبات شود را فرض می‌گیریم؛ بااین‌وجود استفاده از آن آسان و تنها نیاز است دو شرط بررسی شود.

استقرا زمانی کاربرد دارد که تعداد نامتناهی گزاره اندیس‌گذاری شده با اعداد طبیعی مانند "$n^5 - n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ زوج است" داشته باشیم.

اثبات برای نمونه‌ای از اعداد طبیعی کافی نیست، حتی اگر مجموعه شامل صدها، میلیون‌ها یا حتی بیلیون‌ها تا از اعداد باشد؛ باید آن را برای هر n ثابت کنیم.

با استقرا نمی‌توان گزاره را به‌طور مستقیم اثبات کرد. شاید بهترین توصیف از آنچه انجام می‌دهیم ریزش پی در پی دومینوها باشد. همان‌طور که احتمالا می‌دانید، دومینوها در مسیری تا انتها به‌طور ایستاده چیده می‌شوند به‌طوری‌که وقتی شما اولی را ضربه می‌زنید دومینو اولی به دومی ضربه می‌زند و دومی به نوبه خود به سومی می‌خورد، و این کار ادامه می‌یابد. چیدمان دومینوها به‌شکل است که هر کدام بعدی را با ضربه می‌اندازد، آنگاه همه دومینوها سقوط می‌کنند.

مراحل استقرا، همان چیزی است که اثبات می‌کنیم که

"اگر kـ امین گزاره درست باشد، آنگاه $k+1$امین گزاره درست است"، یعنی درستی یک گزاره درستی بعدی را نتیجه می‌دهد. این مشابه با برخورد دومینویی است که دومینوی بعدی را می‌اندازد. پس اگر حکم اول درست باشد (افتادن دومینو اول)، آنگاه همه احکام درست هستند (همه دومینوها سقوط می‌کنند).

اصل استقرا ریاضی

ایده را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم. ابتدا، اصل استقرا ریاضی به دنباله‌ای از گزاره‌های اندیس‌گذاری شده به‌وسیله اعداد طبیعی نیاز دارد. تعداد فراوانی از این نوع گزاره‌ها موجود است، مانند مثال‌هایی که در ادامه آورده می‌شود.

توجه کنید که از شاخه‌های مختلف ریاضیات هستند. تقسیم‌پذیری، جمع‌پذیری، نابرابری‌ها. بعدا همه این احکام با استفاده از استقرا اثبات خواهند شد.

خوشبختانه، با اثبات این وسعت از مطالب، تصوری از قدرت استقرا به‌دست خواهید آورد، که به واقع یک ابزار مهم در جعبه ابزار ریاضی‌دانان است.

---

[۱] یک اصل استقرا در علوم آزمایشگاهی نیز هست که با آنچه مورد بحث ماست، تفاوت دارد.

مثال ۱.۲۴.

۱. *عبارت $6^n - 1$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، بر ۵ بخش‌پذیر است.* (a *را به‌وسیله* b **بخش‌پذیر** *گوییم اگر زمانی‌که* a *بر* b *تقسیم می‌شود، باقیمانده‌ای نداشته باشیم. یعنی اینکه* $q \in \mathbb{Z}$*ی باشد که* $a = bq$*. برای موارد بیشتر باید فصل ۲۷ را ببینیم.*)

۲. *برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *داریم:*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

۳. *نامساوی* $2^{n-1} \leq n!$ *برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *درست است.*

بعد از مطالعه این‌ها، آیا شبیه یک ریاضی‌دان حالتهای کمی که برقراری حکم برای آن‌ها بعید به نظر می‌رسد را بررسی می‌کنید؟
تعدادی از حالات را بررسی می‌کنیم. برای (۱) داریم:

$n = 1: \quad 6^1 - 1 = 6 - 1 = 5,$	*بر ۵ بخش‌پذیر است*
$n = 2: \quad 6^2 - 1 = 36 - 1 = 35,$	*بر ۵ بخش‌پذیر است*
$n = 3: \quad 6^3 - 1 = 216 - 1 = 215,$	*بر ۵ بخش‌پذیر است*
$n = 10: \quad 6^{10} - 1 = 60466176 - 1 = 60466175.$	*بر ۵ بخش‌پذیر است*

توجه شود که اول تعدادی حالات کوچک و سپس در ادامه حالت بزرگتر بررسی شده است. این نشان می‌دهد که حکم معقول است، هنوز مثال نقضی پیدا نشده است!

تمرین ۱.۲۴.

دو حکم دیگر بالا را برای nهای کوچک بررسی کنید تا به پذیرش درستی آن‌ها کمک شود.

شاید این نوع بررسی بیهوده به نظر برسد، "آیا قرار نیست گزاره‌های درست را در یک دقیقه اثبات کنیم؟" بله، آنچه فکر می‌کنید اینجاست:
از نماد $A(n)$ برای نشان دادن یک گزاره مختص n استفاده خواهیم کرد. برای مثال، در قسمت ۱، $A(3)$ دقیقا "عبارت $6^3 - 1$ بر ۵ بخش‌پذیر است." می‌باشد.
خانم‌ها و آقایان، اینک قضیه بزرگ تقدیم شما می‌شود!

قضیه ۱.۲۴.

(اصل استقرا ریاضی) *مجموعه نامتناهی از $A(n)$ها به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مفروض است. فرض کنید:*

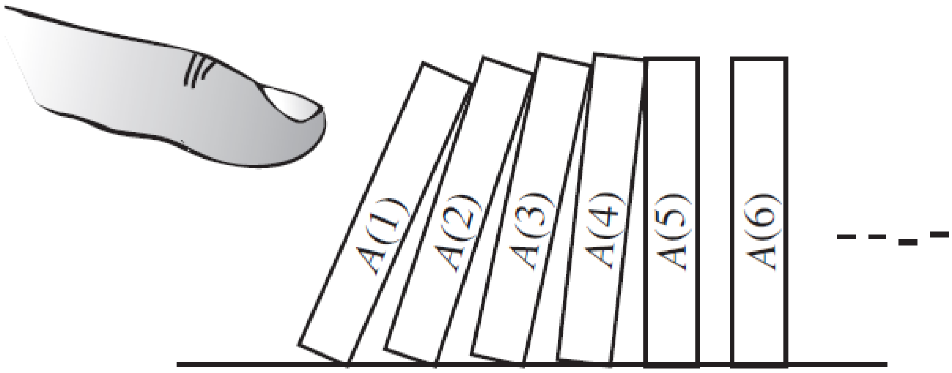
(۱) *$A(1)$ درست است، و*

(۲) *برای هر $k \in \mathbb{N}$، $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$.*

آنگاه $A(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، درست است.

برهان. برای یک تناقض هدف‌گیری می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نتیجه غلط است و j کوچکترین عدد طبیعی است که $A(j)$ درست نیست.
با استفاده از فرض (۱) داریم $j > 1$. حال توجه می‌کنیم که $A(j-1)$ باید درست باشد (چرا که j کوچکترین عددی است که $A(j)$ درست نیست) ولی با توجه فرض (۲)، $A(j)$ درست و این یک تناقض است. ■

به چند تعریف نیاز داریم. دلیل ساخت آن‌ها بعدا روشن می‌شود.
- *بررسی شرط (۱)* **گام اولیه** *نام دارد.*
- *بررسی شرط (۲)* **گام استقرا** *خوانده می‌شود.*
- *فرض $A(k)$ برای k درست است، (در (۲))* **فرض استقرا** *گفته می‌شود. در شکل ۱.۲۴ هر گزاره را یک دومینو دیده است.*



شکل ۱.۲۴: واژگونی دومینوها

مثال‌هایی از استقرا

حال اصل را در عمل می‌بینیم. مثال بعدی یک مثال واقعی از ریاضیات کلاسیک است: "مجموع اعداد ۱ تا n چه عددی است؟" در داستانی مشهور، زمانی‌که ریاضی‌دان بزرگ جان کارل فریدریچ گاوس (۱۸۵۵ – ۱۷۷۷م) در مدرسه بود، معلمش در کلاس از آن‌ها خواست که همه اعداد یک تا صد را جمع کنند. احتمالا امیدوار بود که آن‌ها را برای مدتی طولانی مشغول و ساکت کرده است. در حالی که هم‌کلاسی‌های گاوس با روش مستقیم و با زحمت روی این تمرین کار می‌کردند؛ او مانند یک ریاضی‌دان و با ابداع روشی ساده برای محاسبه مجموع ۱۰۰ عدد یک تا صد، نقشه معلم را خنثی کرد. روش گاوس را می‌توان به معرفی فرمولی برای همه اعداد و نه تنها صد عدد اول به کار برد. این فرمول در مثال ۱.۲۴ قسمت ۲ آمده است. درستی این فرمول را جدا از اثبات مبدع آن، با استفاده از استقرا اثبات خواهیم کرد[۲].

مثال ۲.۲۴.

برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

این گزاره با n اندیس‌گذاری شده است، پس می‌توان گزاره

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

را $A(n)$ نامید. هدف این است که نشان دهیم $A(n)$ به ازای هر n درست است.

شرط (۱) را بررسی می‌کنیم (حالت اولیه). این با حرکت اولین دومینو متناظر است. ساده است:

وقتی $n = 1$، پس

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

و

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1) = 1.$$

حال برای گام استقرایی، می‌خواهیم نشان دهیم که اگر گزاره $A(k)$ درست باشد، آنگاه گزاره $A(k+1)$ نیز درست است. این مشابه ضربه دومینو kام به دومینو $k+1$ام است.

[۲] روش گاوس باتوجه‌به این نکته شکل گرفت که می‌توان اعداد را به‌صورتی جفت کرد که مجموع هر جفت عدد، عددی ثابت شود، یعنی $100 + 1$، $99 + 2$، $98 + 3$ و همینطور ادامه دارد. به‌دست آوردن فرمول آسان است: مجموع پنجاه جفت (یعنی $\frac{100}{2}$) ۱۰۱، است. در حالت کلی، برای اثبات فرمول از استدلالی مشابه استفاده می‌شود.

فرض می‌کنیم $A(k)$ برای k دلخواهی درست باشد. (k یکی است، نکته اصلی دلخواه بودن آن است. مفروضات را برای هر n دیگری نمی‌سازیم تنها این k ویژه.) که می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1).$$

درمورد پیامدهای این رابطه برای $A(k+1)$ تحقیق می‌کنیم و ابتدا حالت $A(k+1)$ را می‌نویسیم:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}(k+1)\Big((k+1)+1\Big).$$

یک ریاضی‌دان چگونه چنین تساوی را اثبات می‌کند؟ تجربه آموخته است که یک طرف عبارت را به‌طور کامل انتخاب و آن را ساده کنیم تا به طرف دیگر برسیم. برای اثبات با استقرا جمله‌ای که شامل طرف کامل مجموع و معمولاً یکی به‌علاوه یک مجموع است (احتمالاً یک عبارت بیشتر دارد) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \Big(\sum_{i=1}^{k} i\Big) + (k+1), && \text{با تعریف جمع}\\
&= \Big(\frac{1}{2}k(k+1)\Big) + (k+1) && \text{با استفاده از فرض استقرا، چون } A(k) \text{ درست است،}\\
&= (\frac{1}{2}k+1)(k+1)\\
&= \frac{1}{2}(k+2)(k+1)\\
&= \frac{1}{2}(k+1)\Big((k+1)+1\Big).
\end{aligned}$$

بنابراین نشان داده‌ایم که اگر $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$، یعنی $A(k)$ درست باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}(k+1)\Big((k+1)+1\Big),$$

یعنی $A(k+1)$ درست است. به‌عبارت‌دیگر، نشان داده‌ایم که همه دومینوها روی خط هستند به‌طوری‌که اگر kامین بیفتد، آنگاه $(k+1)$امین می‌افتد. بنابراین با استفاده از اصل استقرای ریاضی، گزاره برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است.

نکته ۱.۲۴.

(آ) به ساختار دقت کنید. فرض می‌کنیم $A(k)$ برای متغیری مانند k درست باشد. آنگاه حالت $A(k+1)$ را می‌بینیم و آنجایی که $A(k)$ می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد را به کار می‌گیریم. فرض نمی‌کنیم که حالت $A(k+1)$ درست است. (این اشتباهی است که مبتدیان انجام می‌دهند). بلکه نشان می‌دهیم $A(k+1)$ درست است زمانی که $A(k)$ درست باشد.

(ب) شکل دیگری که از نظر ریاضی‌دانان تازه‌کار، نقص عمده استقرا به نظر می‌رسد، این است که در نظر نمی‌گیریم در تلاش برای اثبات چه چیزی هستیم. خودم در زمان دانش‌آموزی چنین حسی داشتم.
به هر حال درک ظرافت موجود در استقرا برای اینکه با اطمینان به کار گرفته شود، حیاتی است. باید دقت شود که قصد داریم برای همه nها ثابت کنیم.
در شرط (۲) گزاره را برای یک n خاص که آن را k می‌نامیم، درست فرض می‌کنیم. بسیار خوب، یک n دلخواه، که می‌تواند هر n که شما دوست دارید باشد، اما تنها یکی است، خودش و هیچ چیز دیگری نیست.

مثال ۳.۲۴.

عبارت $6^n - 1$ به ازای هر n بر ۵ بخش‌پذیر است.

این مثال را با شرحی کمتر از مثال قبل انجام می‌دهیم. مثال بیشتر شبیه یک مدل حل در کتاب یا ارائه‌ای به‌شکل توافقی است.

گام اول: *گزاره برای $n = 1$ درست است، زیرا*

$$6^1 - 1 = 6 - 1 = 5.$$

گام استقرا: *فرض کنیم گزاره برای $k \in \mathbb{N}$ [۳] درست باشد؛ یعنی $m \in \mathbb{N}$ هست که $6^k - 1 = 5m$. بنابراین*

$$\begin{aligned} 6^{k+1} - 1 &= 6(6^k) - 1 \\ &= 6(5m + 1) - 1 && \text{با استفاده از فرض استقرا} \\ &= 30m + 6 - 1 \\ &= 5(6m + 1). \end{aligned}$$

که بر ۵ بخش‌پذیر است، لذا گزاره برای $k + 1$ درست است. پس با استفاده از اصل استقرای ریاضی، گزاره برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است.

حال مثال سوم را می‌آوریم.

مثال ۴.۲۴.

نشان می‌دهیم که $2^{n-1} \leq n!$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

گام اول: *برای $n = 1$ داریم: $2^{n-1} = 2^0 = 1$ و $n! = 1! = 1$. پس برای $n = 1$، $2^{n-1} \leq n!$.*

گام استقرا: *فرض کنید گزاره به ازای $k \in \mathbb{N}$ درست باشد، یعنی*

$$2^{k-1} \leq k!.$$

بنابراین برای $n = k + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} 2^{(k+1)-1} &= 2^k \\ &= 2(2^{k-1}) \\ &\leq 2(k!) \\ &\leq (k+1)k! && (2 \leq k+1), \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که گزاره برای $n = k + 1$ درست است. پس با استفاده از اصل استقرای ریاضی، گزاره برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است. دقت کنید که یک طرف نامساوی در گزاره مربوط به $n = k + 1$ را گرفته و با آن بازی شد. به آسانی می‌توانید از طرف دیگر شروع کنید، البته تا مراقب باشید $A(k+1)$ را فرض نگیرید.

چیزی را امتحان کنیم که بیشتر از یک مسئله است و اجازه می‌دهد مغزمان را، با تفکر واقعی ریاضی، به‌کار بگیریم.

مثال ۵.۲۴.

یک فرمول برای مجموع اولین n عدد فرد بیابید.

دو مسئله پنهان در یک مسئله داریم. ابتدا باید فرمول را با استفاده از روش‌هایی بیابیم، سپس آن را برای همه nها ثابت کنیم. (چیز حیرت‌انگیزی نیست، بلکه با استفاده از استقرا به‌دست می‌آید.)

برای قسمت اول می‌توان به روش حل مسئله رجوع کرد (فصل ۵ را ببینید). یک روش خوب حمله این است که مسئله را با نمادها بازنویسی کنیم. مجموع اولین n عدد فرد، با نماد به‌صورت $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)$ است.

جدول ۱.۲۴

n	۱	۲	۳	۴	۵
$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

بیایید ریاضی‌دان خوبی باشید: تعدادی از حالتهای اولیه را به‌دست آورید. نتایج در جدول ۱.۲۴ فهرست شده‌اند.
این برای دیدن اینکه الگو چیست چیز بیشتری به‌دست نمی‌دهد: مجموع اولین n عدد فرد n^2 است.
خُب، این چیزی است که دیده می‌شود، و می‌تواند در جمله بعدی این الگو صدق نکند. بااین‌وجود حدسی خوب برای دنبال کردن است:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

فرمولی ساده و خوب است که از بررسی پنج جمله اول حدس زده‌ایم. این تفکر شبیه اندیشیدن یک ریاضی‌دان است. البته نیاز است که نشان دهیم درست است!

گام اولیه در محاسبات جدول انجام شده است. پس اجازه دهید گام استقرا را انجام دهیم. فرض کنیم گزاره برای k درست باشد، یعنی

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = k^2.$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \Big(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\Big) + \Big(2(k+1)-1\Big) \\
&= k^2 + (2k+2-1) \qquad \text{با استفاده از فرض استقرا} \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2.
\end{aligned}$$

پس اگر گزاره kام درست باشد، گزاره $(k+1)$ام نیز درست است. لذا بنا به اصل استقرای ریاضی، فرمول درست است.

دقت کنید که در حالت $k+1$، مجموع را به‌عبارت ساده‌ای از حالت kام و آخرین جمله سری، شکسته و کار را با استفاده از گزاره حالت kام ادامه می‌دهیم.

توجه ۱.۲۴.

یک ریاضی‌دان برای بیان مطلب بالا، همه محاسبات چند حالت اول و منجر به فرمول را حذف می‌کند. به جای آن فرمول را ارائه می‌دهد و برای اثبات درستی‌اش اقدام می‌کند. این به **پوشش حمله‌ها** *مشهور است زیرا همه اطلاعات (که در این‌جا به‌دست آورده‌اید) حذف شده است.*

به‌کارگیری اثبات با استقرا

واضح است برای اینکه بتوان استقرا را به نظر آورد و از آن استفاده کرد، باید درمورد اندیس‌گذاری هر جمله با استفاده از مجموعه اعداد طبیعی بدبین باشید. برای مثال، " برای هر عدد طبیعی ..."، یا "... برای همه nهای عضو $\mathbb{N}$".
بعضی اوقات گزاره‌ها می‌توانند تغییر شکل دهند. برای مثال تمرین زیر را در نظر بگیرید:
"وقتی n یک عدد فرد است، نشان دهید n^2-1 بر ۸ بخش‌پذیر است."

در نگاه اول به نظر نمی‌رسد که این گزاره با اعداد طبیعی اندیس‌گذاری شود، زیرا هیچ یک از اعداد زوج در آن به کار نرفته است. در صورتی که گزاره می‌تواند با اعداد طبیعی اندیس‌گذاری شود، زیرا اعداد فرد را می‌توان با اعداد طبیعی

[3] به خاطر داشته باشید که k یک عدد تنها و دلخواه است نه همه kها.

تطبیق داد. اولین عدد فرد ۱ است، دومین ۳، سومین ۵ و همینطور ادامه دارد. می‌توان گزاره را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:
"وقتی n یک عدد طبیعی است نشان دهید که $(2n-1)^2 - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است."

نوشتن اثبات استقرایی

روشی ساده برای نوشتن اثبات با استفاده از استقرا:

(۱) *اعلام کنید که در حال به‌کارگیری استقرا هستید.*

(۲) *حالت اولیه را انجام دهید.*

(۳) *توضیح دهید که فرض کرده‌اید گزاره برای k درست است. اغلب نوشتن خروجی گزاره در به‌کارگیری آن مفید است.*

(۴) *از درست بودن گزاره برای k در اثبات گزاره برای $k+1$ استفاده کنید. اغلب این به معنی شکستن عبارت ریاضی به دو قسمت است که یکی از آن‌ها، گزاره برای اندیس k است. از نقطه مربوط به فرض استقرا مطمئن شوید.*

(۵) *نتیجه را شرح دهید: "با استفاده از اصل استقرای ریاضی گزاره درست است." به این ترتیب خواننده می‌داند اثبات تمام شده است.*

تمرین

۱. با استفاده از استقرا نشان دهید: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

۲. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، $2n \leq 2^n$.

۳. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، $3^{2n} - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۴. نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $4^{3n+2} + 3^{4n}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۵. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n و $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$، $\sin nx \leq n \sin x$.

۶. قضیه دوجمله‌ای را ثابت کنید:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

یادآوری می‌کنیم که برای $0 \leq r \leq n$،

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

۷. نشان دهید وقتی n یک عدد طبیعی فرد باشد، $n^2 - 1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۸. قضیه لایپ‌نیتز را برای تکرار مشتق‌گیری از یک حاصل‌ضرب اثبات کنید: اگر u و v توابعی از x باشند، نشان دهید که

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u_0 v_n + \binom{n}{1} u_1 v_{n-1} + \binom{n}{2} u_2 v_{n-2} + \ldots + \binom{n}{r} u_r v_{n-r} + \ldots + u_n v_0$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، که u_i و v_j به ترتیب نمایش $\frac{d^i u}{dx^i}$ و $\frac{d^j v}{dx^j}$ هستند.
(نیاز دارید که از فرمول زیر استفاده کنید:

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}.$$

اما اثبات این که این رابطه درست است خیلی سخت نیست.)

۹. نشان دهید که

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \Big(\sum_{r=1}^{n} r\Big)^2.$$

۱۰. برای هر $1 \leq r \leq n-1$ نشان دهید $\binom{n}{r}/n$ یک عدد طبیعی است.

۱۱. هرگاه X یک مجموعه متناهی n عضوی باشد، نشان دهید که X، 2^n زیرمجموعه مجزا دارد.

۱۲. تمرین ۳ است.

(آ) نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و عدد طبیعی $x \neq 1$، $x^n - 1$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است.
(ب) فرمولی برای $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ بیابید و با استفاده از استقرا نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ صدق می‌کند.

۱۳. گزاره "$A(n) : ۲^n < ۲^{n-۱}$" را در نظر بگیرید. ثابت کنید $A(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ غلط است. نشان دهید گام استقرا صادق است، یعنی $A(k) \implies A(k+۱)$. توجه کنید که برای اینکه نشان دهیم گزاره برای هر n صادق است نیاز است حالت اولیه درست باشد. درست شبیه "ماه از پنیر ساخته شده است نتیجه می‌دهد که ماه یک اسنک پنیری است" از فصل ۷ است. می‌دانیم "$A(n) \implies A(n+۱)$" می‌تواند درست باشد حتی اگر $A(n)$ و $A(n+۱)$ هر دو غلط باشند.

۱۴. گزاره نقیض سورها مربوط به فصل ۱۱ را ثابت کنید:
برای اینکه یک گزاره به‌شکل

$$Q_۱x_۱Q_۲x_۲\ldots Q_nx_nP(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)$$

که Q_i به ازای هر $۱ \le i \le n$ $\forall$ یا $\exists$ است را نفی کنیم، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

(آ) هر $\forall$ را به $\exists$ و هر $\exists$ را به $\forall$ تبدیل می‌کنیم.

(ب) P را به نقیض P تبدیل می‌کنیم.

۱۵. نشان دهید که

$$\sum_{i=۱}^{n}|x_i| \ge |\sum_{i=۱}^{n}x_i|.$$

(این تعمیم نامساوی مثلث است.)

۱۶. فرض کنید $x_۱,x_۲,\ldots,x_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند. ثابت کنید که

$$\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}.$$

چکیده

- *اصل استقرا ریاضی برای اثبات گزاره‌های اندیس‌گذاری شده با اعداد طبیعی کاربرد دارد.*
- *زمانی‌که گزاره‌های اندیس‌گذاری شده با اعداد طبیعی را می‌بینید به استفاده از استقرا فکر کنید.*
- *استقرا به‌شکل وسیعی در ریاضیات به کار گرفته می‌شود، به‌طور مثال در سری‌ها، نامساوی‌ها، بخش‌پذیری و .....*
- *ابتدا $A(۱)$ را ثابت کنید، سپس نشان دهید برای هر $k \in \mathbb{N}$ (دلخواه ولی نه ثابت)*

$$A(k) \Longrightarrow A(k+۱).$$

- *به خاطر داشته باشیم، این یک k هست نه همه kها.*

فصل ۲۵

روش‌های پیشرفته‌تر استقرا

سادگی غایت پیچیدگی است.

"لئوناردو داوینچی"

در این فصل شکلی پیشرفته‌تر از استقرا بررسی می‌شود. سه حالت متفاوت وجود دارد که باید بیشتر مورد توجه قرار گیرد.

(۱) *به جای آنکه نشان دهیم $A(۱)$ درست است از فرض اولیه دیگری استفاده می‌کنیم، درستی $A(۷)$ یا $A(۱۵)$ را نشان می‌دهیم، پس $A(n)$ به ترتیب برای هر $n \geq ۷$ یا $n \geq ۱۵$ درست است.*

(۲) *گام استقرا را به "$A(k-۱)$ و $A(k)$، $A(k+۱)$ را نتیجه می‌دهد." تغییر می‌دهیم و برای این کار نیاز است که فرض اولیه یعنی $A(۱)$ و $A(۲)$ درست باشند.*

(۳) *گام استقرا را با "$A(j)$ برای هر $k \geq j \geq ۱$ درست است، درستی $A(k+۱)$ را نتیجه می‌دهد." تعویض می‌کنیم. فرض اولیه، درستی هر $A(j)$ (به جای درستی $A(۱)$) است. از درستی $A(۱)$ یا درستی هر یک از $A(j)$ها استفاده می‌شود.*

هر سه می‌توانند به اصل استقرا ریاضی ارجاع داده شوند، گاهی حالت دوم اصل قوی استقرا ریاضی نامیده می‌شود.

حالت اول

نیازی نیست که با حالت اولیه $n = ۱$ شروع کنیم. برای مثال، ممکن است گزاره $A(n)$ برای تعدادی از حالات ابتدایی درست نباشد. اگر بتوان نشان داد:

(۱) *یک $r \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $A(r)$ درست باشد و*

(۲) $\forall\, k \geq r, \qquad A(k) \Longrightarrow A(k+۱)$.

آنگاه گزاره $A(n)$ برای $n \geq r$ درست است. توجه کنید که تغییرات گام استقرا، حداقلی است. تغییرات واقعی در گام اول استقرا وارد شده است.

مثال ۱.۲۵.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq ۷$ ثابت کنید $n^۲ \leq ۲^{n-۱}$.

گزاره برای $n = ۱$ درست، ولی برای $n = ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ درست نیست و این جذاب است.

گام آغازی: *حالت آغازی در اینجا $n = ۷$ است. داریم:*

$$n^۲ = ۷^۲ = ۴۹ < ۶۴ = ۲^۶ = ۲^{n-۱}.$$

پس گزاره برای $n = ۷$ درست است.
گام استقرا: *فرض کنید گزاره برای $k \in \mathbb{N}$ که $k \geq ۷$ درست است، یعنی $k^۲ \leq ۲^{k-۱}$ برای $k > ۷$. داریم:*

$$\begin{aligned}
(k+۱)^۲ &= k^۲ + ۲k + ۱ \\
&\leq k^۲ + ۲k + k && \text{چون } k \geq ۷ \\
&= k^۲ + ۳k \\
&\leq k^۲ + k \times k && \text{چون } k \geq ۷ \\
&= ۲k^۲ \\
&\leq ۲ \times ۲^{k-۱} && \text{با استفاده از فرض استقرا} \\
&= ۲^k \\
&= ۲^{(k+۱)-۱}.
\end{aligned}$$

بنابراین، گزاره برای $n = k + ۱$ درست است. پس با استفاده از اصل استقرا ریاضی، گزاره برای $n \geq ۷$ درست است.
توجه کنید که تساوی‌ها و نامساوی‌های اثبات بالا در حالت کلی درست نیستند و مبدع اثبات با توضیحات خود، آن‌ها را روشن کرده است.

تمرین ۱.۲۵.

(آ) *مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید: کجای اثبات برای $n < ۷$ اشتباه است؟ برای کدام مقادیر k، استدلال گام استقرا غلط است؟*

(ب) *ثابت کنید برای $n \geq ۴$، $n! > ۲^n$. نشان دهید که حالتهای $n = ۱, ۲, ۳$ همه غلط هستند. دقیقا مانند بالا، اثبات در کجا نادرست است؟ و برای کدام مقادیر k، گام استقرا درست نیست؟*

(ج) *تعداد n نقطه متمایز را روی یک دایره انتخاب کنید و آن‌ها را به صورتی که یک چندضلعی بسازند به هم وصل کنید. نشان دهید که مجموع زوایای داخلی برای $n \geq ۳$، $۱۸۰(n-۲)$ است.*

حالت دوم

در این حالت گام استقرا تغییر می‌کند و با استفاده از درستی $A(k-۱)$ و $A(k)$ برای $k \geq ۲$ نشان می‌دهد که $A(k+۱)$ درست است. برای انجام این کار نیاز است که حالت آغازی به درستی $A(۱)$ و $A(۲)$ تغییر کند. (می‌دانید چرا؟) پس $A(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است.

مثال ۲.۲۵.
فرض کنید $x_۱ = ۳$، $x_۲ = ۵$ و برای $n \geq ۳$

$$x_n = ۳x_{n-۱} - ۲x_{n-۲}.$$

نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n = ۲^n + ۱$.

گام آغازی: $A(۱)$ و $A(۲)$ درست هستند:

$$\begin{aligned}
n = ۱ &: ۲^n + ۱ = ۲^۱ + ۱ = ۳ = x_۱, \\
n = ۲ &: ۲^n + ۱ = ۲^۲ + ۱ = ۵ = x_۲,
\end{aligned}$$

گام استقرا: فرض کنید گزاره به ازای یک $k \geq ۲$، $x_{k-۱}$ و x_k درست باشد،

$$\begin{aligned}
x_{k-۱} &= ۲^{k-۱} + ۱, \\
x_k &= ۲^k + ۱.
\end{aligned}$$

حالا حالت $n = k + ۱$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{aligned} x_{k+۱} &= ۳x_{(k+۱)-۱} + ۲x_{(k+۱)-۲} && \text{با استفاده از تعریف} \\ &= ۳x_k - ۲x_{k-۱} \\ &= ۳(۲^k + ۱) - ۲(۲^{k-۱} + ۱) && \text{با استفاده از فرض استقرا} \\ &= ۳ \times ۲^k - ۲^k + ۱ \\ &= ۲ \times ۲^k + ۱ \\ &= ۲^{k+۱} + ۱. \end{aligned}$$

.

پس با اصل قوی استقرا ریاضی، گزاره برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است.
*تعریف x_n مشهور به یک **تعریف استقرایی** است. به این معنا که x_n به x_i که $i < n$ وابسته است.*

تمرین ۲.۲۵.

(آ) *فرض کنید $x_۱, x_۲, x_۳, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد باشند که $x_۱ = ۱$، $x_۲ = ۳$ و به ازای هر $n > ۳$، $x_n = x_{n-۱} + x_{n-۲}$.* *نشان دهید که برای همه اعداد طبیعی n، $x_n < (\frac{۷}{۴})^n$ است.*

(ب) *چرا در این نوع از استقرا، نیاز است که $A(۱)$ و $A(۲)$ با هم درست باشند؟*

حالت سوم

حالت سوم، ترکیبی از حالت اول و تعمیمی از گام استقرا در حالت دوم است. باید نشان دهیم:

(۱) *برای یک $r \in \mathbb{N}$، $A(r)$ درست است.*

(۲) *برای هر $k \geq r$، درستی $A(j)$ به ازای $r \leq j \leq k$، درستی $A(k + ۱)$ را نتیجه می‌دهد.*

پس می‌توان استنباط کرد که $A(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq r$، درست است.
بنابراین، برای مثال، اگر $r = ۷$، پس در گام استقرا از درستی $A(۷), A(۸), A(۹), \ldots, A(k)$، نتیجه می‌گیریم که $A(k+۱)$ درست است.
از این شکل استقرا برای اثبات قضیه استاندارد زیر، بهره می‌بریم.

قضیه ۱.۲۵.
(*قضیه اساسی حساب*) *هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، حاصل‌ضرب اعداد اول است. به این معنی که*

$$n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} p_۳^{a_۳} \cdots p_r^{a_r},$$

که اعداد اول مجزای $p_۱, \ldots, p_r$ با توآن‌های $a_۱, \ldots, a_r$ از اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ هستند.

برهان. فرض می‌کنیم که روش‌های فصل‌های قبل را برای اثبات قضیه به کار ببرید و مثال‌هایی ارائه دهید تا خودتان را قانع کنید که درست است.

با استفاده از استقرا فرض کنید $A(n)$، گزاره ”n یک عدد اول است یا حاصل‌ضربی از اعداد اول“ باشد.
گام آغازی: چون ۲ یک عدد اول است پس $A(۲)$ درست است.
گام استقرا: به ازای یک k، گزاره‌ها $A(۲), A(۳), \ldots, A(k)$ همگی درست هستند. نشان می‌دهیم $A(k + ۱)$ درست است. حال، $k + ۱$ یک عدد اول هست یا نیست. اگر هست که $A(k + ۱)$ درست است. اگر $k + ۱$، اول نیست، آنگاه، اعداد طبیعی x و y بزرگتر از ۱ و کوچکتر از $k + ۱$ وجود دارند که $xy = k + ۱$ باشد.
بنابراین، با استفاده از فرض استقرا $A(x)$ و $A(y)$ درست هستند. به این معنا که x و y حاصل‌ضرب اعداد اول هستند:

$$x = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} p_۳^{a_۳} \ldots p_r^{a_r}$$

و
$$y = q_۱^{b_۱} q_۲^{b_۲} q_۳^{b_۳} \dots q_s^{b_s}.$$

پس $xy = k + ۱$، حاصل‌ضرب اعداد اول است. آن‌ها را می توان مجزا فرض کرد زیرا اگر به ازای i و j، $p_i = q_j$ باشد، آنگاه می‌توان توان $a_i + b_j$ را برای p_i در نظر گرفت و q_j را حذف کرد. بنابراین $A(k + ۱)$ درست است. بنا به اصل استقرا ریاضی گزاره برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست است. ■

تمرین ۳.۲۵.

(آ) *روش‌های فصل‌های قبل را برای درک اثبات به کار بگیرید. هر ادعا را بررسی کنید و از حالت‌های مرزی مانند ۰ و ۱ برای امتحان کردن گزاره و اثبات استفاده کنید.*
(توجه کنید که گزاره به ۰ و ۱ ختم نمی‌شود، نکته این است که از دیدن اینکه چرا گزاره برای این حالات درست نیست، درس عمیق‌تری می‌آموزیم.)

(ب) *اثبات کنید که تجزیه به اعداد اول یکتاست. به این معنی که اگر*
$$n = p_۱^{a_۱} p_۲^{a_۲} \dots p_r^{a_r}$$
و
$$n = q_۱^{b_۱} q_۲^{b_۲} \dots q_s^{b_s}$$
که p_iها مجزا، $a_i \geq ۱$، q_jها مجزا و $b_j \geq ۱$ هستند، آنگاه $r = s$ و برای هر i، تنها یک j وجود دارد که $p_i = q_j$.

تمرین

۱. فرض کنید $x_1 = 1$، $x_2 = 1$ و برای $n \geq 3$، $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. این دنباله از اعداد، به اعداد فیبوناچی مشهورند. شگفت‌آور این است که در طبیعت نیز دیده می‌شوند.

(آ) مقدار x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6 و x_7 را به‌دست آورید.

(ب) نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

(ج) نشان دهید x_{3n} برای هر $n \in \mathbb{N}$ زوج است.

(د) برای مجموع

$$x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-3} + x_{2n-1}$$

رابطه‌ای حدس بزنید و اثبات کنید.

(و) برای مجموع

$$x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2n-2} + x_{2n}$$

رابطه‌ای حدس بزنید و اثبات کنید.

۲. فرض کنید $x_1 = 0$، $x_2 = 1$ و $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$. نشان دهید که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$x_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3 \times 2^{n-2}}.$$

۳. تجزیه یکتا ۱۲۸۷۰ و ۱۷۸۳۶ را بیابید.

چکیده

- ضرورت ندارد که گام اولیه $A(۱)$ باشد. اگر $A(r)$ درست باشد و برای هر $k \geq r$،

$$A(k) \Longrightarrow A(k+۱),$$

آنگاه $A(n)$ برای $n \geq r$ درست است.

- لازم نیست که گام استقرا $A(k) \Longrightarrow A(k+۱)$ باشد. ممکن است داشته باشیم:

(۱) $A(k-۱)$ و $A(k)$، $A(k+۱)$ را نتیجه می دهد، یا
(۲) درستی $A(j)$ برای هر $j \leq k$، $A(k+۱)$ را نتیجه دهد.

- می توان تغییرات گام اولیه و گام استقرا را ترکیب کرد. اگر $A(r)$ درست باشد و درستی $A(j)$ برای هر $r \leq j \leq k$، $A(k+۱)$ را نتیجه دهد، آنگاه $A(n)$ برای هر $n \geq r$ درست است.

فصل ۲۶

روش اثبات ۵: روش عکس نقیض

اگر درد نداشته باشد، کار نمی‌کند.

"سخن نخست‌وزیر جان میجر[1] بعد از اینکه گفته شد سیاست‌های دولت وی به کشور آسیب می‌رساند."

درک روش عکس نقیض بسیار گیج‌کننده است. بااین‌وجود، دانشجویی می‌گفت که به استفاده از آن علاقه دارد چون احساس می‌کند کار زیرکانه‌ای انجام می‌دهد. فکر کنم این احساس از آن‌جا ناشی می‌شود که عکس نقیض روشی غیرمستقیم است.

در فصل **??** دیدیم که گزاره "$A \Longrightarrow B$" با "نقیض A $\Longleftarrow$ نقیض B" معادل است. روش عکس نقیض، استفاده از رابطه است. برای اثبات "$A \Longrightarrow B$" از آن به طور غیرمستقیم و هوشمندانه، استفاده می‌کنیم؛ با نقیض B آغاز و مراحل را برای اینکه نشان دهیم نقیض A درست است می‌پیماییم.
از آنجا که این ایده موجب اشتباهات زیادی برای مبتدیان می‌شود، باید با چند ویرایش از فصل **??** شروع کنیم و با اثباتی متفاوت از آن نشان دهیم، که گزاره و عکس نقیض آن معادل هستند. پس عکس نقیض را در عمل باید دید.

عکس نقیض

تعریف ۱.۲۶.
عکس نقیض گزاره "$A \Longrightarrow B$"،

"نقیض B $\Longrightarrow$ نقیض A"

است.

مثال ۱.۲۶. (آ) عکس نقیض "من وینستون چرچیل هستم نتیجه می‌دهد که من انگلیسی هستم"، "من انگلیسی نیستم نتیجه می دهد که من وینستون چرچیل نیستم" است.

(ب) عکس نقیض "اگر من مریم باشم، پس من یک زن هستم"، "اگر من زن نباشم، پس من مریم نیستم" است.

(ج) عکس نقیض "اگر $x^2 - 9 = 0$، آنگاه $x = 3$"، "اگر $x \neq 3$ آنگاه $x^2 - 9 \neq 0$" است.

عکس نقیض نباید با عکس گزاره، که "نقیض B $\Longrightarrow$ نقیض A" است، اشتباه گرفته شود. همان‌طور که مثال زیر نشان می دهد، این با گزاره اصلی معادل نیست.

---

[1] سر جان میجر ($Sir\ John\ Major$) سیاستمدار انگلیسی که بین سال‌های ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۷ نخست‌وزیر انگلیس بود.

مثال ۲.۲۶.

گزاره "$x=۲$ نتیجه می‌دهد که x زوج است" درست است. عکس آن "$x\neq ۲$ نتیجه می‌دهد x فرد است" درست نیست. برای نمونه، x می‌تواند ۶ باشد.

یک گزاره و عکس نقیض آن معادلند. برای مثال، در (آ) و (ب) شما می‌توانید ببینید گزاره و عکس نقیض هر دو درست هستند و در (ج) هر دو نادرست می‌باشند.
*البته برای اثبات یک گزاره کافی نیست که نشان دهیم برای تعدادی مثال صدق می‌کند. با استفاده از جدول‌های ارزشی فصل **؟؟** نشان می‌دهیم آن‌ها در حالت کلی معادل هستند.*
بااین‌حال، نیاز است که درک کنید این هم‌ارزی درست است. برای رسیدن به درک بهتر، مثال "اگر من مریم باشم نتیجه می‌دهد که من یک زن هستم" را در نظر بگیرید:
فرض کنید این درست است و در نظر بگیرید که آیا عکس نقیض آن یعنی "من یک زن نباشم نتیجه می‌دهد من مریم نیستم" درست است یا نه.
پس، اگر من یک زن نیستم، آنگاه مطلقا راهی وجود ندارد که من مریم باشم، زیرا می‌دانیم مریم یک زن است. پس عکس نقیض "اگر من یک زن نباشم، آنگاه من مریم نیستم"، درست است. حالت کلی‌تر، فرض کنید که "$A \Longrightarrow B$" درست است. آنگاه برای اینکه ببینیم عکس نقیض آن "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" درست است، فرض می‌کنیم که نقیض B درست باشد. در این حالت، مطلقا راهی نیست که A بتواند درست باشد. زیرا اگر چنین باشد، آنگاه B درست خواهد بود. (زیرا $A \Longrightarrow B$)، پس A باید نادرست باشد، یعنی نقیض A درست است.
پس ما نشان دادیم که

$$(\text{“}A \Longrightarrow B\text{”}) \Longrightarrow (\text{“نقیض } B \Longrightarrow \text{نقیض } A\text{”}) \qquad (۱.۲۶)$$

برای اثبات هم‌ارزی، نیاز است که نشان دهیم عکس رابطه فوق نیز درست است. برای آن می‌توانیم استدلال مشابه بالا را با استفاده از یک شگرد هوشمندانه اعمال کنیم.
فرض کنید C گزاره نقیض A و D گزاره نقیض B باشد. پس اگر "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" درست باشد، آنگاه $C \Longrightarrow D$ درست است. بنابراین باتوجه‌به ۱.۲۶ می‌دانیم
"نقیض $C \Longrightarrow$ نقیض D" درست است، یعنی، نقیض(نقیض B) $\Longrightarrow$ نقیض(نقیض A). این همان "$A \Longrightarrow B$" است. حال همه این‌ها را جمع‌بندی و آن را در یک اثبات پیراسته می‌نویسیم.

قضیه ۱.۲۶.

گزاره "$A \Longrightarrow B$" با گزاره "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" معادل است.

برهان. چون قضیه یک گزاره هم‌ارزی است، پس یک گزاره از نوع "اگر و تنها اگر" است که آن را می‌توان به گزاره "اگر" ($\Longleftarrow$) و گزاره "تنها اگر" ($\Longrightarrow$) شکست.

[$\Longrightarrow$] فرض می‌کنیم که $A \Longrightarrow B$، اما (عکس نقیض آن) " نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A"، نادرست است؛ این فرض اساسا می‌گوید که نقیض B درست، ولی نقیض A غلط است. آنگاه A درست، و چون $A \Longrightarrow B$، لذا B نیز درست، یعنی نقیض B غلط است و این یک تناقض است.

[$\Longleftarrow$] فرض کنید که " نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A"، با استفاده از [$\Longrightarrow$] در فوق، نتیجه می‌گیریم که نقیض(نقیض B) $\Longrightarrow$ نقیض(نقیض A). این همان $A \Longrightarrow B$ است. ■

دقت کنید که هر اثری از C و D را حذف کردیم. راه دیگر مشاهده $A \Longrightarrow B$ است که بگوییم اگر A درست، آنگاه راهی نیست که B غلط‌باشد؛ بنابراین اگر B غلط، آنگاه A نمی‌تواند درست باشد. پس " نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A"حاصل شده است.

کابرد عکس نقیض

قبلا در اثبات قضیه ۱.۱۸ مثالی از به‌کارگیری روش عکس نقیض دیدیم.

مثال ۳.۲۶.

باید ثابت کنیم که

"اگر $x^۲$ زوج باشد، آنگاه x زوج است."

این با اثبات "اگر x زوج نباشد، آنگاه $x^۲$ زوج نیست" معادل است. و به این معنی است که

"اگر x فرد باشد، آنگاه $x^۲$ فرد است."

اثبات آسان است: اگر x فرد باشد، آنگاه به ازای یک $k \in \mathbb{Z}$، $x = ۲k + ۱$. داریم:

$$x^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۲k + ۱ = ۲(۲k^۲ + k) + ۱,$$

که فرد است.

به‌طور مستقیم نشان دادیم که

"x فرد است نتیجه می‌دهد که $x^۲$ فرد است." پس عکس نقیض گزاره "$x^۲$ زوج است نتیجه می‌دهد که x زوج است" درست است.

مثال ۴.۲۶.

فرض کنید که A، B، C و D مجموعه‌هایی هستند که $C \setminus D \subset A \cap B$ و $x \in C$. اثبات کنید که اگر $x \notin A$، آنگاه $x \in D$.

برای اثبات این مطلب، احتمالا ابتدا به‌طور مستقیم تلاش می‌کنیم. به‌جای روش مستقیم عکس نقیض را نشان خواهیم داد: اگر $x \notin D$، آنگاه $x \in A$.

بنابراین، فرض کنیم که $x \notin D$. از اینکه $x \in C$ فرض شده است، پس $x \in C \backslash D$. چون $C \backslash D \subset A \cap B$ است پس $x \in A \cap B$، یعنی $x \in A$.

در آخرین مثال، اثبات پیراسته از دو خط آخر با " فرض کنیم که $x \notin D$ ..." شروع می‌شود و هیچ اشاره‌ای به اینکه گزاره با روش عکس نقیض اثبات شده نمی‌شود.

تحلیل آن به خواننده واگذار می‌شود.

تناقض و عکس نقیض را با هم اشتباه نگیرید.

اثبات با استفاده از تناقض برای $A \implies B$ و اثبات با استفاده از عکس نقیض به نظر شبیه هم انجام می‌شوند و ممکن است به اشتباه بیفتید. دو نمونه اثبات برای $A \Longrightarrow B$ و دو نوع استفاده از تناقض در آن‌ها دیده می‌شود. اختلاف نامحسوس است، اثبات را با استفاده از نقیض به کار بردیم، تا نشان دهیم که اثبات با عکس نقیض کار می‌کند! بنابراین تفاوت چیست؟ بیایید، روش‌ها را بیشتر شرح دهیم.

تناقض: فرض می‌کنیم A و نقیض B هر دو درست هستند و نشان می‌دهیم که نتایج تناقض دارند.

عکس نقیض: فرض می‌کنیم نقیض B درست است و نشان می‌دهیم نقیض A نیز درست است.

روش عکس نقیض باتوجه‌به اینکه در مسئله به‌طور مستقیم به مسئله برمی‌گردید نسبت به روش تناقض، برتری دارد. هدف روشن است: فرض می‌کنید نقیض B درست است و باید نشان دهید که نقیض A نیز درست است. در روش تناقض ممکن است واضح نباشد چه تناقضی قرار است رخ دهد؛ هدف چندان روشن نیست.

تمرین

۱. فرض کنید x و y اعداد طبیعی هستند. نشان دهید فرد بودن xy، نتیجه می‌دهد که x و y هر دو فرد هستند.

۲. فرض کنید x و y اعداد حقیقی هستند. ثابت کنید که اگر $x+y$ گنگ باشد، آنگاه لااقل یکی از x یا y گنگ هستند.

۳. نشان دهید اگر $x^۲ - ۳x + ۲ < ۰$، آنگاه $۱ < x < ۲$.

۴. ثابت کنید اگر x گنگ باشد، آنگاه $\sqrt{x}$ نیز گنگ است.

۵. معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ را با $a, b, c \in \mathbb{Q}$ در نظر بگیرید. ثابت کنید یک جواب گنگ دارد اگر و تنها اگر جواب دیگر آن نیز گنگ باشد.

۶. گزاره زیر را ثابت کنید یا مثال نقض بیاورید:
اگر x و y گنگ باشند آنگاه x^y نیز گنگ است.

۷. نقل قول نخست‌وزیر جان میجر که در ابتدا فصل آمد را در نظر بگیرید:
اگر درد نداشته باشد، کار نمی‌کند. این پاسخش به کسی است که مدعی بود، سیاست دولت او برای خارج‌شدن از رکود، کشور را در معرض آسیب قرار داد. چه اشتباهی در منطق اوست؟

چکیده

- *گزاره عکس نقیض "$A \Longrightarrow B$"، "نقیض $B \Longrightarrow$ نقیض A" است.*
- *اثبات با تناقض و اثبات با عکس نقیض را اشتباه نگیرید.*

بخش پنجم

ریاضیاتی که هر ریاضی‌دان خوب نیاز دارد.

فصل ۲۷

مقسوم‌علیه‌ها

شگردهای مرا می‌دانید. آن‌ها را به کار ببندید.

”شرلوک هولمز [۱] “

مجموعه اعداد صحیح در زمره ساده‌ترین اشیا ریاضیات است. یک نظریه به طور کامل به این اعداد اختصاص دارد و عجیب نیست آن را نظریه اعداد بنامند. این فصل بخش کوچکی از این نظریه را پوشش خواهد داد. هدف این فصل بیان ریاضیاتی است که بیشتر اوقات به آن نیاز دارید. مهم‌تر از همه، به‌کارگیری روش‌های قبلی برای درک چگونگی تشریح مطالب است.

بخش‌پذیری

خواص بنیادی اعداد چیست؟ چه کاری می‌توانم با آن‌ها انجام دهم؟ بله، می‌توانم آن‌ها را با هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کنیم، تعداد محدودی از آن‌ها به توان می‌رسند. بهترین مجموعه اعداد برای شروع بازی مجموعه اعداد صحیح است که با $\mathbb{Z}$ نشان داده می‌شود. مجموع هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است. تفاضل هر عدد صحیح از دیگری نیز یک عدد صحیح است. حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح یک عدد صحیح تولید می‌کند. در برخی موارد تقسیم یک عدد صحیح بر دیگری یک عدد صحیح تولید می‌کند. این به این معنی است که یک ویژگی جالب درمورد بخش‌پذیری اعداد صحیح پیدا کرده‌ایم. ما ریاضی‌دانان برای مجزا کردن این ایده یک تعریف خلق کرده و شروع به بررسی آن می‌کنیم.

تعریف ۱.۲۷.

عدد صحیح a عدد صحیح b را عاد (تقسیم) می‌کند، اگر عدد صحیح k موجود باشد به‌طوری‌که $b = ka$. در این صورت گوییم b بر a بخش‌پذیر است و می نویسیم $a|b$. همچنین گوییم a یک مقسوم‌علیه b است. اگر a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم $a \nmid b$.

✍ **توجه ۱.۲۷.**

(آ) *مفهوم اول بودن به بخش‌پذیری اعداد طبیعی وابسته است و پیش از این آن را دیده و در برخی از مثال‌های استقرا فصل ۲۴ از آن استفاده کرده‌ایم.*

(ب) *توجه کنید که به‌طور معمول، در تعریف از واژه ”اگر“ استفاده می‌شود ولی در واقع به معنی ”اگر و تنها اگر“ است. بنابراین وقتی که $b = ka$، می‌گوییم a عدد b را عاد می‌کند و برعکس وقتی که می‌گوییم a عدد b را عاد می‌کند، می‌دانیم عدد k وجود دارد به‌طوری‌که $b = ka$.*

[۱] شرلوک هولمز نام یک کارآگاه خصوصی خیالی است که متولد یورکشایر انگلستان است و در اواخر قرن ۱۹ و آغاز قرن ۲۰ فعالیت می‌کرده است. هولمز با اشاره به خود به‌عنوان «کارآگاه مشاور» در داستان‌ها و مهارت‌های ویژه از جمله مشاهده دقیق، علم پزشکی قانونی و استدلال منطقی مشهور است. شخصیت داستانی شرلوک هولمز نخستین بار در سال ۱۸۸۷ میلادی توسط سر آرتور کانن دویل ساخته، پرداخته و در کتاب‌ها مطرح شد. او در کتاب رکوردهای جهانی گینس به‌عنوان «شناخته شده‌ترین شخصیت خیالی» در تاریخ ثبت شده‌است.

بیایید در هنگام تجزیه و تحلیل یک تعریف مانند یک ریاضی‌دان بیندیشیم. چه مثال‌هایی موجود است؟ چه نامثال‌هایی وجود دارد؟

مثال ۱.۲۷.

(آ) *چون $۳ \times ۲ = ۶$ پس $۳|۶$ و به همین دلیل $۲|۶$.*

(ب) *از آنجا که $(-۳) \times (-۲) = ۶$ پس داریم $-۳|۶$. توجه داشته باشید که در تعریف، مجاز به استفاده از عدد صحیح هستیم؛ لازم نیست مقسوم‌علیه‌ها اعداد طبیعی باشند.*

(ج) *هر عدد زوجی بر ۲ بخش‌پذیر است. (این عملا تعریف عدد زوج است!)*

(د) *عدد ۱۴۶۵۵۲۴۴۲۳۷۴۳۵۶۹۶۵۴۹۰ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.*

(و) *برای هر عدد صحیح زوج n، عدد صحیح $۳n$ بر ۶ بخش‌پذیر است، زیرا بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است. به‌عبارت‌دیگر، n زوج است پس به ازای یک m داریم $n = ۲m$ و بنابراین $۳n = ۳ \times (۲m) = ۶m$. وقتی که n را بر ۶ تقسیم می‌کنیم یک عدد صحیح به‌دست می‌آید (یعنی m)، بنابراین n به‌وسیله ۶ بخش‌پذیر است.*

(ه) *عدد ۵ عدد ۳۳ را عاد نمی‌کند.*

تمرین ۱.۲۷.

(آ) *مثال‌ها و مثال‌های نقض خویش را بسازید.*

(ب) *به چند روش مختلف می‌توانید مثال $۶|۳n$ برای nهای زوج، را تعمیم دهید.*

(ج) *در مثال بالا، آنچه را که با تغییر فرض به nهای فرد رخ می‌دهد در نظر بگیرید. چه می‌توانیم بگوییم؟*

توجه داشته باشید که در حال حاضر سوالات زیادی داریم. این چگونگی کار ریاضی‌دانان واقعی را نشان می‌دهد.
مثال‌های بدیهی این مفهوم چیست؟ درمورد اعداد صحیح است، لذا این اعداد باید شامل حالت‌های "بدیهی" ۰، ۱ و ۱ـ باشند. کمی تفکر نشان می‌دهد که هر عددی ۰ را عاد می‌کند و ۱ و ۱ـ هر چیزی را عاد می‌کنند. یک مثال مرزی این است که یک عدد، خود را عاد می‌کند. (می‌توانید این را به‌عنوان یک مثال بدیهی در نظر بگیرید.)
وقتی که دو عدد، یا به‌طورکلی مضرب‌هایی از دو عدد که بر a بخش‌پذیر هستند را با هم جمع کنیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ قضیه بعد پاسخ می‌دهد.

قضیه ۱.۲۷.
اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه به ازای همه اعداد صحیح m و n، $a|(mb+nc)$.

حال بیایید ایده‌های فصل ۱۶ (چگونه خواندن یک قضیه) را به کار ببریم. ابتدا سعی کنید برای مشاهده برقراری گزاره و درک چرایی آن، چند مثال ارائه دهید. قرار دهید $a = ۳$، پس می‌توانیم داشته باشیم $b = ۱۲$ و $c = ۲۱$، زیرا در فرض صدق می‌کنند. مثال‌هایی ارائه دهید که در فرض صدق کند! قضیه می‌گوید که می‌توانیم هر عدد صحیح را برای m و n انتخاب کنیم. ممکن است $m = ۴$ و $n = -۶$ را قرار دهیم. عمدا یک عدد منفی انتخاب کردم زیرا در هنگام کار با اعداد صحیح، معمولا وسوسه می‌شویم که یک گزینه مثبت انتخاب کنیم. اغلب انتخاب یک منفی بینش بیشتری به ما می‌دهد.
بنابراین $mb + nc = (۴ \times ۱۲) + (-۶ \times ۲۱) = ۴۸ - ۱۲۶ = -۷۸$ آیا این بر a، یعنی ۳، بخش‌پذیر است؟ خُب، $\frac{-۷۸}{۳} = -۲۶$، بنابراین همان‌طور که قضیه ادعا کرده بود $a|(mb+nc)$.
البته این صرفا نشان می‌دهد که قضیه برای مثالی خاص برقرار است؛ و یک مورد خاص حالت کلی را تایید نمی‌کند! هنوز باید حالت کلی را اثبات کنیم. با این وجود بیایید تحقیقات خود را ادامه دهیم.
حالت‌های بدیهی این قضیه چیست؟ آیا اجازه داریم که هر عدد صحیح m و n را اختیار کنیم؟ اعداد ۰، ۱ و ۱ـ مثال‌های بدیهی از اعداد صحیح هستند.

اجازه دهید $m=۱$ و $n=۰$ را امتحان کنیم. باتوجه‌به این می‌توان دید که اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه a عدد $(۱\times b)+(۰\times c)$ را عاد می‌کند. اما این عدد دومی همان b است و بنابراین نتیجه می‌گیریم که a عدد b را عاد می‌کند. برای خلاص شدن از این بحث نشان دادیم که

اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه $a|b$.

این می‌گوید که "اگر X و Y درست باشد، آنگاه X درست است. " اوه خُب! در اکتشافات چنین اتفاقی رخ می‌دهد.

بیایید مثال بدیهی $m=n=۱$ را آزمایش کنیم. این چنین است

اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه $a|(b+c)$.

این یکی خوب است. این چیزی می‌گوید که احتمالاً بعدا نیز بتوانیم از آن استفاده کنیم. یعنی، اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه مجموع آن‌ها را نیز عاد می‌کند. به‌طور مشابه با قرار دادن $m=۱$ و $n=-۱$ نتیجه می‌گیریم که

اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه $a|(b-c)$.

نکته این است که در این تحقیق چیزهای مفیدی یافتیم.

تمرین ۲.۲۷.

سعی کنید از سایر روش‌های فصل ۱۶ استفاده کنید تا ببینید چه چیزی می‌توانید پیدا کنید.

اینک قضیه را اثبات می‌کنیم. در ابتدا باید بگوییم، که این اثبات مانند اثبات‌های استانداردی که در کتاب درسی ارائه می‌شود بیان نشده است. می‌خواهم نشان دهم که چگونه اثباتی همراه با اشتباه ساخته شده و در پایان به بن‌بست می‌رسد. سپس آن را به روشی که در کتاب درسی ارائه می شود بیان می‌کنم.

بیایید برخی از روش‌های حل مسئله را به کار ببریم، سوال بپرسید "چه چیزی می‌دانیم؟" و "این به چه معنی است؟"

چه می‌دانیم؟ می‌دانیم که $a|b$ و $a|c$. یعنی چه؟ برای دانستن معنی آن به تعریف برمی‌گردیم. (آن را از فصل ۱۵ به یاد آورید، چگونه یک تعریف را بخوانیم، بسیار حیاتی است که تعریف دقیق را بدانید، تعریف مبهم کافی نیست.) با بازگشت به تعریف (اگر نیاز دارید نگاه کنید، نیاز ندارید؟) دریافتیم که این به این معنی است که اعداد صحیح $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که $b=k_۱a$ و $c=k_۲a$.

چه می‌خواهم بدانم؟ می‌خواهم بدانم که برای تمام اعداد صحیح m و n، $a|(mb+nc)$ به چه معنایی است؟ به این معنی است که عدد $k_۳$یی وجود دارد به‌طوری که $mb+nc=k_۳a$. تجربه می‌گوید عدد $k_۳$ باید به $k_۱$ و $k_۲$ وابسته باشد، یعنی آنچه می‌خواهم به آنچه می‌دانم وابسته است. بیایید کمی محاسبه کنیم.

می‌دانیم $b=k_۱a$ و $c=k_۲a$ و می‌خواهیم $mb+nc=k_۳a$. به‌طور معمول به قسمت پیچیده معادله نگاه می‌کنیم و سعی می‌کنیم آن را بشکنیم.

$$\begin{aligned} mb+nc &= m(k_۱a)+n(k_۲a) \\ &= (mk_۱+nk_۲)a, \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد برای همه اعداد m و n، $a|(mb+nc)$ و $k_۳$ که دنبالش بودیم به‌صورت $k_۳=mk_۱+nk_۲$ است.

تمام کارها را انجام داده‌ایم؛ بیایید این را به‌درستی بنویسیم.

اثبات پیراسته :

برهان. بنا به فرض اعداد صحیح $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارند به‌طوری‌که $b=k_۱a$ و $c=k_۲a$. برای هر عدد صحیح m و n داریم

$$\begin{aligned} mb+nc &= m(k_۱a)+n(k_۲a) \\ &= (mk_۱+nk_۲)a, \end{aligned}$$

بنابراین، $mb+nc$ بر a بخش‌پذیر است. ■

این فرآیند اثبات را به پایان می‌رساند.

توجه ۲.۲۷.
درس‌هایی که آموخته شد:

- *عدد صحیح در اثبات نهایی نمایان نشده است. ضروری هم نیست، چرا که همه آنچه نیاز داشتیم این بود که بخش‌پذیری $mb + nc$ بر a را درک کنیم.*
- *توجه داشته باشید که در فرایند جستجوی اثبات از ساختار پرسشی استفاده شده است، چه چیزی می‌دانم؟ چه معنایی می‌دهد؟ چه می‌خواهم بدانم؟ معنی آن چیست؟*

اینک بیایید به نتیجه‌ای از این حکم نگاه کنیم. ممکن است این نتیجه را در هنگام تجزیه و تحلیل فصل ۱۶ نیز به‌دست آورده باشید.

نتیجه ۱.۲۷. *فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند. اگر a عدد b را عاد کند آنگاه، a عدد $b^۲$ را عاد می‌کند.*

برهان. کافی است که در قضیه قبل قرار دهید: $m = b$ و $n = ۰$. ■

این یک مثال کامل است که می‌توانیم بگوییم: "عکس آن چیست؟" عکس آن عبارت است از:
"فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند. اگر a عدد $b^۲$ را عاد کند آنگاه، a عدد b را عاد می‌کند."
به نظر قابل قبول است، اما درست نیست! به‌عنوان‌مثال، $a = ۴$ و $b = ۶$. سپس $b^۲ = ۶^۲ = ۳۶$ که بر ۴ بخش‌پذیر است ، اما ۴ عدد ۶ را عاد نمی‌کند.
دو حقیقت ساده‌تر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲۷.
فرض کنید a، b و c اعداد صحیح باشند. لذا

(۱) *اگر $a|b$ و $b|c$، آنگاه $a|c$.*
(۲) *اگر $a|b$ و $b|a$، آنگاه $a = b$ یا $a = -b$.*

چگونگی ساختن اثبات یک گزاره را قبل از نوشتن شکل اصلاح شده نهایی، به‌طور دقیق شرح خواهیم داد.
۱) چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ روشی که استفاده کردیم طبق تعریف بازنویسی یک عدد بر حسب عامل‌های آن است. بیایید دوباره آن را امتحان کنیم.
خُب، اینکه $a|b$ و $b|c$، بیانگر وجود اعداد صحیح $k_۱$ و $k_۲$ است به‌طوری‌که $b = k_۱a$ و $c = k_۲b$. با جایگزینی b در معادله آخر داریم $c = k_۲k_۱a$. بنابراین $a|c$.
اثبات پیراسته :

برهان. بنا به فرض اعداد صحیح $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارند به‌طوری‌که $b = k_۱a$ و $c = k_۲b$. بنابراین، $c = k_۲k_۱a$ و نتیجه می‌گیریم که a عدد b را عاد می‌کند. ■

توجه ۳.۲۷.
درس‌هایی که آموخته شد: توجه کنید که از همان روش قضیه قبل استفاده می‌کنیم (تعریف را اعمال کنید) دوباره یادآور می‌شویم که یادگیری تعاریف بسیار اهمیت دارد.

اینک اثبات (۲) را در نظر بگیرید. به مفروضات و دلایل آن‌ها نگاه کنید. به این مفهوم که چه می‌دانیم و معنی آن چیست؟
می‌دانیم که $b = k_۱a$ و $a = k_۲b$. بنابراین $b = k_۱k_۲b$، لذا $k_۱k_۲ = ۱$. می‌دانیم که $k_۱$ و $k_۲$ اعداد صحیح هستند، پس باید ۱ یا ۱- باشند. بنابراین $a = \pm b$ یا $b = \pm a$. صبر کنید، دقت کنید هر دو یکی هستند! بنابراین $a = \pm b$.

تمرین ۳.۲۷.
یک راه‌حل پیراسته بنویسید یا اثبات خودتان را ارائه دهید!

تمرین ۴.۲۷.
(آ) *آیا عکس گزاره‌های موجود در آخرین قضیه درست است؟ اگر چنین است، اثبات کنید، در غیر این‌صورت یک مثال نقض ارائه دهید.*

(ب) *ثابت کنید که اگر $a|b$ و $c|d$، آنگاه $ac|bd$.*

(ج) *اگر $a|b$ و $c|b$ آیا $ac|b$؟ اگر چنین است، اثبات کنید، در غیر این‌صورت یک مثال نقض ارائه دهید.*

اینک فرض کنید عددی را که می‌خواهیم تقسیم کنیم، یک چند جمله‌ای باشد.

مثال ۲.۲۷.
برای عدد زوج n، عبارت $n^۲ + ۲n + ۸$ بر ۴ بخش‌پذیر است.
برای نشان دادن این مطلب می‌دانیم که زوج بودن n، یعنی: به ازای یک عدد صحیح m، $n = ۲m$. سپس به عبارتی که می‌خواهیم بر ۴ بخش‌پذیر شود نگاهی می‌اندازیم:

$$n^۲ + ۲n + ۸ = (۲m)^۲ + ۲(۲m) + ۸ = ۴m^۲ + ۴m + ۸ = ۴(m^۲ + m + ۸).$$

چون $m^۲ + m + ۸$ یک عدد صحیح است، نتیجه می‌گیریم که $n^۲ + ۲n + ۸$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

تمرین ۵.۲۷.
نشان دهید به ازای هر $x \in \mathbb{Z}$ عبارت $x^۲ + ۹x + ۲۰$ بر ۲ بخش‌پذیر است.

تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.

قضیه بعد، قضیه استاندارد دیگری از ریاضیات است. اولین و مشهورترین اثبات این قضیه توسط اقلیدس ارائه شده است.

قضیه ۳.۲۷.
تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.

برهان. فرض کنید نقیض گزاره برقرار باشد: تعداد اعداد اول متناهی است، $p_۱$ تا p_n. عدد $p_۱p_۲...p_n + ۱$ از همه اعداد $p_۱$ تا p_n بزرگ‌تر است، لذا باتوجه‌به فرض نمی‌تواند اول باشد. ازسویِ‌دیگر، اگر این عدد را بر هر یک از p_jها تقسیم کنیم باقیمانده ۱ به‌دست می‌آید. حال فرض کنید این عدد بر یک عدد غیرِ اول کوچک‌تر از خود مانند b بخش‌پذیر باشد. بنا بر قضیه اولِ حساب به ازای یک p_i، عدد b بر p_i بخش‌پذیر است. بنابراین p_i عدد $p_۱p_۲...p_n + ۱$ را عاد می‌کند، ولی دیدیم که چنینِ چیزی درست نیست. این به این معنی است که عدد $p_۱p_۲...p_n + ۱$ فقط بر خودش و ۱ بخش‌پذیر است، یعنی عدد اول است.
نشان داده‌ایم که اگر تعداد اعداد اول متناهی باشد، آنگاه $p_۱p_۲...p_n + ۱$، هم اول نیست و هم اول است. این یک تناقض آشکار است. ■

تمرین ۶.۲۷.
اثبات فوق را تجزیه و تحلیل کنید. چند بار از تناقض استفاده کردیم؟

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م)

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح و غیرصفر a و b بزرگ‌ترین عدد صحیح مثبتی است که هر دو عدد را عاد می‌کند و با $gcd(a,b)$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات به‌عنوان بزرگ‌ترین عامل مشترک (gcf) یا بالاترین عامل مشترک (hcf) شناخته می‌شود

مثال ۳.۲۷.

(آ) *مقسوم‌علیه‌های مثبت ۲۰ عبارتند از ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰ و ۲۰. مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۲ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲. بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۴ است.*

(ب) *بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۳۶ و ۶۵، برابر ۱ است.*

تمرین ۷.۲۷.

مثال‌ها و نامثال‌های خود را بسازید به‌طوری‌که شامل اعداد منفی باشد، مانند $gcd(۵۵, -۳۵)$.

بیایید به برخی ویژگی‌های بنیادی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌مم) دو عدد بپردازیم.

قضیه ۴.۲۷.

برای هر دو عدد صحیح a و b داریم

(۱) $gcd(a, b) = gcd(b, a)$،

(۲) $gcd(a, b) \geq ۱$،

(۳) $gcd(a, b) = gcd(|a|, |b|)$،

(۴) $(\frac{a}{gcd(a,b)}, \frac{b}{gcd(a,b)}) = ۱$،

(۵) *برای همه اعداد صحیح،* $gcd(a, b) = gcd(a + nb, b)$.

برهان.

(۱) با استفاده از تعریف واضح است.

(۲) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک به‌عنوان یک عدد صحیح مثبت تعریف شده است، بنابراین باید بزرگ‌تر یا برابر با ۱ باشد.

(۳) یک تمرین ساده است.

(۴) بیایید با دادن یک نام به $gcd(a, b)$ شروع کنیم. فرض کنید $gcd(a, b) = d$. بنابراین به ازای برخی اعداد صحیح r و s داریم $a = rd$ و $b = sd$، زیرا بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک نیز یک مقسوم‌علیه است. لذا

$$gcd(\frac{a}{gcd(a, b)}, \frac{b}{gcd(a, b)}) = gcd(\frac{rd}{d}, \frac{sd}{d}) = gcd(r, s).$$

بیایید به این ب‌مم نیز یک نام نسبت دهیم. فرض کنید $gcd(r, s) = d'$. پس به ازای برخی اعداد صحیح p و q داریم $r = pd'$ و $s = qd'$، بنابراین $a = pdd'$ و $b = qdd'$. لذا dd' مقسوم‌علیه a و b است. اگر d' بزرگ‌تر از ۱ باشد، آنگاه dd' بزرگ‌تر از d است و این با بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک بودن d برای a و b، تناقض دارد.

(۵) این قسمت می‌گوید که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b با مجموع $a + nb$ مرتبط هستند و به‌طور خاص چیزی درمورد مقسوم‌علیه آن‌ها بیان می‌کند. پس از خود بپرسیم چه قضیه‌ای می‌شناسیم که ارتباط بین مقسوم‌علیه‌ها و مجموع‌ها را بیان کند؟ با نگاهی به گذشته متوجه می‌شویم که قضیه ۱.۲۷ دارای مفروضات و نتیجه‌گیری‌هایی است که شامل مقسوم‌علیه و مجموع‌هاست. بنابراین از آن استفاده خواهیم کرد و ببینید چه اتفاقی رخ می‌دهد.

با استفاده از تعریف "ب‌مم" داریم $gcd(a, b)|a$ و $gcd(a, b)|b$. لذا بنابر قضیه ۱.۲۷ عدد $gcd(a, b)$ عدد $a + nb$ را عاد می‌کند. بنابراین $gcd(a, b)$ مقسوم‌علیه مشترک b و $a + nb$ است. این باید کوچک‌تر از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک باشد، در نتیجه داریم $gcd(a, b) \leq gcd(a + nb, b)$.

این آن چیزی نیست که می‌خواستیم اثبات کنیم. خواهان یک برابری هستیم. با این وجود مشکلی نیست، چون $x = y$ هم‌ارز با $x \leq y$ و $y \leq x$ است. بنابراین باید ثابت کنیم که $gcd(a + nb, b) \leq gcd(a, b)$. منطقی به نظر می‌رسد که بتوانیم از استدلالی مشابه بالا استفاده کنیم. اثبات تقریبا یکسان است:

با استفاده از تعریف ب‌م‌م داریم $gcd(a+nb, b)|a+nb$ و $gcd(a+nb, b)|b$. لذا بنابر قضیه ۱.۲۷ عدد $gcd(a+nb, b)$ عدد $(a+nb)+(-n)b$ را عاد می‌کند. بنابراین $gcd(a+nb, b)$ مقسوم‌علیه مشترک a و b است. این ب از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها نیست، در نتیجه داریم $gcd(a + nb, b) \leq gcd(a, b)$.

بنابراین چون $gcd(a, b) \leq gcd(a + nb, b)$ و $gcd(a + nb, b) \leq gcd(a, b)$، داریم:

$$gcd(a, b) = gcd(a + nb, b).$$

■

تمرین ۸.۲۷.

(آ) *با استفاده از برهان خلف اثبات پیراسته‌ای برای قسمت (۴) بنویسید.*

(ب) *اثبات پیراسته‌ای برای قسمت (۵) بنویسید. آیا می‌توانید دو استدلال را ترکیب کنید.*

(ج) *از قضیه فوق و استدلال آن چه درس‌هایی آموختید؟*

اشتباهی رایج

اشتباه رایجی که توسط مبتدیان رخ می‌دهد این است که فکر می‌کنند اگر $n|ab$ آنگاه باید n یکی از a و b را عاد کند؛ ولی همیشه برقرار نیست.

مثال ۴.۲۷.

فرض کنید $n = ۶$، $a = ۴$ و $b = ۹$. پس $۶|۴ \times ۹$ درست است ولی $۶ \nmid ۴$ و $۶ \nmid ۹$.

این مثال نقضی برای گزاره فوق است و اگر بیشتر نگاه کنیم می‌بینیم چه اتفاقی رخ می‌دهد. داریم $a = ۴ = ۲ \times ۲$ و $b = ۹ = ۳ \times ۳$، لذا $ab = (۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳) = ۲ \times (۳ \times ۲) \times ۳$ بنابراین بخشی از مقسوم‌علیه (یعنی ۶)، از a و بخشی از b به‌دست می‌آید.

بعدا خواهیم دید (در لم اقلیدس، صفحه ۲۶۸) که می‌توانیم یک شرط اضافی به گزاره اشتباه فوق اضافه کنیم تا یک قضیه تولید شود. فعلا بهتر است که از این برداشت غلط پرهیز کنیم.

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

(آ) عدد n بر ۳ بخش‌پذیر است،
(ب) عدد n بر ۹ بخش‌پذیر است،
(ج) عدد n بر ۱۲ بخش‌پذیر است،
(د) $n = ۲۴$،
(و) عدد $n^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است،
(ه) عدد n زوج است و بر ۳ بخش‌پذیر است.

کدام یک از این شرایط برای بخش‌پذیر بودن n بر ۶ لازم است؟ کدام یک کافی است؟ کدام یک کافی و لازم است؟

۲. نشان دهید که برای هر عدد صحیح مثبت x، عدد $x^۳ - x$ بر ۳ و عدد $x^۵ - ۵$ بر ۵ بخش‌پذیر است. می‌توانید آن را تعمیم دهید؟ آیا $x^n - x$ بر n بخش‌پذیر است؟

۳. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{Z}$، عدد $x^۳ - ۶x^۲ + ۱۱x - ۶$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۴. نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، اگر عدد $n \geq ۴$ اول نباشد، آنگاه $n|(n-۱)!$.

۵. ثابت کنید برای همه $a, b \in \mathbb{Z}$، هر مقسوم‌علیه مشترک a و b، مقسوم‌علیه $gcd(a,b)$ نیز هست.

۶. ثابت کنید برای همه $m, n \in \mathbb{Z}$، $gcd(m+۱, n+۱)|mn-۱$.

۷. اشتباه رایج (ذکر شده در بالا) این است که "اگر $n|ab$ آنگاه باید n یکی از a و b را عاد کند." این درست نیست. اگر فرض $a = b$ را اضافه کنیم چه گزاره‌ای به‌دست می‌آید، آیا این درست است؟ اگر علاوه بر این فرض کنیم که n اول باشد چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۸. ثابت کنید برای همه $m, n \in \mathbb{Z}$،
$$m^۲|n^۲ \Longrightarrow m|n.$$

۹. موارد زیر را اثبات کنید.

(آ) یک عدد طبیعی بر ۲ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر آخرین رقم آن بر ۲ بخش‌پذیر باشد.
(ب) یک عدد طبیعی بر ۴ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر عددی که دو رقم آخر آن تشکیل می‌دهد بر ۴ بخش‌پذیر باشد.
(ج) یک عدد طبیعی بر ۸ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر عددی که سه رقم آخر آن تشکیل می‌دهد بر ۸ بخش‌پذیر باشد.
آیا می‌توانید این مطلب را تعمیم دهید و تعمیم آن را اثبات کنید؟

۱۰. ثابت کنید برای همه $x, y \in \mathbb{Z}$ و هر $n \in \mathbb{N}$، عدد $x - y$، $x^n - y^n$ را عاد می‌کند. بنابراین نشان دهید:

(آ) برای هر n، عدد $۴ \times ۱۱^n + ۲ \times ۵^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.
(ب) برای هر n، عدد $۶ \times ۹^n - ۴^n$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۱. وقتی که $n \in \mathbb{N}$، **n امین عدد فرما** را با $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ تعریف می‌کنند.

(آ) ثابت کنید
$$\prod_{k=۰}^{n} F_k = F_{n+۱} - ۲.$$

(ج) نشان دهید که برای هر جفت عدد فرمای مجزای F_j و F_l داریم $gcd(F_j, F_l) = ۱$.

چکیده

- عدد صحیح a عدد صحیح b را عاد می‌کند، اگر عدد صحیح k موجود باشد به‌طوری‌که $b = ka$.
- گوییم b بخش‌پذیر بر a است و می‌نویسیم $a|b$.
- گوییم a مقسوم‌علیه b است.
- اگر $a|b$ و $a|c$، آنگاه برای همه اعداد صحیح m و n داریم $a|(mb + nc)$.
- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b عبارت است از بزرگ‌ترین عدد صحیحی که هر دو عدد را عاد می‌کند و آن را با $gcd(a, b)$ نشان می‌دهیم.
- اینکه $n|ab$ نتیجه نمی‌دهد که n یکی از a و b را عاد کند.

فصل ۲۸

الگوریتم اقلیدس

هر الگوریتم باید دیده شود تا باورپذیر گردد.

"دونالد نوت[1]، هنر برنامه‌نویسی کامپیوتر، جلد ۱، ۱۹۹۹."

الگوریتم اقلیدس[2] یک ابزار بسیار قدرتمند است. آن را روی سه مسئله اعمال خواهیم کرد:

- *پیدا کردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد.*
- *پیدا کردن جواب‌های صحیح برای معادلاتی مانند $32x + 17y = 45$، یعنی معادلاتی به‌شکل $ax + by = c$.*
- *پیدا کردن فرض‌های اضافی به‌طوری‌که وقتی $n|ab$ بتوانیم درمورد اینکه n اعداد a یا b را عاد کند یا نکند چیزی بگوییم.*

اینک چگونگی خلق اثبات‌ها و ویرایش آن‌ها برای نسخه نهایی را نشان خواهیم داد. امیدوارم این کار نشان دهد که بین روش خلق یک اثبات و چگونگی ارائه آن، تفاوت زیادی وجود دارد.

لم تقسیم

یک روش بدیهی برای پیدا کردن بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عددصحیح، تجزیه آن‌ها به عوامل اول است. می‌دانیم که می‌توان این کار را با استفاده از قضیه اساسی حساب (قضیه ۱.۲۵) انجام داد، و عامل‌های اول و مشترک آن‌ها را پیدا کرد. از ضرب این عامل‌های مشترک در هم ب.م.م به‌دست می‌آید. به‌عنوان‌مثال، $440 = 2^3 \times 5 \times 11$ و $1300 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13$. عامل‌های مشترک عبارتند از 2^2 و ۵، بنابراین ب.م.م. برابر است با $2^2 \times 5 = 20$.

مشکل این است که تجزیه اعداد بزرگ سخت است[3]. به‌جای این روش بی‌قاعده، روشی مفیدتر ارائه می‌دهیم. برای این کار با یک لم آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۲۸. *(لم تقسیم)*
فرض کنید x و y و $y > 0$ اعداد صحیح ناصفر باشند، آنگاه اعداد صحیح منحصربه‌فرد q و r وجود دارند به‌طوری‌که $x = qy + r$ وقتی که $0 \le r < y$.

البته که باید خودتان را متقاعد کنید که این گزاره منطقی است. چند نمونه را امتحان کنید. به آسانی می‌توان دید که q و r چه چیزهایی می‌توانند باشند. عدد x را بر y تقسیم کنید، عددی به‌دست می‌آید که احتمالا صحیح نیست. قسمت صحیح این عدد را q بنامید و قرار دهید $r = x - qy$. از این روش مقدار q و r به‌دست می‌آید.

---

[1] دونالد اروین نوت (*Donald Ervin Knuth*) زاده ژانویه ۱۹۳۸ یک ریاضی‌دان و دانشمند علوم کامپیوتر از آمریکا است.
[2] هر الگوریتم فهرستی از دستورالعمل‌ها برای انجام یک کاری خاص است.
[3] منظور همان سخت است! امنیت اینترنتی به این واقعیت وابسته است.

باید این سوال را مطرح کنید که چرا به عدد صحیح ناصفر نیاز داریم؟ چرا نیازمند $y > \circ$ هستیم؟ (پاسخ داده خواهد شد.)

برهان. بیایید با تفکر ریاضی پیش برویم. نتیجه گزاره این است که اعداد منحصربه‌فرد خاصی وجود دارند. روش استاندارد برای پرداختن به چنین مسئله‌هایی به این صورت است که ابتدا وجود و سپس منحصربه‌فرد بودن آن را اثبات کنیم. (این ایده را در دفترچه ثبت ایده‌های خود برای مواجهه با مسئله‌های بعدی یادداشت کنید.) باید اثبات کنیم که خاصیت $\circ \leq r < y$ نیز برقرار است. امکان دارد که این خاصیت از اثبات وجود حاصل شود.

واضح است که باید x را بر y تقسیم کنیم و باقیمانده r را به‌دست آوریم. ساده‌ترین راه برای انجام تقسیم و اجتناب از همه ریاضیات وحشتناکی که در مواجهه با اعداد حقیقی به‌جای اعداد صحیح وجود دارد، این است که از تفریق استفاده کنید. به‌عبارت‌دیگر، $x - y$، $x - ۲y$، $x - ۳y$،... را محاسبه می‌کنیم و این فرآیند را ادامه می‌دهیم تا عددی به‌دست آید که اگر y را از آن کم کنیم یک مقدار منفی حاصل شود. آن عدد نهایی، r است. بنابراین در جستجوی کوچک‌ترین عدد صحیحی به‌شکل $x - sy \geq \circ$ هستیم که در آن s یک عدد صحیح است. این کوچک‌ترین عدد را r بنامید و فرض کنید q عددی صحیح باشد به‌طوری‌که $r = x - qy$. پس q و r اعدادی صحیح هستند که به‌شکل رابطه $r = x - qy$ آن‌ها را جستجو می‌کردیم و می‌توان آن را به‌شکل $x = qy + r$ بازنویسی کرد.

مجموعه $S = \{x - sy | s \in \mathbb{Z},\ x - sy \geq \circ\}$ را در نظر بگیرید؛ کوچک‌ترین عضو آن که در جستجویش بودیم، r است. در حقیقت، باید نشان دهیم که این کوچک‌ترین عضو وجود دارد. واضح است که یک مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت باید کوچک‌ترین عضو داشته باشد.[۴] بنابراین همه آنچه که باید انجام دهم این است که نشان دهم این مجموعه خالی نیست. مجبور نیستم کوچک‌ترین عضو را پیدا کنم، فقط به وجود آن نیاز دارم!

اگر $x > \circ$، آنگاه $x \in S$ زیرا $x \in S = x - (\circ \times y)$. اگر $x < \circ$ چطور؟ در این حالت به یک s منفی نیاز داریم به‌طوری‌که $x - sy \geq \circ$. بسیار خوب، اگر $x < \circ$، آنگاه $x - xy = x(۱ - y) \geq \circ$. بنابراین $x(۱ - y) \in S$.

بنابراین S یک مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت است و باید دارای کوچک‌ترین عضو باشد و همانطور که مشاهده کردیم، این q و r را به دست می‌دهد.

اینک استدلال را به روش ریاضی بازنویسی خواهیم کرد. توجه داشته باشید کاری که در بالا انجام دادیم به‌طور کامل از پاسخ، پیراسته شده است. به‌عنوان‌مثال پاسخ پیراسته را با تعریف مجموعه S بدون توضیح اینکه چرا به آن نیاز داریم یا از کجا آمده است، آغاز می‌کنیم. درست است تلاش می‌کنیم فرد را متقاعد کنیم که q و r وجود دارند، اما سعی نمی‌کنیم چگونگی یافتن اثبات را نشان دهیم.

مجموعه $S = \{x - sy | s \in \mathbb{Z},\ x - sy \geq \circ\}$ را در نظر بگیرید. اگر $x > \circ$ آنگاه $x \in S = x - (\circ \times y)$. بنابراین $x - xy = x(۱ - y) \geq \circ$. بنابراین، $x(۱ - y) \in S$. اگر $x < \circ$، آنگاه $x \in S$ زیرا $x \in S = x - (\circ \times y)$. بنابراین S یک مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت است و دارای کوچک‌ترین عضو است. این کوچک‌ترین عضو را r بنامید و فرض کنید q عدد صحیحی باشد به‌طوری‌که $r = x - qy$. پس q و r اعداد صحیحی هستند که با رابطه $r = x - qy$ یافتیم و می‌توان آن را به‌شکل $x = qy + r$ بازنویسی کرد.

درسی که آموختیم: توجه کنید که اثبات پیراسته از جایی در وسط کار اصلی آغاز شد. با تعریف مجموعه S شروع کردیم. باور نمی‌کنم این اولین گام کسی باشد که سعی دارد با اثبات مواجه شود. لذا نکته آموزنده این است که انجام اثبات و ارائه آن بسیار متفاوت اند.

تا کنون مسئله وجودی را اثبات کردیم. به‌هرحال باید نشان دهیم که $\circ \leq r < y$. اولین نامساوی واضح است، زیرا r عضو مجموعه ناتهی S از اعداد صحیح نامنفی است. چگونه نشان دهیم که $r < y$؟ همان کاری را می‌کنیم که یک ریاضی‌دان انجام می‌دهد. برای مقایسه دو عدد یکی را از دیگری کم می‌کنیم و ببینید چه اتفاقی رخ می‌دهد:

$$r - y = (x - qy) - y = x - (q + ۱)y.$$

[۴] واضح است، اما واقعا چیزی را پنهان می‌کنم، از جانب همکارانم به دلیل اعتراض به این ادعای واضح بودن احساس خطر می‌کنم. اگر درمورد اینکه از **اصل خوش‌ترتیبی** به‌دست می‌آید چیزی نگویم، نامه‌ها، ایمیل‌ها، تهدیدهای مرگ‌آمیز و غیره دریافت خواهم کرد. در حال حاضر مهم نیست. ولی تمرین‌های انتهای فصل را ببینید.

حال می‌دانیم که $r-y$ دقیقا به‌شکل "$x-sy$" است که در S می‌باشد. اما کمتر از r است (آیا می‌دانید چرا؟). این با کوچک‌ترین عضو S بودن r در تناقض است. لذا، $r-y$ در شرط دیگر عضو S بودن (یعنی $x-sy \geq 0$) صدق نمی‌کند. بنابراین باید داشته باشیم $r-y = x-y(1+q) < 0$ ، در نتیجه $r<y$.

درسی که آموختیم: برای اینکه نشان دهیم $r<y$، نشان می‌دهیم عبارت $r-y$ کمتر از ۰ است.

بیایید یک نسخه پیراسته از این کار را انجام دهیم. پاسخ زیر به‌طور مستقیم از آخرین پاسخ پیراسته به‌دست می‌آید.

از اینکه $r \in S$ و S یک مجموعه از اعدادصحیح نامنفی است، پس $r \geq 0$، همچنین داریم

$$r-y = (x-qy)-y = x-(q+1)y,$$

بنابراین، اگر $x-(q+1)y \geq 0$، آنگاه $r-y \in S$. اما r کوچک‌ترین عضو S است و باید $r-y$ کوچک‌تر باشد. بنابراین، $r-y = x-y(q+1) < 0$ یعنی $r<y$.

برای اثبات منحصربه‌فردی، مانند ریاضی‌دانان عمل کرده و از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که اعداد منحصربه‌فرد نباشند و نشان می‌دهیم که این منجر به تناقض می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم که آن‌ها متفاوت‌اند و سپس نشان می‌دهیم که اختلاف آن‌ها صفر است، به‌عبارت‌دیگر، آن‌ها متفاوت نیستند. اما نمی‌توانند هم‌زمان متفاوت و یکسان باشند!

فرض کنید اعداد q' و r' موجود باشند که با شرط $0 \leq r' < y$ در رابطه $x = q'y + r'$ صدق کنند و $q \neq q'$ یا $r \neq r'$. (این دومی به این معنی است که زوج‌های (q,r) و (q',r') متفاوت هستند.) آنگاه به‌طور معمول طرفین را از هم کم می‌کنیم تا تساوی زیر به‌دست آید

$$0 = (q-q')y + (r-r').$$

این نشان می‌دهد که $(q-q')y = r'-r$. بنابراین باید داشته باشیم $q \neq q'$. اینک حالت $q-q' > 0$ را در نظر می‌گیریم و لذا عبارت $(q-q')y$ در $(q-q')y = r'-r$ مثبت است. مطمئن نیستم که این مسیر مناسبی باشد. فقط آن را آسان‌تر می سازد. اگر $q-q' > 0$، آنگاه $q-q'$ حداقل برابر ۱ است، بنابراین $y \leq r'-r$. اما این تناقض است، زیرا r و r' هر دو نامنفی و کوچک‌تر از y هستند.

این درمورد حالت $q > q'$. اکنون احتمالا می‌توانیم بحثی مشابه برای $q < q'$ داشته باشیم، یعنی $q-q' < 0$ توجه کنید تفاوت خاصی بین q و q' نیست. همواره بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد q بزرگ‌تر از q' است. در غیر این صورت می‌توان q را q' و q' را q نامید.

اینک راه‌حل پیراسته:

فرض کنید q و r منحصربه‌فرد نباشند. بنابراین اعداد q' و r' وجود دارند که با شرط $0 \leq r' < y$ در رابطه $x = q'y+r'$ صدق می‌کنند و $q \neq q'$ یا $r \neq r'$. اگر $q = q'$، آنگاه $r = x-qy = x-q'y = r'$. بنابراین می‌توان فرض کرد q و q' متمایز هستند. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $q > q'$. لذا، $x = qy+r$ و $x = q'y+r'$ نتیجه می‌دهد که $(q-q')y = r-r'$. چون $q-q' > 0$ و حداقل برابر ۱ است، بنابراین $y \leq r-r'$. اما این با اینکه r و r' هر دو نامنفی و کوچک‌تر از y هستند در تناقض است .

همان‌طور که می‌بینید همه بخش‌ها اعم از وجود (از جمله شرطی که در آن صدق می‌کند) و منحصربه‌فردی هر دو انجام شد. ■

تعمیم لم تقسیم

بیایید دوباره به فرض لم تقسیم نگاه کنیم. شرط $y > 0$ ضروری بود؟ پس از همه این بحث‌ها، به نظر منطقی است که اگر $y = -5$ و $x = 21$، باید بتوانیم اعداد صحیح q و r را پیدا کنیم:

$21 = (-5) \times (-4) + 1$. آیا واقعا از فرض $y > 0$ استفاده می‌کنیم؟ در حقیقت، استفاده کرده‌ایم. اگر y منفی بود، آنگاه برای s مثبت در عبارت $x - sy$، مقداری اضافه می‌شود برخلاف اینکه نیاز داریم چیزی کم شود.

پس می‌توان فرض $y > 0$ را حذف کرد؟ این شرط برای اثبات لازم بود. اما شاید اثباتی وجود دارد که بتوان این فرض را در آن نادیده گرفت؟ هرگاه نتیجه را اندکی تغییر دهیم پاسخ مثبت است.

در شرط $0 \leq r < y$ فرض $y > 0$ لازم است. اگر قرار دهیم $y = -5$، آنگاه نیاز است که $0 \leq r < -5$ باشد؛ شرطی که هرگز محقق نمی‌شود. قدر مطلق y را جایگزین می‌کنیم، لذا شرط مورد نیاز برای $y = -5$ این است که $0 \leq r < |-5| = 5$ باشد. حالا یک قضیه داریم:

لم ۲.۲۸. (*تعمیم لم تقسیم*)

فرض کنید x و y اعداد صحیح غیر صفر باشند. دراین‌صورت اعداد صحیح منحصربه‌فرد q و r وجود دارند به‌طوری‌که $x = qy + r$، وقتی که $0 < r \leq |y|$.

برهان. قبلا قضیه را برای $y > 0$ اثبات کرده‌ایم، اینک برای $y < 0$ انجام می‌دهیم. اغلب هنگام برخورد با حالت‌های مختلف می‌توانیم اثبات را با اصلاحاتی جزئی تکرار کنیم. در این مورد نیز احتمالا می‌توانیم، اما باید به بزرگ‌ترین عنصر در S و چیزهای دیگر دقت کنیم. بااین‌حال، در این مورد یک روش هوشمندانه برای تعمیم اعداد طبیعی به اعداد صحیح وجود دارد، می‌توان آن را در شرایط دیگر نیز استفاده کرد. بیایید این روش را در عمل ببینیم.

می‌دانیم که قضیه برای $y > 0$ برقرار است. بنابراین اگر قرار دهیم $y' = -y$، آنگاه چون y' قرینه یک عدد منفی است، مثبت می‌باشد. بنابراین می‌توان لم تقسیم را روی x و y' به کار گرفت:
اعداد q' و r' وجود دارند به‌طوری‌که $x = q'y' + r'$ و $0 \leq r' < y'$. این درمورد آنچه که برای y رخ می‌دهد چه چیزی می‌گوید؟ با جایگزینی $-y$ به‌جای y' داریم: $x = q'(-y) + r'$ وقتی که $0 \leq r' < -y$. یعنی $x = (-q')y + r'$ که $0 \leq r' < |-y|$.

فرض کنید $q = -q'$ و $r = r'$. پس اعداد q و r را با شرایط $x = qy + r$ و $0 \leq r < |y|$ یافتیم.

آیا این یعنی نسخه جدید را اثبات کرده‌ایم؟ خیر، زیرا این گزاره ادعای q و r منحصربه‌فرد می‌کند. آیا در حالت $y > 0$ برای اثبات منحصربه فردی از $y > 0$ استفاده کردیم؟ اگر به عقب برگردید و بررسی کنید، خواهید دید که از آن استفاده نکرده‌ایم، در اثبات بخش وجودی از آن استفاده شد. از این رو، می‌توان یکی از دو کار زیر را انجام داد. بخشی از اثبات را بازنویسی کرده یا بگوییم "اثبات منحصربه‌فردی مشابه اثبات قضیه ۱.۲۸ است."

حال اثبات پیراسته‌ای از تعمیم لم ارائه می‌دهیم.

برهان. **(تعمیم لم تقسیم)** قرار دهید $y' = -y$، لذا بنا بر قضیه ۱.۲۸ اعداد صحیح q و r به‌طوری‌که $x = qy' + r$ و $0 \leq r < y'$. پس $x = (-q)y + r$ و $0 \leq r < |y|$. اثبات منحصربه‌فرد بودن q و r مشابه اثبات قضیه ۱.۲۸ است.
توجه داشته باشید که در اثبات از نماد q' و r' استفاده نکردیم، فقط از q و r استفاده کردیم. خواننده باید توجه کند که وقتی $x = (-q)y + r$ به کار می‌رود $-q$ همان q مورد نظر است! گاهی ممکن است نمادگذاری‌ها مبهم باشد. ■

درس‌هایی که آموختیم:
- دو نسخه متفاوت از لم تقسیم بیان شد، یکی از این دو کلی‌تر از دیگری است. اگر کتاب‌های مختلف را بررسی کنید، متوجه خواهید شد که نویسندگان معمولا فقط یکی از آن‌ها را ارائه می‌دهند. چنین چیزی در ریاضیات بسیار مرسوم است. بعضی از نویسندگان به تعمیم یک نتیجه نیازی ندارند، بنابراین دست به گزینش می‌زنند و گزاره ساده‌تر را انتخاب می‌کنند.
- برای مسائل مربوط به اعدد صحیح ابتدا باید از عدد صحیح مثبت استفاده کنید. پس از آن می‌توان روش حل را یافت. برای مثال، ممکن است از روش استقرا استفاده کنیم. سپس روش استفاده از حالت مثبت را برای اثبات حالت منفی مورد استفاده قرار می‌دهیم.

الگوریتم اقلیدس

الگوریتم اقلیدس فقط استفاده مکرر از لم تقسیم است. در لم با جایگزینی x و y، اعداد q و r را با شرط $0 \leq r < y$ به‌دست آورده، سپس y و r را در لم قرار می‌دهیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا باقیمانده صفر شود.

قضیه ۱.۲۸. الگوریتم اقلیدس

فرض کنید x و y اعداد صحیح باشند. دراین‌صورت اعداد صحیحح q_1، q_2، ...، q_k و یک دنباله r_1، r_2، r_3، ... r_k و

$r_{k+1} = 0$ *از اعداد صحیح مثبت وجود دارند به‌طوری‌که:*

$$\begin{aligned} x &= q_1 y + r_1 \\ y &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ r_2 &= q_4 r_3 + r_4 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_{k-1} r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_k r_k + 0. \end{aligned}$$

همچنین $gcd(x, y) = r_k$. *در این‌جا منظور از یک دنباله نزولی این است که* $0 < r_k < \dots < r_2 < r_1$.

توجه ۱.۲۸.
در واقع مهم‌ترین بخش قضیه بالا، بخش پایانی آن است؛ زیرا روشی ارزشمند برای محاسبه ب.م.م دو عدد صحیح را تشریح می‌کند.

برهان. بدیهی است که لم تقسیم را بارها و بارها اعمال کنیم؛ در هر مرحله داریم $0 \le r_i \le r_{i-1}$. (آیا می‌دانید چرا؟) چون یک دنباله‌ی نزولی نامنفی داریم این فرآیند نهایتا در مرحله‌ای از مراحل، مقدار باقیمانده ۰ را تولید می‌کند. حال باتوجه‌به قسمت‌های (۱) و (۵) قضیه ۴.۲۷ و این حقیقت که اگر $a|b$، آنگاه $gcd(a, b) = a$، داریم
$gcd(x, y) = gcd(y, r) = gcd(r, y)$ و به کمک آن می‌توان $gcd(x, y) = r_k$ را نتیجه گرفت. ■

اینک برخی از کاربردهای الگوریتم را ارائه می دهیم. ابتدا الگوریتم را در عمل می‌بینیم.

محاسبه ب.م.م

مثال ۱.۲۸.
مقدار $gcd(14441, 3563)$ *را محاسبه کنید.*
لم تقسیم را چندین بار اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 14441 &= 4 \times 3563 + 189 \\ 3563 &= 18 \times 189 + 161 \\ 189 &= 1 \times 161 + 28 \\ 161 &= 5 \times 28 + 21 \\ 28 &= 1 \times 21 + 7 \\ 21 &= 3 \times 7 + 0. \end{aligned}$$

بنابراین $gcd(14441, 3563) = 7$.

توجه داشته باشید این روش محاسبه‌ای بدون روح است که شروع و پایانش معنی خاصی ندارد. اگر می‌خواستیم که به روش روشن‌تری ب.م.م را پیدا کنیم، باید همه عامل‌های ۱۴۴۴۱ و ۳۵۶۳ را یافته که کار ساده‌ای نیست، و با در هم ضرب کردن همه عوامل مشترک، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک را بیابیم. سعی کنید این کار را انجام دهید، خواهید دید که روش بالا آسان‌تر است.

تمرین ۱.۲۸.

(آ) *مقدار* $gcd(۳۱۵,۴۶۲)$ *را بیابید.*

(ب) *مقدار* $gcd(۵۴۶,۹۱۰۰)$ *را بیابید.*

(ج) *بدون استفاده از قسمت (۵) قضیه ۴.۲۷، گزاره زیر را اثبات کنید.*
فرض کنید برای $x,y,q,r \in \mathbb{Z}$*، عدد* y *عدد* x *را عاد نمی‌کند و* $x = qy + r$*. ثابت کنید* $gcd(x,y) = gcd(y,r)$. *(مثال کاملی است از چگونگی حل یک مسئله با شکستن آن به مسئله‌های کوچک‌تر، ابتدا نشان دهید که اگر* $gcd(x,y) = d$*، آنگاه* d *اعداد* y *و* r *را عاد می‌کند. سپس نشان دهید که* d *بزرگ‌ترین عدد صحیح با این خاصیت است. قسمت آخر مثالی کامل از اثبات به روش برهان خلف است. فرض کنید که یک عدد بزرگ‌تر وجود دارد و ادامه دهید.)*

با معکوس کردن الگوریتم می‌توان قضیه جالبی تولید کرد.

قضیه ۲.۲۸.

فرض کنید x *و* y *دو عدد صحیح باشند. دراین‌صورت اعداد صحیح* k *و* l *وجود دارند به‌طوری‌که* $kx + ly = gcd(x,y)$.

برهان. تمرین (قبل از تلاش، مثال زیر را ببینید.). ■

مثال ۲.۲۸.

مقدار $gcd(۱۴۴۴۱,۳۵۶۳)$ *را به‌شکل* $۱۴۴۴۱k + ۳۵۶۳l$ *به‌طوری‌که* $k,l \in \mathbb{Z}$*، بیان کنید.*
برای پیدا کردن عبارت مورد نظر، خروجی الگوریتم اقلیدسی را در مثال ۱.۲۸ در نظر می‌گیریم و رو به عقب کار می‌کنیم. در آن مثال به‌دست آوردیم: $۷ = gcd(۱۴۴۴۱,۳۵۶۳)$. *ابتدا از پایین‌ترین سطر محاسبات استفاده می‌کنیم:*

$$
\begin{aligned}
۷ &= ۲۸ - ۱ \times ۲۱ \\
&= ۲۸ - ۱ \times (۱۶۱ - ۵ \times ۲۸) \quad \text{جایگزینی ۲۱ با استفاده از خط چهارم الگوریتم} \\
&= ۶ \times ۲۸ - ۱ \times ۱۶۱ \\
&= ۶ \times (۱۸۹ - ۱ \times ۱۶۱) - ۱ \times ۱۶۱ \quad \text{جایگزینی ۲۸ با استفاده از خط سوم} \\
&= ۶ \times ۱۸۹ - ۷ \times ۱۶۱ \\
&= ۶ \times ۱۸۹ - ۷ \times (۳۵۶۳ - ۱۸ \times ۱۸۹) \quad \text{جایگزینی ۱۶۱ با استفاده از خط دوم} \\
&= ۱۳۲ \times ۱۸۹ - ۷ \times ۳۵۶۳ \\
&= ۱۳۲ \times (۱۴۴۴۱ - ۴ \times ۳۵۶۳) - ۷ \times ۳۵۶۳ \quad \text{جایگزینی ۱۸۹ با استفاده از خط اول} \\
&= ۱۳۲ \times (۱۴۴۴۱ - ۴ \times ۳۵۶۳) - ۷ \times ۳۵۶۳ \\
&= ۱۳۲ \times ۱۴۴۴۱ - ۵۳۵ \times ۳۵۶۳.
\end{aligned}
$$

بنابراین $k = ۱۳۲$ *و* $l = -۵۳۵$.

اگر به سوال " آیا k و l منحصربه‌فرد هستند؟" یک امتیاز برای پاسخ و اگر نشان دهید که وجود ندارند دو امتیاز می‌گیرید. به سادگی می‌توان نشان داد:

$$۷ = (۳۲ + ۳۵۶۳) \times ۱۴۴۴۱ - (۵۳۵ + ۱۴۴۴۱) \times ۳۵۶۳.$$

توجه داشته باشید که فقط از رابطه $ab - ba = ۰$ استفاده کردیم.
به‌طورکلی این عدم منحصربه‌فردی منجر به مشکل خاصی نمی‌شود و در بخش مربوط به معادلات دیوفانتی از آن استفاده خواهد شد.

لم اقلیدس

مثال ۴.۲۷ را در نظر بگیرید، دیدیم که اگر $n|ab$ آنگاه ضرورتی ندارد که n یکی از a یا b را عاد کند. با اضافه کردن یک فرض بیشتر می‌توان چنین گزاره‌ای را به‌دست آورد. گزاره حاصل را لم اقلیدس می‌نامیم. توجه داشته باشید که این لم یک نتیجه از الگوریتم اقلیدس است!

نتیجه ۱.۲۸. (لم اقلیدس)

فرض کنید n، a و b اعداد طبیعی باشند. اگر $n|ab$ و $gcd(n,a) = ۱$، آنگاه $n|b$.

برهان. چون $gcd(n,a) = ۱$ ، اعداد صحیح k و l وجود دارند به‌طوری‌که $kn + la = ۱$. بنابراین $knb + lab = b$. بدیهی است $n|knb$. همچنین داریم $n|ab$. پس $n|knb + nab$. یعنی $n|b$. ■

باتوجه‌به لم بالا، اگر $n|ab$ و n، عدد a را عاد نکند آنگاه n، عدد b را باید عاد کند.

شرط استفاده شده در لم بالا مبنی بر اینکه "بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد برابر ۱ است" آنچنان با اهمیت است که به آن نامی ویژه نسبت می‌دهیم.

تعریف ۱.۲۸.

اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح ۱ باشد، آن‌ها را **متباین** *یا* **نسبت به هم اول** *گوییم.*

تمرین ۲.۲۸.

مثال‌ها و نامثال‌هایی از اعداد صحیح متباین بیابید.

به کمک لم اقلیدس می‌توانیم قضیه زیر را نتیجه بگیریم.

قضیه ۳.۲۸.

اگر p اول باشد و ab را عاد کند، آنگاه p ، a یا b را عاد می‌کند.

تمرین ۳.۲۸.

قضیه فوق را اثبات کنید.

از این قضیه می‌توان نتیجه‌ای درمورد گنگ بودن اثبات کرد.

نتیجه ۲.۲۸.

اگر عدد n مربعی نباشد، آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است.

برهان. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $\sqrt{n} = \frac{r}{s}$ که r و s اعداد صحیح باشند. فرض کنید $\frac{r}{s}$ در ساده‌ترین شکل خود باشد، یعنی پس از حذف هر عامل مشترک، $gcd(r,s) = ۱$. چون n مربعی نیست، لذا $s > ۱$ و داریم $r^۲ = ns^۲$. فرض کنید p هر مقسوم‌علیه اولی از s باشد. لذا $p|r^۲$. پس باتوجه‌به قضیه قبل $p|r$. بنابراین p هر دو عدد r و s را عاد می‌کند و این با $gcd(r,s) = ۱$ در تناقض است. ■

توجه داشته باشید که با استفاده از نتایج بخش‌پذیری، چیزی را اثبات کردیم که در ظاهر ارتباطی با بخش‌پذیری نداشت.

معادلات دیوفانتی

مرحله بعدی، یافتن پاسخ‌های صحیح معادلات خطی دو متغیره است. در جستجوی پاسخ صحیح برای معادلات به فرم $mx + ny = c$ هستیم که در آن m، n و c اعداد طبیعی معلوم هستند.

به‌عنوان پاداش، پاسخ‌هایی برای معادله $mx - ny = c$ نیز به‌دست می‌آوریم. آیا می‌دانید چرا؟ چنین معادلاتی را معادله دیوفانتی (برگرفته از نام الکساندر دیوفانت) گویند.

قضیه ۴.۲۸.

(۱) *برای همه اعداد طبیعی m و n پاسخ‌های صحیح x و y وجود دارند که در معادله $mx + ny = c$ صدق می‌کنند اگر و تنها اگر $gcd(m,n)|c$.*

(۲) *فرض کنید $X = x$ و $Y = y$ پاسخ‌های معادله $mx + ny = c$ باشند. لذا برای هر $t \in \mathbb{Z}$،*

$$x = X + \frac{n}{gcd(m,n)}t, \qquad y = Y - \frac{m}{gcd(m,n)}t$$

نیز یک جواب است. حتی همه جواب‌ها به‌شکل بالا است.

برهان. ایده‌ها را نوشته‌ام، می‌توانید پاسخ پیراسته را به‌عنوان یک تمرین بنویسید.

(۱) این گزاره‌ای به‌شکل "اگر و تنها اگر" است. بنابراین آن را به دو بخش "اگر" و "تنها اگر " می‌شکنیم. واضح است که مجبوریم در طول این پاسخ بارها و بارها عبارت $gcd(m,n)$ را بنویسیم. بنابراین برای مختصر نوشتن از نماد $d = gcd(m,n)$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید معادله $mx + ny = c$ دارای پاسخی به شکل $mX + nY = c$ باشد. قصد داریم، چه چیزی نشان دهیم؟ می‌خواهیم نشان دهیم که d عدد c را عاد می‌کند. چه می‌دانیم؟ می‌دانیم که c بر حسب m، n، X و Y است. باتوجه‌به تعریف، می‌دانیم که d مقسوم‌علیه m و n است. بنا بر قضیه ۱.۲۷ عدد d یک ترکیب خطی از m و n را نیز عاد می‌کند. بنابراین چون $mX + nY = c$ (یک ترکیب خطی است) پس d عدد c را عاد می‌کند.
حالا به سمت دیگر هم‌ارزی می‌پردازیم: فرض کنید d عدد c را عاد کند. چه اطلاعاتی داریم؟ به‌طور خاص چه چیزی درمورد معادلات و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک می‌دانیم؟ می‌دانیم که می‌توان از طریق قضیه ۲.۲۸ معادله $mx + ny = d$ را حل کرد؛ یعنی می‌توانیم k و lای را پیدا کنیم به‌طوری‌که $mk + nl = d$. (توجه داشته باشید که علامت‌گذاری در آن قضیه در تضاد با علائم در این قضیه است، k و lها یکسان نیستند. مشکلی نیست! ما ریاضی‌دان هستیم و می‌توانیم از عهده آن برآییم.) اما $mx + ny = d$ معادله‌ای نیست که قصد حل آن را داریم؛ می‌خواهیم در سمت راست آن c باشد نه d. با ضرب d در $\frac{c}{d}$ می‌توانیم آن را به‌دست آوریم. هر عملی که روی یک طرف معادله انجام می‌دهیم باید روی طرف دیگر نیز اعمال کنیم. بنابراین، اگر هر دو طرف را بر d تقسیم و در c ضرب کنیم، داریم:

$$\frac{c(mk + nl)}{d} = c.$$

پس اگر d اعداد ck و cl را عاد کند، آنگاه معادله $mx + ny = c$ دارای پاسخ صحیح است. یعنی در معادله

$$m\frac{ck}{d} + n\frac{cl}{d} = c,$$

اعداد $\frac{ck}{d}$ و $\frac{cl}{d}$ صحیح هستند. این درست است زیرا بنا به فرض، d عدد c را عاد می‌کند.

(۲) با جایگزینی می‌توان نشان داد که پاسخ پیشنهادی (باتوجه‌به پاسخ داده شده $x = X$ و $y = Y$) یک پاسخ واقعی معادله است ($x = X + \frac{nt}{gcd(m,n)}$ و $y = Y - \frac{m}{gcd(m,n)}t$ را در معادله قرار دهید.).
بیایید بیشتر جستجو کنیم. فرض کنید همه پاسخ‌های x به ازای یک $t \in \mathbb{Z}$ به‌شکل $X + \frac{n}{d}t$ باشد. آیا این شکل درست y را در اختیار قرار می‌دهد؟ بله چنین است. آن را امتحان کنید! این کار بعدا و در طول فرآیند نوشتن مفید خواهد بود. نباید در این مرحله نوشته شود بلکه باید در پایان آورده شود! چه چیزی را می‌دانیم؟ می‌دانیم که $mx + ny = c$ و $mX + nY = c$. چه می‌خواهیم؟ می‌خواهیم نشان دهیم که $x = X + \frac{n}{d}t$ و غیره. این فاقد c است پس می‌توانیم c را از دو معادله بالا حذف کنیم. بنابراین با حذف c معادله‌ای به‌دست می‌آید که سودمند است زیرا می‌خواهیم نشان دهیم که $x - X = \frac{n}{d}$. آخرین واقعیت بیانگر این است که به d نیاز داریم و بنابراین معادله را بر d تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{m(x-X)}{d} + \frac{n(y-Y)}{d} = 0.$$

یا به‌عبارتِ‌دیگر:

$$x - X = \frac{n}{d}\big(-\frac{d(y-Y)}{m}\big).$$

بنابراین اگر بتوانیم نشان دهیم که m عدد $d(y-Y)$ را عاد می‌کند، آنگاه مقدار عدد صحیح t باید برابر $-\frac{d(y-Y)}{m}$ باشد. این خیلی سخت نیست، بنابراین آن را به عهده شما می‌گذارم. اگر نتوانستید، مورد $gcd(m,n)=۱$ را امتحان کنید.

■

تمرین ۴.۲۸.
*نسخه پیراسته‌ای از اثبات **بالا** را ارائه دهید.*

توجه داشته باشید که قسمت (۲) قضیه می‌گوید که اگر یک پاسخ وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه جواب، نامتناهی است.

مثال ۳.۲۸.
همه پاسخ‌های صحیح معادله دیوفانتی $۵۱x + ۲۱y = ۱۸$ را بیابید.

ابتدا بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۲۱ و ۵۱ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۵۱ &= ۲ \times ۲۱ + ۹ \\ ۲۱ &= ۲ \times ۹ + ۳ \\ ۹ &= ۳ \times ۳ + ۰. \end{aligned}$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ است. چون $۳|۱۸$ پس معادله دارای جواب است. اینک با معکوس کردن الگوریتم داریم:

$$\begin{aligned} ۳ &= ۲۱ - ۲ \times ۹ \\ &= ۲۱ - ۲(۵۱ - ۲ \times ۲۱) \\ &= ۵ \times ۲۱ - ۲ \times ۵۱ \end{aligned}$$

$$۱۸ = ۳۰ \times ۲۱ - ۱۲ \times ۵۱, \qquad \text{پس از ضرب در } ۶ = \frac{۱۸}{۳},$$

بنابراین

$$y = ۳۰ \qquad \text{و} \qquad x = -۱۲$$

پاسخ معادله $۵۱x + ۲۱y = ۱۸$ هستند. لذا ($x = -۱۲$ و $y = ۳۰$ قرار دهید.) پاسخ‌ها به‌شکل

$$X + \frac{۲۱}{۳}t = -۱۲ + ۷t, \qquad Y - \frac{۵۱}{۳}t = ۳۰ - ۱۷t,$$

می‌باشند که t هر عدد صحیحی می‌تواند باشد. یعنی

$$x = -۱۲ + ۷t \qquad \text{و} \qquad y = ۳۰ - ۱۷t$$

پاسخ‌های صحیح معادله $۵۱x + ۲۱y = ۱۸$ هستند.

مثال ۴.۲۸.
می‌توانیم با استفاده از این جواب‌ها، جواب‌های معادله $۵۱x - ۲۱y = ۱۸$ را پیدا کنیم. (این همان معادله قبل است که در آن علامت + به ـ تغییر کرده است.)

چون می‌توانیم معادله را به‌شکل $۵۱x + ۲۱(-y) = ۱۸$ بازنویسی کنیم، باتوجه‌به مثال قبل پاسخ‌ها باید به‌شکل

$$x = -۱۲ + ۷t, \qquad -y = ۳۰ - ۱۷t,$$

یا

$$x = -۱۲ + ۷t, \qquad y = -۳۰ + ۱۷t$$

باشند.

تمرین

۱. مقادیر
(آ) $gcd(۱۴۵۹۲, ۶۴۶۸)$ و (ب) $gcd(-۱۲۸۷۰, ۴۹۱۴)$ را بیابید.

۲. اعداد صحیح m و n را طوری بیابید که در معادله $۱۴۵۹۲m + ۶۴۶۸n = ۱۲$ صدق کنند.

۳. اعداد صحیح m و n را طوری بیابید که در معادله $۴۹۱۴m + ۱۲۸۷۰n = ۲۳۴$ صدق کنند.

۴. همه پاسخ‌های صحیح معادلات دیوفانتی زیر را بیابید.

(آ) $۳۱۵x + ۲۶۴y = ۱۸$،
(ب) $۳۱۵x + ۲۶۴y = ۲۴$،
(ج) $۷۶۴۴x + ۱۳۸۶y = ۸۴$،
(د) $۱۳۸۶x + ۷۶۴۴y = ۱۲۶$.

۵. در لم تقسیم از **اصل خوشترتیبی** اعداد طبیعی استفاده شد. که فرضی درمورد اعداد طبیعی است؛ هر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضو است.

(آ) اصل را به‌شکل "اگر... آنگاه ... " بنویسید.
(ب) آیا فرضی که درمورد مجموعه اعداد طبیعی است می‌توان به مجموعه اعداد صحیح تعمیم داد؟ اگر پاسخ مثبت است، آن را اثبات کنید و اگر پاسخ منفی است مثال نقض ارائه دهید. (به‌هرحال، درمورد اعداد حقیقی برقرار نیست. برای مثال فرض کنید $S = \{x \in \mathbb{R} | x > ۰\}$.)
(ج) در کجای اثبات اصل استقرا ریاضی از این اصل استفاده کردیم؟

۶. با استفاده از استقرا قوی روی عدد صحیح x لم تقسیم را اثبات کنید. (نکته: دو حالت وجود دارد که باید مورد بررسی قرار گیرد: $x \leq y$ و $x > y$.)

۷. لم اقلیدس و اثبات آن را در نظر بگیرید.

(آ) مشخص کنید که در کجای اثبات از مفروضات استفاده شده است.
(ب) در اثبات از کدام قضایا استفاده شده است؟
(ج) وقتی که در لم اقلیدس فرض $gcd(x, y) = ۱$ را نادیده بگیریم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ یعنی شرط $x, y \in \mathbb{N}$ را به شرط $x, y \in \mathbb{Z}$ تعدیل کنید.

۸. فرض کنید a و b متباین باشند. ثابت کنید $gcd(a + b, a - b) \leq ۲$. (نکته: قرار دهید $g = gcd(a + b, a - b)$ نشان دهید $g|۲a$ و $g|۲b$ این موارد را روی $gcd(g, ۲)$ به‌کار گیرید.)

۹. چرا در شکل تعمیم لم تقسیم منحصربه‌فردی q و r به‌طور خودکار از q' و r' نتیجه نمی‌شود؟

۱۰. فرض کنید $p_۱$ و $q_۱$ دو عدد باشند. با استفاده از لم تقسیم q_i را برای $i \geq ۱$ و p_i را برای $i \geq ۳$ تعریف کنید. یعنی $p_{i-۲} = q_{i-۲}p_{i-۱} + p_i$. ثابت کنید $p_۱p_۲ = \sum_{i=۱} q_i p_{i+۱}^۲$. برای توضیح این نتیجه یک تصویر رسم کنید.[۵]

۱۱. **کوچک‌ترین مضرب مشترک** دو عدد صحیح a و b را با $lcm(a, b)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی l به‌طوری‌که برای اعداد صحیحی همچون m و n، $ma = nb = l$. موارد زیر را اثبات کنید.

(آ) هر مضرب مشترکی از a و b مضربی از l است.
(ب) به ازای هر عدد صحیح مثبت r، $lcm(ra, rb) = rlcm(a, b)$.
(ج) $lcm(a, b)gcd(a, b) = |ab|$.

[۵] مدرسان: اگر هرگز تصویری از آن را در گذشته رسم نکرده‌اید، این کار را انجام دهید. تصویر، چیزهای زیادی را روشن می‌کند.

چکیده

- تعمیم لم تقسیم : فرض کنید a و b اعداد صحیح ناصفر باشند. اعداد صحیح q و r وجود دارند به‌طوری‌که $x = qy + r$ و $\circ \leq r < |y|$.
- می‌توان با استفاده از الگوریتم اقلیدس، $gcd(a, b)$ را محاسبه کرد.
- لم اقلیدس: فرض کنید n، a و b اعداد طبیعی باشند. اگر $n|ab$ و $gcd(n, a) = ۱$، آنگاه $n|b$.
- دو عدد صحیح، متباین (نسبت به هم اول) نامیده می‌شوند، اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها ۱ باشد.
- برای همه اعداد طبیعی m و n پاسخ‌های صحیح x و y وجود دارند که در معادله $mx + ny = c$ صدق کنند، اگر و تنها اگر $gcd(m, n)|c$.
- همچنین با یافتن یک جواب می‌توان همه جواب‌ها را یافت.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b را با $lcm(a, b)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی l به‌طوری‌که برای اعداد صحیحی مانند m و n، $ma = nb = l$.

فصل ۲۹

حساب پیمانه‌ای

این نوعی از حساب است که من دوست دارم.

”چیکو در فیلم هفت باشکوه“

دوران دانش‌آموزی تحت تأثیر حساب پیمانه‌ای نبودم؛ شبیه یک اسباب‌بازی پیش‌پا افتاده بود. مفید و عمیق به نظر نمی‌رسید.
حالا از آن بسیار سپاسگزارم، زیرا بارها و بارها و به‌طور گسترده در زندگی روزمره در موضوعاتی مانند رمزنگاری (که شامل امنیت رمزنگاری می‌شود)، ذخیره‌سازی داده، بارکدگذاری، مشخصات کتابخانه‌ای کتاب‌ها و حتی ترفندهای جادویی از آن استفاده کرده‌ام.
نظریه حساب پیمانه‌ای بسیار ساده است. یک عدد طبیعی مانند n را در نظر بگیرید. اگر باقیمانده‌های دو عدد صحیح در تقسیم بر n مساوی باشند، آن دو عدد را معادل در نظر می‌گیریم. برای مثال، فرض کنید $n = ۵$، حال ۲ و ۵۷ معادل‌اند. زیرا در تقسیم بر ۵ باقیمانده یکسان ۲ را دارند.
در این فصل قبل از بیان برخی کاربردهای حساب پیمانه‌ای در نظریه اعداد به مطالعه تعدادی از خواص ابتدایی آن می‌پردازیم.

حساب پیمانه‌ای

با یک تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲۹.

درصورتی‌که باقیمانده‌های تقسیم دو عدد صحیح x و y بر عدد طبیعی n یکسان باشند، آنگاه x و y را به پیمانه n، معادل نامیم، (x مساوی با y است به پیمانه n) و می‌نویسیم: $x = y \ (mod\ n)$ یا $x = y$ به پیمانه n و یا $x \overset{n}{=} y$.

مثال ۱.۲۹.

(آ) $۱۵ = ۰ \ (mod\ ۵)$ *زیرا* $۱۵ = ۳ \times ۵ + ۰$.

(ب) $۱۶ = ۴ \ (mod\ ۱۲)$ *زیرا* $۱۶ = ۱ \times ۱۲ + ۴$.

(ج) $-۷۳ = ۲۷ \ (mod\ ۱۰)$ *زیرا* $-۷۳ = (-۸) \times ۱۰ + ۷$ ، $۲۷ = ۲ \times ۱۰ + ۷$.

(د) $۲۰ = ۵۳ \ (mod\ ۱۱)$ *زیرا باقیمانده هر دو، بعد از تقسیم بر ۱۱ ، ۹ است.*

روشن است که اگر x در تقسیم بر n، باقیمانده r داشته باشد، آنگاه $x \overset{n}{=} r$. در حقیقت زمانی که $x\ mod\ n$ خواسته شود، معمولا پاسخ، باقیمانده r است. یافتن آن از طریق محاسبه ساده است.

مثال ۲.۲۹.

مقدار ۸ mod ۲۶۱ چند است؟ محاسبات نشان می‌دهد که ۳۲/۶۲۵ = $\frac{۲۶۱}{۸}$، پس باقیمانده ۵ = ۸ × ۰/۶۲۵ است. توجه کنید که برای به‌دست آوردن آن، همه ارقام بعد از ممیز را در n ضرب می‌کنیم.

تمرین ۱.۲۹.

عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\ ۱۶\ mod\ ۵,\qquad ۲)\ ۲۲\ mod\ ۴,\qquad ۳)\ -۳۳\ mod\ ۲۲,$$
$$۴)\ ۷\ mod\ ۷,\qquad ۵)\ ۵۴۵\ mod\ ۱۲.$$

یک ویژگی حساب پیمانه‌ای این است که اغلب با استفاده از روش حالت‌ها، مانند برهان قضیه بعد نشان داده می‌شود، می‌توان به قضیه‌ها یورش برد.

قضیه ۱.۲۹.

اگر n یک عدد مربع باشد، آنگاه ۴ $n\ mod$، صفر یا ۱ است.

برهان. با استفاده از تعریف، اگر n یک عدد مربع باشد، آنگاه به‌ازای عدد صحیحی مانند k، $n = k^۲$. باتوجه‌به اینکه روی پیمانه ۴ کار می‌کنیم، چهار حالت برای ۴ $k\ mod$ در نظر می‌گیریم. حالت‌ها ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند.

حالت ۰ = ۴ $k\ mod$: اینجا به‌ازای عدد صحیحی چون m، $k = ۴m$. پس

$$n = k^۲ = ۱۶m^۲ = ۴(۴m^۲) = ۰\ (mod\ ۴).$$

حالت ۱ = ۴ $k\ mod$: اینجا به‌ازای عدد صحیحی چون m، $k = ۴m + ۱$. پس

$$n = k^۲ = ۱۶m^۲ + ۸m + ۱ = ۴(۴m^۲ + ۲m) + ۱ = ۱\ (mod\ ۴).$$

حالت ۲ = ۴ $k\ mod$: اینجا به‌ازای عدد صحیحی چون m، $k = ۴m + ۲$. پس

$$n = k^۲ = ۱۶m^۲ + ۱۶m + ۴ = ۴(۴m^۲ + ۴m + ۱) = ۰\ (mod\ ۴).$$

حالت ۳ = ۴ $k\ mod$: اینجا به‌ازای عدد صحیحی چون m، $k = ۴m + ۳$. پس

$$n = k^۲ = ۱۶m^۲ + ۲۴m + ۹ = ۴(۴m^۲ + ۶m + ۲) + ۱ = ۱\ (mod\ ۴).$$

■

قضیه بعد، روشی دیگر برای یافتن دو عدد که به پیمانه n معادل هستند را ارائه می‌دهد.

قضیه ۲.۲۹.

$x = y\ (mod\ n)$ *اگر و تنها اگر به‌ازای* $k \in \mathbb{Z}$، $x - y = kn$.

برهان. فرض کنید $x = y\ (mod\ n)$. سپس با استفاده از تعریف

$$\exists k_۱, k_۲, r \in \mathbb{Z},\qquad x = k_۱ n + r,\qquad y = k_۲ n + r,$$

بنابراین

$$x - y = (k_۱ n + r) - (k_۲ n + r) = (k_۱ - k_۲)n.$$

حال عکس آن را اثبات می‌کنیم. اگر باقیمانده y زمانی که به n تقسیم می‌شود، r باشد، آنگاه به‌ازای $k_۱ \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$y = k_۱ n + r.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y &= kn \\ \iff x &= y + kn \\ \iff x &= k_۱ n + r + kn \\ \iff x &= (k_۱ + k)n + r. \end{aligned}$$

در نتیجه باقیمانده x در تقسیم بر n، r است و لذا $x = y\ \ (mod\ n)$. ■

تمرین ۲.۲۹.
روش‌های قبل را برای قضیه و اثبات به کار ببرید. به‌ویژه مراحل زیر را انجام دهید:

(آ) *مثال‌ها و نامثال‌هایی برای قضیه بنویسید.*

(ب) *مشخص کنید که مفروضات، در کجای اثبات به کار گرفته می‌شوند. (در گفتگو به صراحت بیان نشده که کجا از فرض استفاده شده است.)*

✍ **توجه ۱.۲۹.**
بعضی از ریاضی‌دانان دو عدد x و y را به پیمانه n معادل گویند، هرگاه برای $k \in \mathbb{Z}$ ای، $x - y = kn$. قضیه بالا نشان می‌دهد که این تعریف و تعریف قبل یکسان هستند.

حساب پیمانه

حال بعضی از اعمال حسابی با پیمانه را می‌بینیم. این که جمع، تفریق و ضرب باقیمانده‌ها را برای تولید یک نظریه تعریف کنیم آسان است. به‌کارگیری عمل تقسیم سخت‌تر است لذا از آن چشم‌پوشی می‌کنیم.

قضیه ۳.۲۹.
فرض کنید $x = r \ (mod\ n)$ و $y = s \ (mod\ n)$.

(۱) $x + y = r + s \ (mod\ n)$ و

(۲) $xy = rs \ (mod\ n)$.

برهان. برای اعداد صحیحی چون l و k داریم:

$$x = kn + r \qquad \text{و} \qquad y = ln + s$$

بنابراین

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& kn + r + ln + s \\ \Longrightarrow (x + y) &-& (r + s) = (k + l)n. \end{array}$$

بنابراین (۱) از قضیه ۲.۲۹ نتیجه می‌شود. به‌طور مشابه

$$\begin{array}{rcl} xy &=& (kn + r) + (ln + s) \\ &=& kln^{2} + kns + lnr + rs \\ \Longrightarrow xy - rs &=& (kln + ks + lr)n, \end{array}$$

پس (۲) نیز درست است. ■

از طریق به‌کارگیری منفی در (۱) یعنی $x - y$ که $x + (-y)$ هست، همچنین می‌توان با تفریق سروکار داشت.

تمرین ۳.۲۹.

(آ) *قضیه بالا و اثبات آن را تحلیل کنید. مثال‌ها و غیره را بیابید.*

(ب) *ثابت کنید که اگر $x = y \ (mod\ n)$، آنگاه برای هر عدد صحیح مانند k،*

$$kx = ky \ \ (mod\ n).$$

می‌توان قضیه را برای به‌دست آوردن پاسخ‌های درست در محاسبات سخت به کار برد.

مثال ۳.۲۹.
آخرین رقم 8^7 را بیابید.
در اینجا توجه می‌کنیم که آخرین رقم یک عدد، باقیمانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ است. بنابراین نیاز است که روی پیمانه ۱۰ کار کنیم. می‌دانیم که $8^7 = 8^3 8^4$.
داریم $8^2 = 64$ و $64 = 4 \ (mod\ 10)$. بنابراین

$$8^3 = 8^2 8 = (4 \times 8)\ (mod\ 10) = 32 = 2\ (mod\ 10).$$

همچنین

$$8^4 = (8^2)^2 = 4^2\ (mod\ 10) = 16 = 6\ \ (mod\ 10).$$

بنابراین

$$8^7 = 8^3 8^4 = (2 \times 6)\ (mod\ 10) = 12 = 2\ (mod\ 10).$$

تمرین ۴.۲۹.
آخرین رقم 17^{10} را بیابید.

قضیه کوچک فرما

قضیه کوچک فرما،[1] قضیه‌ای سودمند در نظریه اعداد است. مانند مثال‌های بالا، اجازه تحقیق و بررسی اعداد بسیار بزرگی را می‌دهد که برای محاسبه با دست سخت هستند. برای مثال می‌توان از آن برای نشان دادن بخش‌پذیری $2^{101} - 2$ بر ۱۰۱ استفاده کرد. حالا باید نسخه‌ای پیراسته از اثبات و شرح آن را ببینیم.

قضیه ۴.۲۹.
(قضیه کوچک فرما) فرض کنید p یک عدد اول باشد. آنگاه برای هر عدد صحیح x، $x^p = x\ (mod\ p)$.

به‌کارگیری نظرات معمول: تعدادی مثال را امتحان کنید، مطمئن شوید که فهمیده‌اید قضیه چه می‌گوید:

برهان. گزاره را باید به‌وسیله استقرا ریاضی روی x و برای اعداد طبیعی اثبات کنیم. حالت کلی را به‌عنوان یک تمرین باقی می‌گذاریم. توجه کنید که نمی‌توان استقرا را روی p انجام داد، باتوجه‌به اینکه $p + 1$ تنها برای $p = 2$ اول است.

اغلب قسمت‌های آسان اثبات، به‌عنوان تمرین باقی گذاشته می‌شود. مطمئن شوید که آن را انجام می‌دهید.

حالت بدیهی $x = 0$، است. گزاره صدق می‌کند در حالی که

$$0^p = 0 = 0\ mod\ p.$$

معمولا قسمت بدیهی استقرا آسان است.

بنابراین بیایید فرض کنیم برای $x \in \mathbb{N}$، $x^p = x\ mod\ p$ و در نظر بگیرید چه اتفاقی برای $x + 1$ رخ می‌دهد. با استفاده از قضیه دوجمله‌ای $(x+1)^p$ را بسط می‌دهیم:

$$(x+1)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x + 1.$$

برای استفاده از استقرا، نیاز است که $(x+1)^p = x + 1\ (mod\ p)$، بنابراین طرف کامل شده معادله را گرفته‌ایم که ببینیم چه کاری می‌توانیم انجام دهیم.

به طرف راست معادله نگاه کنید. می‌بینید که x^p را داریم. با استفاده از فرض استقرا می‌دانیم که وقتی پیمانه p می‌گیریم، آنگاه $x^p = x \quad mod\ p$. همچنین عدد ۱ را در سمت راست داریم، بنابراین تنها نیاز است که از شر همه چیزهای دیگر خلاص شویم، یعنی نشان دهیم آن‌ها به پیمانه p $(mod\ p)$ صفر هستند.

اثبات در زیر ارائه می‌شود، باید تلاش کنید تا ببینید چرا هر گام درست است. در هر گام بپرسید "چرا؟"، شاید نیاز شود که بعضی شکاف‌ها را پر کنید یا از قضایای قبل استفاده نمایید.

[1] این با قضیه آخر فرما که قبلا تشریح شد، متفاوت است.

با قرار دادن $mod\ p$ در دو طرف، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}(x+۱)^p &= x^p + \binom{p}{۱}x^{p-۱} + \binom{p}{۲}x^{p-۲} + \cdots + \binom{p}{p-۱}x + ۱\\ &= x + \binom{p}{۱}x^{p-۱} + \binom{p}{۲}x^{p-۲} + \cdots + \binom{p}{p-۱}x + ۱ \qquad mod\ p\\ &= (x+۱) + \left(\binom{p}{۱}x^{p-۱} + \binom{p}{۲}x^{p-۲} + + \cdots + \binom{p}{p-۱}x\right) \qquad mod\ p\\ &= x+۱ \qquad mod\ p\end{aligned}$$

خط آخر با استفاده از تمرین ۱۰ از این نتیجه می‌شود که برای $۱ \le r \le p-۱$،

$$\binom{p}{r} = ۰ \quad mod\ p.$$

آیا آخرین گزاره درست است؟ فعال باشید، برگردید و بررسی کنید که آیا واقعا تمرین مورد نظر خط آخر را نتیجه می‌دهد؟

بنابراین با استفاده از اصل استقرا ریاضی، گزاره درست است. ■

تمرین ۵.۲۹.

گزاره فوق را تنها برای اعداد طبیعی اثبات کرده‌ایم. حالا قضیه را برای اعداد صحیح اثبات کنید. از این ترفند که اگر $x < ۰$ آنگاه $-x$، یک عدد طبیعی است و بنابراین درستی گزاره برای $-x$ استفاده کنید.

بعضی از ریاضی‌دانان نتیجه زیر را به‌عنوان قضیه کوچک فرما می‌شناسند.

نتیجه ۱.۲۹.

فرض کنید p یک عدد اول باشد که x را عاد نمی‌کند. دراین‌صورت

$$x^{p-۱} = ۱ \ \ mod\ p.$$

تمرین ۶.۲۹.

(آ) *گزاره بالا با گزاره قبل معادل نیست. قوی‌تر یا ضعیف‌تر است؟ توضیح دهید.*

(ب) *این نتیجه را ثابت کنید. توجه کنید که به استفاده از اینکه به‌ازای بعضی نقاط $p \nmid x$ را نیاز دارید.*

نتیجه دیگری از قضیه کوچک فرما این است که به‌ازای هر عدد اول p، $x^p - x$ بر p بخش‌پذیر است. دیدن اینکه $x^p = x \pmod p$ معادل است با $x^p - x = ۰ \pmod p$، آسان است و با قضیه ۲.۲۹ که p، $x^p - x$ را عاد می‌کند نتیجه می‌شود.

مثال ۴.۲۹.

(آ) *عدد $۱۰۲۰ = ۴^۵ - ۴$، بر ۵ بخش‌پذیر است.*

(ب) *عدد $۱۲۶ = ۲^۷ - ۲$، بر ۷ بخش‌پذیر است.*

(ج) *عدد $۱۲۶۷۶۵۰۶۰۰۲۲۸۲۲۹۴۰۱۴۹۶۷۰۳۲۰۵۳۷۵ = ۲^{۱۰۰} - ۱$ بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است. اینجا می‌بینیم که ۲، ۱۰۱ را عاد نمی‌کند، پس با استفاده از نتیجه ۱.۲۹،*

$$۲^{۱۰۰} = ۱ \pmod{۱۰۱},$$

بنابراین $۲^{۱۰۰} - ۱$ بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است.

کاربردهای قضیه کوچک فرما

حالا باید تعداد بیشتری از کاربردهای قضیه کوچک فرما (FLT) را ببینیم.

•یافتن باقیمانده‌ها

مثال ۵.۲۹.

باقیمانده تقسیم $۳^{۲۹۳}$ بر ۹۷ را محاسبه کنید.
برای پاسخ، اول توجه کنید که $۲ + (۹۷ \times ۳) = ۲۹۳$. داریم:

$$۳^{۲۹۳} = ۳^{۳\times۹۷+۲} = ۳^{۲} \times (۳^{۳})^{۹۷} = ۹ \times ۲۷^{۹۷}.$$

با استفاده از FLT، می‌دانیم که $۲۷^{۹۷} = ۲۷ \pmod{۹۷}$. پس

$$\begin{aligned} ۳^{۲۹۳} \pmod{۹۷} &= (۹ \times ۲۷^{۹۷}) \pmod{۹۷} \\ &= (۹ \times ۲۷) \pmod{۹۷} \\ &= ۲۴۳ \pmod{۹۷} \\ &= ۴۹ \pmod{۹۷}. \end{aligned}$$

ساده‌سازی آخر با دست انجام شده است.دقت کنید که این خیلی ساده‌تر از انجام محاسبات برای $۳^{۲۹۳}$ است. پس باقیمانده تقسیم $۳^{۲۹۳}$ بر۹۷، ۴۹ است.
به‌هرحال، $۳^{۲۹۳}$ با عدد

$$\begin{aligned} &۶۲۵۹۳۲۶۸۸۸۸۲۴۳۴۴۲۷۵۲۲۳۲۵۵۷۲۶۴۸۴۱۷۱۵۴۰۷۷۰۲۹۵۸۱۹۰۴ \\ &۵۸۹۵۹۱۴۲۶۴۳۲۵۵۷۴۲۰۳۷۹۰۵۶۷۷۹۸۳۴۹۶۸۷۲۱۴۴۴۹۹۵۹۵۵۹۶۲ \\ &۰۲۱۶۶۸۱۵۲۹۴۲۱۳۱۰۴۶۱۷۹۲۶۰۵۴۵۷۳۰۵۵۹۱۰۶۳۹۹۵۳۱۱۲۳, \end{aligned}$$

برابر است.

•آزمون اول

قضیه کوچک فرما ممکن است تنها یک نتیجه کوچک جذاب درباره اعداد به نظر برسد. "راستی، اگر x را به توان یک عدد اول برسانید و با همان عدد اول تقلیل دهید به x برمی‌گردید." ($x^p = x \pmod{p}$) اما دلیل خوب بودن آن چیست؟ جمله را از "اگر ...، آنگاه ..." دوباره با نگاهی دیگر تحلیل می‌کنیم. داریم:

اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه $x^{p-۱} = ۱ \pmod{p}$.

اگر مانند یک ریاضی‌دان فکر کنید، آنگاه به‌طور خودکار باید ماشه را بکشید و بپرسید "نتیجه درست است؟" (فصل ۱۶ را مشاهده کنید، چگونه خواندن یک قضیه) پاسخ این است که آن درست نیست و می‌خواهیم یک مثال نقض بزنید. به‌جای گزاره، عکس نقیض گزاره را در نظر بگیرید:

اگر $x^{p-۱} \neq ۱ \pmod{p}$، آنگاه p یک عدد اول نیست.

می‌دانیم که این گزاره درست است زیرا عکس نقیض گزاره‌ای درست است. اما چه چیز آن خوب است؟ می‌دانیم که اعداد اول مهم هستند و روش‌های زیادی برای بررسی اینکه یک عدد اول است وجود دارد است و این آن چیزی است که عکس نقیض گزاره نتیجه می‌دهد.

مثال ۶.۲۹.
نشان دهید که ۳۹ عدد اول نیست.
بیایید قرار دهیم $x = ۲$, آنگاه هدف اثبات $۲^{۳۸} \neq ۱ \pmod{۳۹}$ است.
برای محاسبه $۲^{۳۸}$، ۳۸ را در اشکال دیگر بازنویسی می‌کنیم و از آن برای محاسبه استفاده می‌کنیم. برای مثال، $۳۸ = ۶ + (۲^۵) = ۶ + ۳۲$ یا $۲ + ۶^۲ = ۲ + ۳۶ = ۳۸$. به‌هرحال، برای محاسبه $۲^{۳۸} \pmod{n}$ به آسانی بازسازی می‌شود.

$$
\begin{aligned}
۲^{۳۸} &= ۲^{۳۶+۲} \pmod{۳۹}\\
&= (۲^۶)^۶ ۲^۲ \pmod{۳۹}.
\end{aligned}
$$

می‌توان دید که

$$۲^۶ \pmod{۳۹} = ۶۴ \pmod{۳۹} = ۲۵ \pmod{۳۹},$$

و داریم:

$$۲۵^۲ \pmod{۳۹} = ۶۲۵ \pmod{۳۹} = ۱ \pmod{۳۹},$$

بنابراین

$$(۲۵)^۶ \pmod{۳۹} = (۲۵^۲)^۳ \pmod{۳۹} = ۱^۳ \pmod{۳۹} = ۱ \pmod{۳۹}.$$

از این نتیجه می‌گیریم که

$$۲^{۳۸} = (۲^۶)^۶ ۲^۲ \pmod{۳۹} = (۱ \times ۴) = ۴ \pmod{۳۹} \neq ۱ \pmod{۳۹}.$$

البته این روش برای اثبات اول بودن ۳۹ روشی ضعیف است. ولی می‌تواند از دید نظری یا برای اعداد بزرگ(مانند تمرین زیر) مفید باشد.

تمرین ۷.۲۹.
(آ) *نشان دهید که ۶۶۰۱۳ یک عدد اول نیست.*

(ب) *اگر $x^{p-۱}$ به پیمانه p همنهشت با ۱ باشد، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که p یک عدد اول است؟*

آزمون‌های بخش‌پذیری

باتوجه به مشاهده مثال‌هایی از قبل می‌توان حساب پیمانه‌ای را برای تشخیص بخش‌پذیری اعداد به کار گرفت. حال باید مثال‌های دیگری را ببینیم. در دو مثال زیر از اینکه می‌توان هر عدد را به‌شکل مجموع ترکیبی از توان‌های ۱۰ نوشت استفاده می‌کنیم. برای مثال،

$$۳۷۴ = (۳ \times ۱۰۰) + (۷ \times ۱۰) + ۴ = (۳ \times ۱۰^۲) + (۷ \times ۱۰) + ۴.$$

مثال ۷.۲۹.
هر عدد طبیعی، با حداقل دو رقم، بر ۴ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد متشکل از دو رقم آخر آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد.
برای عدد طبیعی x داریم: $x = ۱۰۰a + b$ که b دو رقم آخر x است. برای مثال

$$x = ۸۳۷۵۶ = (۸۳۷ \times ۱۰۰) + ۵۶.$$

پس

$$
\begin{aligned}
x \pmod{۴} &= ۱۰۰a + b \pmod{۴}\\
&= (۴ \times ۲۵)a + b \pmod{۴}\\
&= ۴ \times ۲۵ \times a \pmod{۴} + b \pmod{۴}\\
&= b \pmod{۴}.
\end{aligned}
$$

بنابراین x بر ۴ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر b، یعنی عددی که با دو رقم آخر ساخته می‌شود بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۸.۲۹.

یک عدد طبیعی بر ۹ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

عدد x را می‌توان به‌شکل ده دهی نوشت: $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^i$ که $0 \leq a_i \leq 9$ و a_i، iامین رقم x است. پس

$$\begin{aligned} x \pmod 9 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^i \pmod 9 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i 1^i \pmod 9 \qquad 10 = 1 \pmod 9 \text{ از اینکه} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \pmod 9. \end{aligned}$$

این روش قبل از تولد ماشین حساب‌ها، برای بررسی پاسخ جمع و ضرب‌ها استفاده قرار می‌شد. تمرین‌های زیر را ببینید: "همنهشتی ده‌ها عدد."

تمرین

۱. نشان دهید یک عدد صحیح بر ۶ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد.

۲. نشان دهید یک عدد صحیح بر ۵ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر رقم آخر آن ۰ یا ۵ باشد.

۳. نشان دهید یک عدد صحیح بر ۳ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۴. عبارات زیر را ثابت کنید:

(آ) اگر اختلاف بین مجموع همه ارقام یک عدد در موقعیت‌های زوج و مجموع همه ارقام آن در موقعیت‌های فرد، صفر یا مضربی از ۱۱ باشد، آنگاه آن عدد مضربی از ۱۱ است.

(ب) هیچ عدد اول دو سری به جز ۱۱ ($Palindrome$)، نیست که، تعداد ارقامش زوج باشد.

۵. در تمرین قبل مفروضات و نتایج مورد استفاده را مشخص کنید. آیا این فرض می‌تواند مناسب باشد؟ اگر چنین است، گزاره‌ها را اثبات کنید؛ در غیر اینصورت مثال نقض بزنید.

۶. برهان قضیه ۱.۲۹ را با قرار دادن $k = ۴m + r$، محاسبه $n^۲ = (۴m + r)^۲$ و آنگاه تقسیم در این‌حالات ساده‌تر کنید.

۷. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید که

$$x^۲ + ۵x = ۰ \ (mod\ ۴) \iff x^۳ - ۳x = ۰ \ \ (mod\ ۴).$$

۸. ثابت کنید که برای هر $x \in \mathbb{Z}$، $x^۳ = x \ \ (mod\ ۶)$.

۹. قبل از تولد ماشین حساب‌ها، روش ”ریختن دهها عدد“ به‌عنوان روش بررسی محاسبات، آموزش داده می‌شد. ایده این بود که می‌توان مجموع یا حاصلضرب x و y را بررسی کرد. ارقام فرد x را جمع می‌زدیم و اگر یک ۹ داشتیم، از آن چشم‌پوشی می‌کردیم، یعنی آن را بیرون می‌ریختیم. به‌عنوان‌مثال، برای $x = ۲۴۶۵۹۸۱$، از ۹ صرف‌نظر می‌کنیم، می‌توان از ۸ و ۱ نیز صرف‌نظر کرد چون $۹ = ۱ + ۸$، به‌طور مشابه ۴ و ۵ را بیرون می‌اندازیم، بنابراین ۲۴۶۵۹۸۱ به $۸ = ۶ + ۲$ کاهش می‌یابد. در حالت کلی این عدد صحیح حاصل را $S(x)$ می‌نامیم. پس $S(۲۴۶۵۹۸۱) = ۸$.

(آ) ثابت کنید که برای همه اعداد صحیح، $S(x)$ همنهشت x است به پیمانه ۹.

(ب) بنابراین ثابت کنید که

$$xy = S(x).S(y) \ \ (mod\ ۹), \quad x + y = S(x) + S(y) \ \ (mod\ ۹)$$

(ج) می‌توان از این رابطه برای بررسی محاسبات استفاده کرد. اگر
$x + y \neq S(x) + S(y) \ \ (mod\ ۹)$ پس اشتباه کرده‌ایم. آیا
$x + y = S(x) + S(y) \ \ (mod\ ۹)$ به این معنی است که محاسبات درست است؟

۱۰. فرض کنید $n_۱$ و $n_۲$ دو عدد غیر اول بزرگ‌تر از ۱ باشند. ثابت کنید که همه معادلات $ax = b \ (mod\ n_۱)$ و $ax = b \ (mod\ n_۲)$ برای اعداد صحیح a و b، یک پاسخ $x \in \mathbb{Z}$ دارند، اگر و تنها اگر x، پاسخ $ax = b \ (mod\ n_۱n_۲)$ باشد.

۱۱. (آ) ثابت کنید که اگر $x = y \ (mod\ n)$، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$x^k = y^k \ (mod\ n).$$

(ب) ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۳^{۴n+۱} + ۲^{۸n+۳} = ۱ \ (mod\ ۵)$.

(ج) ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $5^{3n} + 2^{n+1} \equiv 0 \pmod 3$.

(د) ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $2^{3n} + 6 \equiv 0 \pmod 7$.

(و) ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $6^{2n} - 3 \times 6^{n} + 3 \equiv 1 \pmod 5$.

۱۲. گزاره‌های زیر را ثابت یا رد کنید:

(آ) برای همه اعداد صحیح x و y و اعداد طبیعی n، اگر $xy \equiv 0 \pmod n$، آنگاه $x \equiv 0 \pmod n$ یا $y \equiv 0 \pmod n$.

(ب) برای اعداد طبیعی $n > 3$ و اعداد صحیح x، اگر $x^2 \equiv 4 \pmod n$، آنگاه $x \equiv 2 \pmod n$.

(ج) عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عدد صحیح x، اگر $x^2 \equiv 4 \pmod n$، آنگاه $x \equiv 2 \pmod n$.

۱۳. ثابت کنید هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، از یک مضرب ۶ یک واحد بزرگ‌تر یا یک واحد کوچک‌تر است.

۱۴. ثابت کنید که برای همه اعداد صحیح x و y و هر عدد اول p،

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p.$$

چکیده

- ◄ *اگر دو عدد صحیح* x *و* y*، زمانی که بر عدد طبیعی* n *تقسیم می‌شوند باقیمانده یکسان داشته باشند، گوییم* $x = y \ (mod\ n)$.
- ◄ $x = y \ (mod\ n)$ *اگر و تنها اگر به‌ازای* $k \in \mathbb{Z}$*،* $x - y = kn$.
- ◄ *اگر* $x = r \ (mod\ n)$ *و* $y = s \ (mod\ n)$*، آنگاه*
  - (۱) $x + y = r + s \ (mod\ n)$
  - (۲) $x - y = r - s \ (mod\ n)$ و
  - (۳) $xy = rs \ (mod\ n)$.
- ◄ *قضیه کوچک فرما: فرض کنید* p *یک عدد اول باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح* x*،* $x^p = x \ (mod\ p)$.

فصل ۳۰

انژکتیو، سوژکتیو، بیژکتیو و کمی درباره نامتناهی

گوش کن، اندازه‌ای در بینهایت وجود ندارد؛ شما انسان‌ها ذهن محدودی دارید.

"دکتر در فیلم دکتر هو"

دیدیم که مجموعه‌ها در قالب ریاضی چگونه هستند و کمی هم درباره توابع بین مجموعه‌ها گفتیم. حال، توابع را با نگاه دقیق‌تری مشاهده می‌کنیم.

برای $f : X \longrightarrow Y$، تابع‌های انژکتیو، سوژکتیو و بیژکتیو را تعریف می‌کنیم. این تعریف‌ها اجازه می‌دهند تا مجموعه‌ها را با هم مقایسه کنیم و توابع بیژکتیو اجازه می‌دهند که بگوییم یک مجموعه، برچسبی جدید از اعضای مجموعه‌ای دیگر است.

با استفاده از نماد بیژکتیو می‌توان دو نوع متفاوت از مجموعه‌های نامتناهی تعریف کرد، مجموعه‌هایی که می‌توانیم اعضایشان را بشماریم مانند $\mathbb{N}$، و مجموعه‌هایی که نمی‌توانیم اعضایشان را بشماریم مانند $\mathbb{R}$؛ بنابراین دو نوع نامتناهی داریم.

توابع انژکتیو

تعریف ۱.۳۰.

تابع $f : X \longrightarrow Y$ **انژکتیو** *یا* **یک‌به‌یک**[1] *نامیده می‌شود، اگر برای هر $x_1 \in X$ و $x_2 \in X$، $x_1 \neq x_2$ نتیجه دهد که $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

تعریف بالا می‌گوید: اگر دو عضو X را بگیریم، آنگاه مقادیر آن‌ها تحت f یکسان است اگر و تنها اگر اعضا یکسان باشند. برای مثال نمی‌خواهیم $f(3) = f(5)$ باشد. می‌توانید تصویر یک تابع انژکتیو و یک تابع غیر انژکتیو را در شکل ۱.۳۰ ببینید.

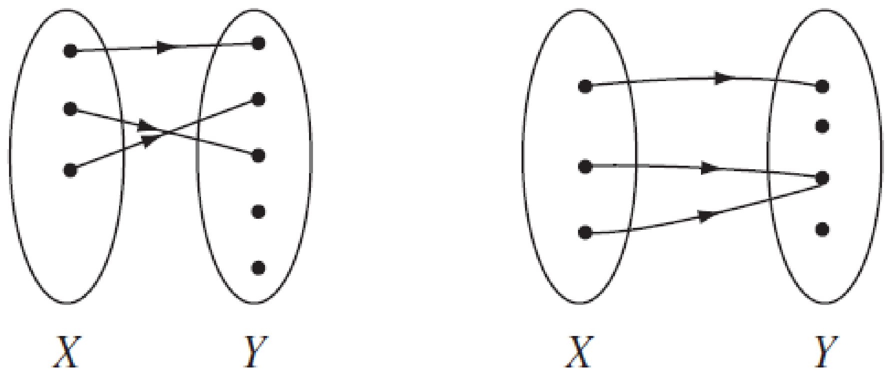
✍ **توجه ۱.۳۰.**

به جای تعریف با عکس نقیض آن کار می‌کنیم:
یک تابع $f : X \longrightarrow Y$، انژکتیو است، اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$، $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه بدهد که $x_1 = x_2$.

آسان‌تر این است که با فرض $f(x_1) = f(x_2)$ شروع و ادامه دهیم؛ ببینیم چه نتیجه‌ای می‌دهد.

---

[1] باتوجه‌به اینکه برای هر تابع f، هر عضو X به یک عضو Y می‌رود، عبارت یک‌به‌یک می‌تواند بسیار گمراه کننده باشد. هم‌دانشگاهی من، الان اسلامسون می‌گوید: به‌جای توابع یک‌به‌یک بهتر است توابع دوبه‌دو را به کار ببریم؛ با این ایده که اگر دو عضو مجزا از X بگیریم، آن‌ها باید به دو عضو مجزا از Y بروند.



شکل ۱.۳۰: به ترتیب از چپ، تابع انژکتیو و تابع غیر انژکتیو

مثال ۱.۳۰.

(آ) *تابع* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *که* $f(x) = 5x - 3$ *انژکتیو است. فرض کنید که* $f(x_1) = f(x_2)$*؛ آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longrightarrow\ & 5x_1 - 3 = 5x_2 - 3 \\ \Longrightarrow\ & x_1 = x_2. \end{aligned}$$

پس f *انژکتیو است.*

(ب) *تابع* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *با* $f(x) = x^2$*، انژکتیو نیست.*
(برای اثبات، تنها به یک مثال نقض نیاز داریم.)

از اینکه $f(1) = 1^2 = (-1)^2 = f(-1)$*، می‌بینیم که* f *انژکتیو نیست.*

(ج) *تابع* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *با* $f(x) = x^2$ *یک‌به‌یک است. فرض کنید که* $f(x_1) = f(x_2)$*، آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 = x_2^2 \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین $f(x_1) = f(x_2)$ *نتیجه می دهد* $x_1 = x_2$ *یا* $x_1 + x_2 = 0$*. اگر اولی درست باشد،* f *انژکتیو است. اگر بعدی درست باشد، یعنی* $x_1 = -x_2$*، اما اگر* $x_2 \in \mathbb{N}$ *باشد، آنگاه* $x_1 \notin \mathbb{N}$*. بنابراین فقط اولی امکان‌پذیر است.*
مقایسه این مثال با مثال قبلی، اهمیت دامنه تعریف برای نگاشت را نشان می دهد؛ پس نباید تنها ضابطه تعریف f *را مشاهده کنیم.*

(د) *در نظر بگیرید* $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *با* $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)}$ *داده شده باشد. آنگاه* f *انژکتیو است.*
فرض کنید که $f(x_1) = f(x_2)$*. آنگاه داریم:*

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longrightarrow\ & \frac{x_1}{(x_1 - 1)} = \frac{x_2}{(x_2 - 1)} \\ \Longrightarrow\ & x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1) \\ \Longrightarrow\ & x_1x_2 - x_1 = x_2x_1 - x_2 \\ \Longrightarrow\ & -x_1 = -x_2 \\ \Longrightarrow\ & x_1 = x_2. \end{aligned}$$

چگونه نشان دهید که تابع انژکتیو است.

نشان دادن اینکه تابعی انژکتیو است، ساده است.
فرض کنید $f(x_۱) = f(x_۲)$. سپس با نتیجه‌گیری مستقیم نشان دهید که $x_۱ = x_۲$.

توابع سوژکتیو

تعریف ۲.۳۰.
تابع $f : X \longrightarrow Y$ سوژکتیو یا پوشا گفته می‌شود، اگر برای هر $y \in Y$، $x \in X$ی موجود باشد به‌طوری‌که $f(x) = y$.

یک طرح کلی از یک تابع پوشا و یک تابع ناپوشا در شکل ۲.۳۰ ارائه شده است.
باتوجه‌به معلومات کمیت‌سنجی، می‌دانیم که اگر کسی، عضوی از Y مانند y را به ما بدهد، باید بتوانیم $x \in X$ی را بیابیم که $f(x) = y$ درست باشد.

مثال ۲.۳۰.

(آ) *نگاشت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^۳$، سوژکتیو است.*
فرض کنید که $y \in \mathbb{R}$. نیاز داریم که $f(x) = y$ باشد، یعنی $y = x^۳$. کافی است قرار دهیم $x = y^{\frac{۱}{۳}}$. بیایید این را به‌شکلی مناسب بنویسیم:
فرض کنید که $y \in \mathbb{R}$. آنگاه در نظر بگیرید $x = y^{\frac{۱}{۳}}$. داریم:

$$f(x) = f(y^{\frac{۱}{۳}}) = (y^{\frac{۱}{۳}})^۳ = y.$$

لذا f سوژکتیو است.

(ب) *تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = ۵x - ۳$، سوژکتیو است.*
باتوجه‌به اینکه تعریف سوژکتیو بودن شامل یک کمیت وجودی می‌شود، پس برای هر $y \in \mathbb{R}$، باید xی بیابیم به‌طوری‌که $f(x) = y$ باشد. تلاش می‌کنیم که معادله‌ای را با y داده شده حل کنیم. پس xی می‌خواهیم به‌طوری‌که $y = ۵x - ۳$. روشن است که می‌توانیم این را بازسازی کنیم، به‌طوری‌که x، حاصل معادله باشد:

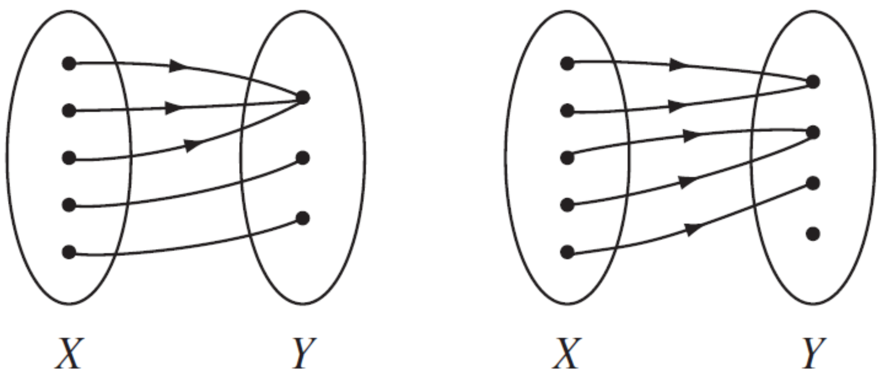
$$x = \frac{y + ۳}{۵}.$$

معادله را به‌شکل مرسوم می‌نویسیم:
تابع f سوژکتیو است. فرض کنید $y \in \mathbb{R}$، آنگاه $x = \frac{y+۳}{۵}$ را در نظر بگیرید؛ داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\frac{y + ۳}{۵}) \\ &= ۵(\frac{y + ۳}{۵}) - ۳ \\ &= y + ۳ - ۳ \\ &= y. \end{aligned}$$

(ج) *نگاشت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^۲$ پوشا نیست. در نظر بگیرید $y = -۱$، آنگاه xی وجود ندارد که $f(x) = -۱$، زیرا باید $x^۲ = -۱$ شود.*

(د) *نگاشت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq ۰\}$ با ضابطه $f(x) = x^۲$ پوشاست.*
دوباره y در $\{z \in \mathbb{R} \mid z \geq ۰\}$ داده شده است، باید x را طوری بیابیم که $x = y^۲$ باشد. حال باتوجه‌به اینکه y نامنفی است، می توان فرض کرد که $x = \sqrt{y}$.



شکل ۲.۳۰: به ترتیب از چپ، تابع سوژکتیو و تابع غیر سوژکتیو

این مثال و مثال قبل، اهمیت برد تابع را هنگام سروکار داشتن با ویژگی سوژکتیو نشان می‌دهد.

چگونه نشان دهید که تابعی سوژکتیو است.

اثبات سوژکتیو بودن یک تابعی ساده است:
فرض می‌کنیم که y در برد (هم‌دامنه) باشد. سپس نشان می‌دهیم که یک x در مبدا وجود دارد به‌طوری‌که $f(x) = y$ و این معمولا شامل حل این معادله است. به زودی از حل یک معادله در اثبات نوشته‌مان استفاده می‌کنیم.

✍ توجه ۲.۳۰.

یک اشتباه معمول برای "اثبات سوژکتیو بودن" یک تابع این است که نشان دهیم اگر $x \in X$، آنگاه یک $y \in Y$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x) = y$ باشد. در این صورت که عضوی در X را گرفته‌ایم و یکی در Y یافته‌ایم؛ این تعریف تابع است! به خاطر داشته باشید که برای سوژکتیو بودن، باید عضوی در Y بگیریم و چیزی در X بیابیم که به آن نگاشته شود.

ترکیب توابع

حال موضوع به‌کارگیری یک تابع بعد از دیگری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۳.۳۰.

*فرض کنید که $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ هر دو تابع هستند. آنگاه **ترکیب** f و g، که با gof نمایش داده می‌شود، نگاشتی از X به Z است که با $(gof)(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود. به این شکل که اول f سپس g را به کار می‌گیریم.*

مثال ۳.۳۰.

(آ) *فرض کنید $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = x^۲$ داده شده باشند. آنگاه*

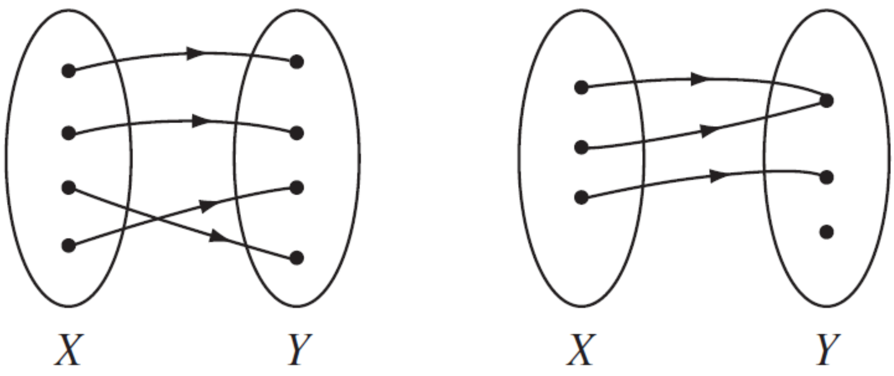
$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\frac{۱}{x}) = (\frac{۱}{x})^۲ = \frac{۱}{x^۲}.$$

(ب) *فرض کنید $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ با ضابطه $f(x) = x + ۱$ و $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ با ضابطه $g(x) = x^۲$ داده شده باشند. آنگاه*

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x + ۱) = (x + ۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱.$$

✍ توجه ۳.۳۰.

(آ) *اگر gof تعریف شده باشد، آنگاه این بدان معنی نیست که fog نیز تعریف شده است. زیرا دامنه f ممکن است متفاوت با برد g باشد.*



شکل ۳.۳۰: به ترتیب از چپ، تابع بیژکتیو و تابع غیر بیژکتیو

(ب) *اگر gof و fog تعریف شده باشند، در حالت کلی $gof \neq fog$.*

تمرین ۱.۳۰.

مثال‌هایی ارائه دهید که نشان دهد گزاره‌های بالا درست هستند.

توابع بیژکتیو

زمانی که دو ویژگی انژکتیو و سوژکتیو را درباره یک موضوع داریم، ریاضی‌دانان می‌پرسند: وقتی آن‌ها را کنار هم داریم چه چیزی به‌دست می‌آید؟

تعریف ۴.۳۰.

تابع $f : X \longrightarrow Y$ بیژکتیو گفته می‌شود (یک بیژکتیو یا یک تناظر یک‌به‌یک) اگر f انژکتیو و سوژکتیو باشد.

کلید درک تعریف در کلمه تناظر است. نظر اینکه اعضای X و Y کاملا با یکدیگر متناظر هستند.

مثال ۴.۳۰.

(آ) *نگاشت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^۳$ بیژکتیو است. چرا که باتوجه‌به مثال‌های قبل می‌دانیم که انژکتیو و سوژکتیو است.*

(ب) *دوباره با استفاده از مثال‌های قبل می‌دانیم که $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = ۵x - ۳$ انژکتیو و سوژکتیو و لذا بیژکتیو است.*

(ج) *نگاشت $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ با ضابطه $f(x) = x^۲$ انژکتیو است ولی سوژکتیو نیست (و بنابراین بیژکتیو نیست).*

تمرین ۲.۳۰.

(آ) *نشان دهید که نگاشت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = ax + b$ برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ با $a \neq ۰$ بیژکتیو است.*

(ب) *یک نگاشت مثال بزنید که سوژکتیو باشد ولی انژکتیو نباشد.*

چگونه نشان دهید که تابع بیژکتیو است.

برای اینکه نشان دهید تابعی بیژکتیو است، نشان دهید انژکتیو و سوژکتیو است.

توابع معکوس

ویژگی جذاب نگاشت بیژکتیو $f : X \longrightarrow Y$ این است که نگاشتی خاص از Y به X وجود دارد که معکوس f نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳۰.
تابع معکوس (نگاشت معکوس) تابع بیژکتیو $f : X \longrightarrow Y$، نگاشت $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ است که $f^{-1}(y)$، عضو یکتا x از X است به‌طوری‌که $f(x) = y$.

توجه کنید که در تعریف از سوژکتیو بودن و انژکتیو بودن استفاده کرده‌ایم: برای عضو $y \in Y$، باتوجه‌به اینکه نگاشت سوژکتیو است، می‌دانیم که یک عضو $x \in X$ موجود است به‌طوری‌که $f(x) = y$، و باتوجه‌به انژکتیو بودن f می‌دانیم x یکتاست.

مثال ۵.۳۰.

(آ) *مثال $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^{۳}$ را در نظر بگیرید. تابع معکوس $f^{-۱}(y) = y^{\frac{۱}{۳}}$ است.*

(ب) *معکوس $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = ۵x - ۳$، $f^{-۱}(y) = \dfrac{y+۳}{۵}$ است.*

همان‌طور که می‌بینید در این دو مثال، با به‌دست آوردن x از معادله $f(x) = y$، معکوس تابع به دست آمده است.

مثال ۶.۳۰.

(آ) *نشان دهید که توابع $\sin$ و $\cos$ وقتی نگاشت‌هایی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شوند، انژکتیو و سوژکتیو نیستند.*

(ب) *تحدید تابع $\sin$ را به مجموعه $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ و با برد $[-۱, ۱]$ در نظر بگیرید. به این صورت، $\sin : [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \longrightarrow [-۱, ۱]$؛ نشان دهید که این تابع بیژکتیو است.*

(ج) *می‌توانید یک دامنه و یک هم‌دامنه بیابید که $\cos$ بیژکتیو باشد؟*

قضیه ۱.۳۰.
فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ بیژکتیو است. دراین‌صورت

(آ) *تابع $f^{-۱}of$ روی X نگاشت همانی است، یعنی، برای هر $x \in X$، $(f^{-۱}of)(x) = x$،*

(ب) *تابع $fof^{-۱}$ روی Y نگاشت همانی است، یعنی، برای هر $y \in Y$، $(fof^{-۱})(y) = y$.*

تمرین ۳.۳۰.
قضیه بالا را ثابت کنید.

هشدار

یکی از مشکلات نمادگذاری در ریاضیات این است که گاهی اوقات نمادگذاری‌های استاندارد هماهنگ نیستند.

• مشکلات با نماد مثلثاتی

باتوجه‌به اینکه تابع $\sin$ به مجموعه $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ تحدید شد، $\sin : [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \longrightarrow [-۱, ۱]$ یک تابع بیژکتیو است و معکوس دارد. با استفاده از قراردادمان که معکوس f، $f^{-۱}$ است پس معکوس $\sin$، $\sin^{-۱}$ است. بنابراین مقدار معکوس در x، $\sin^{-۱}(x)$ می‌باشد. (مشهور به $\arcsin$ هم هست.)
اگرچه، $\sin^{۲}(x)$ را برای نشان دادن $(\sin(x))^{۲}$ به کار می‌بریم. به‌طورکلی‌تر، $\sin^{n}(x)$ را برای نشان دادن $(\sin(x))^{n}$ به کار می‌بریم. پس اگر $n = -۱$ چه رخ می‌دهد؟ $\sin^{-۱}(x)$ را برای نمایش مقدار معکوس در x و عبارت $\dfrac{۱}{\sin(x)}$ به کار می‌بریم. روشن است که برای دوری از اشتباه گرفتن این دو، باید به موقعیت توجه کنیم.

• مشکلات با مجموعه پیش تصویر (تصویر معکوس)

استفاده از نماد $f^{-۱}$ در به‌کارگیری مجموعه‌ها، مشکلات بیشتری دارد.

تعریف ۶.۳۰.

فرض کنید $f:X\longrightarrow Y$ یک تابع باشد و S زیرمجموعه‌ای از Y باشد. آنگاه **پیش‌تصویر** *(تصویر معکوس) S مجموعه $f^{-1}(S)$ است که*

$$f^{-1}(S)=\{x\in X\mid f(x)=y,\ y\in S\},$$

است. اگر S یک زیرمجموعه تک عضوی از Y مثل $\{y\}$ باشد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم $f^{-1}(y)$.

توجه کنید که $f^{-1}(S)$ یک مجموعه و زیرمجموعه X است.

مثال ۷.۳۰.

(۱) *فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^۲$ باشد.*

(آ) *اگر $S=\{۵\}$، آنگاه $f^{-1}(S)=\{-\sqrt{۵},\sqrt{۵}\}$.*

(ب) *اگر $S=\{-۵\}$، آنگاه $f^{-1}(S)=\emptyset$.*

(ج) *اگر $S=\{۰\}$، آنگاه $f^{-1}(S)=\{۰\}$.*

(د) *اگر $S=[۱,۲]$، آنگاه $f^{-1}(S)=[-\sqrt{۲},-۱]\cup[۱,\sqrt{۲}]$.*

(و) *اگر $S=[۰,۲]$، آنگاه $f^{-1}(S)=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$.*

(۲) *فرض کنید f تابع $\sin:\mathbb{R}\longrightarrow[-۱,۱]$ باشد. آنگاه $f^{-1}(۰)=\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$.*

دقت کنید که تصویر معکوس یک مجموعه برای همه توابع تعریف می‌شود؛ نیازی نیست f بیژکتیو باشد. مشکلات از آنجا ناشی می‌شود که f^{-1} می‌تواند برای نمایش یک تابع یا نمایش یک زیرمجموعه به کار رود. **معمولاً** *منظور باتوجه‌به متن، روشن است. نکته این است که شما باید هوشیار باشید و دقت کنید.*

انواع نامتناهی؛ شمارا و ناشمارا

حالا که بیژکتیو بودن یک تابع را تعریف کرده‌ایم، می‌توانیم انواع متفاوت نامتناهی را تعریف کنیم. ایده اصلی این است که انواع متفاوتی از نامتناهی وجود دارد: نامتناهی‌هایی که می‌توان شمرد و نامتناهی‌هایی که نمی‌توان شمرد. اعداد طبیعی (اعداد شمارا) مثال اصلی از یک مجموعه نامتناهی است که می‌توان شمرد. مجموعه اعداد حقیقی مثالی از یک مجموعه نامتناهی است که اعضای آن را نمی‌توان شمرد.

تعریف ۷.۳۰.

یک مجموعه نامتناهی X را **مجموعه نامتناهی قابل شمارش** *گوییم، اگر یک بیژکتیو بین X و $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد. همچنین X را* **شمارا** *یا* **شمارای نامتناهی** *گوییم.*

اگر X یک مجموعه نامتناهی، غیرقابل شمارش باشد، آنگاه X را **ناشمارا** *یا* **ناشمارای نامتناهی** *گوییم.*

مثال ۸.۳۰.

(آ) *با توجه به اینکه نگاشت همانی $id:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ با ضابطه $id(n)=n$ بیژکتیو است، لذا اعداد طبیعی شمارا هستند.*

(ب) *مجموعه اعداد زوج شمارا هستند، چرا که نگاشت $f:Even\longrightarrow\mathbb{N}$ با ضابطه $f(x)=\frac{x}{۲}$ یک بیژکتیو است.*
به‌طور مشابه، مجموعه اعداد فرد شماراست؛ می‌توانید بیژکسیون را ارائه دهید!
توجه کنید که مجموعه اعداد زوج یک زیرمجموعه محض $\mathbb{N}$ است، اما می‌توان یک بیژکسیون بین آن و $\mathbb{N}$ یافت.
اینگونه رفتارهای عجیب‌وغریب و غیرقابل تصور، وقتی با نامتناهی سروکار داریم، عادی است.

تمرین ۴.۳۰.

(آ) *نشان دهید که مجموعه اعداد مربع، $\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\cdots\}$، شمارا هستند.*

(ب) نشان دهید که مجموعه $\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \cdots, \frac{۱}{n}, \cdots\}$ شمارا است.

باید فکر کردن شبیه ریاضی‌دان‌ها را شروع کنیم و مجموعه‌های دیگری که شمارا هستند و آن‌هایی را که شمارا نیستند، پیدا کنیم. برای مثال، آیا $\mathbb{Z}$ شماراست؟ باتوجه‌به اینکه $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$، شهود ما ممکن است این باشد که هیچ بیژکسیونی بین آن دو وجود ندارد. در حقیقت، این استدلال ارائه شده (و اشتباه) را شنیده‌ام که "$\mathbb{N}$ در یک سمت، یعنی مثبت، نامتناهی است، در حالی که $\mathbb{Z}$ در دو سمت، یعنی مثبت و منفی، نامتناهی است و بنابراین این‌ها نمی‌توانند دارای اندازه یکسان باشند."

در واقع کاری که برای ساخت بیژکسیون مورد نیاز انجام می‌دهیم، شمارش اعضای $\mathbb{Z}$ به روشی خاص است. آن‌ها را به‌صورت ۰، ۱، ۱−، ۲، ۲−، ۳، ۳−، ۴، ۴−، ... فهرست می‌کنیم.

تمرین ۵.۳۰.

(آ) یک بیژکسیون صریح به‌دست آورید که این شمارش را ارائه دهد و نشان دهید یک بیژکسیون است. (راهنمایی: از تعریف حالت‌های زوج یا فرد وابسته به n استفاده کنید.)

(ب) گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

اگر X، شمارای نامتناهی باشد و $Y \subseteq X$، آنگاه Y شمارای نامتناهی است.

•اعداد گویا شمارا هستند.

اثبات اینکه مجموعه اعداد گویای مثبت $\mathbb{Q}$ شماراست، کمی سخت‌تر است. برای شروع با استفاده از روشی خاص از مرتب کردن کسرها نشان می‌دهیم که اعداد گویا مثبت شمارا هستند.

تصور کنید که همه احتمالات برای $\frac{a}{b}$ را در یک صفحه مانند شکل ۴.۳۰ بنویسیم. به‌ویژه همه اعداد گویا روی این صفحه نمایش داده شده باشند. اگرچه، بعضی دو یا چند بار نمایش داده شده‌اند، برای مثال $\frac{۲}{۲}$ همان $\frac{۱}{۱}$ است.

هدف این است که ترتیبی از همه این کسرها ارائه دهیم. این ترتیب با پیکان‌ها شرح داده شده است. از $\frac{۱}{۱}$ شروع می‌شود، سپس در سطر پایین به $\frac{۲}{۱}$ می‌رود؛ بعد به خط بالا برمی‌گردد. همان‌طور که می‌بینید پیکان‌ها ما را به ایجاد مارپیچی پیرامون صفحه وادار می‌کنند. دقت کنید که برای گذر از هر عدد در صفحه پیش می‌رویم.

حالا به‌طور روشن یک بیژکسیون بین این جفت‌ها و $\mathbb{N}$ داریم. این آنچه می‌خواهیم نیست؛ ولی باتوجه‌به یکی بودن یا تکرار بعضی از کسرها، بدون هیچ مشکلی با رسیدن به هر عدد تکراری آنرا دور می‌اندازیم. این یک بیژکسیون بین اعداد طبیعی و اعداد گویای مثبت ارائه می‌دهد. بنابراین، هر دو قابل شمارش هستند. در نتیجه، آن‌ها به یک اندازه نامتناهی‌اند. اگرچه ممکن است شخصی بی‌تجربه فکر کند اعداد گویای مثبت بیشتر از اعداد طبیعی هستند.

تمرین ۶.۳۰.

(آ) ثابت کنید مجموعه اعداد گویا ($\mathbb{Q}$)، شماراست.

(ب) ثابت کنید $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست.

•اعداد حقیقی ناشمارا هستند.

مثالی از یک مجموعه ناشمارا نیاز است. برای آسانی کار، مجموعه اعداد حقیقی از ۰ تا ۱ را در نظر می‌گیریم. واضح است که نامتناهی است، اما آیا شماراست؟ در حقیقت، شمارا نیست.

با برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید یک بیژکسیون بین $\mathbb{N}$ و $[۰,۱)$ وجود دارد. آنگاه می‌توان اعضای $[۰,۱)$ را فهرست کرد. اجازه دهید از بسط‌های اعشاری آن‌ها استفاده کنیم. بنابراین x می‌تواند به‌صورت $۰/x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵\cdots$ نوشته شود که x_i یک رقم از ۰ تا ۹ است.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & \to & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \to & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & \to & \frac{1}{7} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \cdots & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & & \frac{2}{7} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & & \frac{3}{7} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & & \frac{4}{7} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \frac{5}{6} & & \frac{5}{7} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{6}{1} & & \frac{6}{2} & & \frac{6}{3} & & \frac{6}{4} & & \frac{6}{5} & & \frac{6}{6} & & \frac{6}{7} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{7}{1} & & \frac{7}{2} & & \frac{7}{3} & & \frac{7}{4} & & \frac{7}{5} & & \frac{7}{6} & & \frac{7}{7} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

شکل ۴.۳۰: مرتب سازی اعداد گویا در صفحه

در نظر بگیرید بتوان اعداد $[0,1]$ را فهرست کرد.

$$0/a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots$$
$$0/b_1b_2b_3b_4b_5b_6\cdots$$
$$0/c_1c_2c_3c_4c_5c_6\cdots$$
$$0/d_1d_2d_3d_4d_5d_6\cdots$$
$$0/e_1e_2e_3e_4e_5e_6\cdots$$
$$0/f_1f_2f_3f_4f_5f_6\cdots$$
$$\vdots$$

حال، بیایید یک عدد گویای جدید از $[0,1]$ را بسازیم که در این فهرست نیست. آن را x می‌نامیم. اولین رقم x بعد از نقطه اعشار هر رقمی غیر از a_1 ، صفر یا ۹ باشد. دومین رقم هر چیزی غیر از b_2 ، صفر یا ۹ باشد. رقم سوم هر چیزی غیر از c_3 ، صفر یا ۹ باشد و همین‌طور ادامه می‌دهیم. همیشه kامین رقم x را هر چیزی غیر از ۹ ، صفر یا kامین رقم kامین عضو قرار می‌دهیم. باتوجه‌به اینکه x به‌شکل $0/x_1x_2x_3x_4x_5\cdots$ است. می‌دانیم بین ۰ و ۱ است. بنابراین باید در فهرست باشد. عدد اول فهرست نیست زیرا اولین رقم آن با a_1 تفاوت دارد. عدد دوم فهرست نمی‌تواند باشد، زیرا رقم دوم آن با رقم دوم b یکسان نیست و همینطور ادامه دارد. نمی‌تواند عضو kام فهرست باشد چرا که kامین رقم آن با kامین رقم، kامین عضو فهرست متفاوت است. بنابراین بسط اعشاری x در فهرست نیست. به‌علاوه با هیچ یک از اعضای فهرست که ۹ یا صفر یک تکرار اعشاری دارد مانند اعداد $0/2499999\cdots$ که همان $0/25000000\cdots$ است یا $0 = 0/000000\cdots$ و $0/999\cdots = 1$ نیز یکسان نیست؛ پس امکان فهرست اعداد $[0,1]$ رد می‌شود.

تمرین ۷.۳۰.

از نتیجه بالا را برای اثبات ناشمارا بودن $\mathbb{R}$ استفاده کنید.

✍ **توجه ۴.۳۰.**

(۱) *باتوجه‌به اثبات ناشمارایی $[0,1]$ ، ایده خوبی است که برای اثبات ناشمارایی هر مجموعه، فرض کنیم شماراست و به دنبال یک تناقض جلو برویم.*

(۲) *مجموعه شمارا $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$ یک زیرمجموعه محض از مجموعه ناشمارا $[0,1]$ است، بنابراین تصدیق می‌کنیم که بعضی نامتناهی‌ها بزرگ‌تر از بعضی دیگر هستند.*

تمرین

۱. مشخص کنید که کدام یک از توابع زیر انژکتیو، سوژکتیو یا بیژکتیو هستند. معکوس هر بیژکسیون را بنویسید.

(آ) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^۲+x+۱$.

(ب) $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ با ضابطه $f(x)=x^۲+x+۱$.

(ج) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x^۳$.

(د) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x\neq ۰,\\ ۰ & x=۰.\end{cases}$$

(ذ) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{۳x-۴}{x^۲+۵}$.

(و) $f:\mathbb{R}-\{-۲\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{۵\}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{۵x}{x+۲}$.

(ه) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ با ضابطه $f(x)=|x-۳|+۳$.

(ی) $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ با ضابطه $f(x)=۲^x$.

۲. آیا برای هر نگاشت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ در تمرین قبل که بیژکسیون نیست، می‌توانید a و b را طوری بیابید که نگاشت $g:[a,b]\longrightarrow f([a,b])$، با تعریف $g(x)=f(x)$ برای هر $x\in[a,b]$ یک بیژکسیون باشد. معکوس هر g را بیابید.

۳. شرح دهید، ترکیبات fog، gof، fof، و gog، چه زمانی قابل تعریف هستند،

(آ) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تعریف شده با $f(x)=x^۲-۱$ و $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تعریف شده با $g(x)=x+۲$.

(ب) تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow(۰,۱)$ تعریف شده با $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲+۱}$ و $g:(۰,۱)\longrightarrow(۰,۱)$ تعریف شده با $g(x)=۱-x$.

۴. کدام یک از گزاره‌های زیر درست هستند؟ برای گزاره‌های درست یک اثبات و برای گزاره‌های نادرست یک مثال نقض ارائه دهید.

(آ) ترکیب دو تابع انژکتیو، انژکتیو است.

(ب) ترکیب دو تابع سوژکتیو، سوژکتیو است.

(ج) ترکیب دو تابع بیژکتیو، بیژکتیو است.

(د) ترکیب یک تابع انژکتیو و یک تابع سوژکتیو، بیژکتیو است.

۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بیژکتیو باشند. برای (آ) و (ب) مثال نقض بزنید،

(آ) تابع $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $h(x)=f(x)g(x)$، انژکتیو است.

(ب) تابع $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه $h(x)=f(x)+g(x)$، انژکتیو است. برای توابع سوژکتیو چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۶. قضیه ۱.۳۰ به‌طور اساسی "شرایط ویژه $\Longrightarrow$ f یک‌به‌یک است" بود. بنابراین می‌توانیم بپرسیم که آیا عکس آن درست است. در این حالت نمی‌توان شرایط را بدون تعریف اولیه $f^{-۱}$، نوشت. پس راه احتمالی ساختن یک گزاره "اگر و تنها اگر" این است که:
فرض کنید که $f:X\longrightarrow Y$ یک تابع است. آنگاه f بیژکتیو است اگر و تنها اگر تابعی مانند $g:Y\longrightarrow X$ موجود باشد به‌طوری‌که

(آ) gof روی X نگاشت همانی باشد، یعنی، برای هر $x \in X$، $(gof)(x) = x$ و

(ب) fog روی Y نگاشت همانی باشد، یعنی، برای هر $y \in Y$، $(fog)(y) = y$.

در این حالت تابع معکوس f، $g = f^{-1}$ است.

گزاره‌های بالا را اثبات یا رد کنید.

۷. توابع $\log_e^x : (\circ, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ و $e^x : \mathbb{R} \longrightarrow (\circ, \infty)$ را در نظر بگیرید. آیا انژکتیو، سوژکتیو یا بیژکتیو هستند؟

۸. فرض کنید A و B مجموعه‌های نامتناهی هستند. برای گزاره‌های زیر یک اثبات یا یک مثال نقض ارائه دهید.

(آ) اگر A و B هر دو شمارا باشند، آنگاه $A \times B$ نیز شماراست.

(ب) اگر A شمارا باشد و $B \subset A$، آنگاه B نیز شماراست.

(ج) اگر A و B شمارا باشند، آنگاه $A \cup B$ شماراست.

(د) اگر A و B شمارا باشند، آنگاه $A \cap B$ شماراست.

(و) اگر $B \subset A$، آنگاه $A - B$ متناهی است.

(ه) اگر $B \subset A$، آنگاه $A - B$ نامتناهی است.

(ی) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ناشماراست. یعنی مجموعه اعداد گنگ ناشماراست.

چکیده

- تابع $f : X \longrightarrow Y$ انژکتیو است اگر و تنها اگر، برای هر $x_1 \in X$، $x_2 \in X$، $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه دهد که $x_1 = x_2$.
- f سوژکتیو است اگر برای هر $y \in Y$، $x \in X$ی باشد به‌طوری‌که $f(x) = y$.
- ترکیب $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$، که با gof نمایش داده می‌شود، نگاشتی از X به Z است که با $(gof)(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود.
- تابع f بیژکتیو گفته می‌شود، اگر انژکتیو و سوژکتیو باشد.
- تابع f^{-1} دو مفهوم دارد! معکوس تابع f است یا برای تعریف پیش‌تصویر مجموعه‌ها به کار می‌رود.
- مجموعه نامتناهی X شماراست، اگر یک بیژکسیون بین X و $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد.
- یک مجموعه نامتناهی ناشماراست، اگر شمارا نباشد.
- مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ شمارا هستند.
- مجموعه‌های $[0, 1]$ و $\mathbb{R}$ ناشمارا هستند.

فصل ۳۱

روابط هم‌ارزی

همه حیوانات با هم برابرند، اما بعضی برابرترند.

” جورج اورول[۱]، قلعه حیوانات، ۱۹۴۶“

در این فصل، می‌بینیم که چگونه ریاضیات انتزاعی می‌شود، یعنی چند ویژگی مورد علاقه خود را از مثالی شناسایی می‌کنیم و سپس یک تعریف کلی می‌سازیم که مثال را پوشش دهد. این کار کمک می‌کند تا بتوانیم گروه وسیع‌تری از موضوعات را بررسی کنیم.

در فصل ۲۹، ایده حساب پیمانه‌ای این بود که اگر دو عدد در تقسیم بر n، باقیمانده یکسان داشته باشند، معادل باشند. حال قصد داریم که درک خود از مفهوم معادل را خلاصه کرده و آن را یک رابطه هم‌ارزی بنامیم. برای مثال، در دسته‌ای استاندارد از کارت‌های بازی اگر دو کارت از یک نوع باشند، می‌توان دو کارت را معادل گفت؛ یا اینکه اگر مقدار یکسان داشته باشند، آن‌ها را هم‌ارز گوییم.

درک مفهوم رابطه هم‌ارزی برخلاف دیگر مفاهیم عمومی‌تر ریاضیات، سخت است، یک نقطه عدم تحرک در مفهوم کلاس هم‌ارزی وجود دارد؛ همان جایی که همه اعضایی که با یکدیگر معادلند، گردآوری می‌شوند و با آن‌ها مانند یک عضو برخورد می‌شود. برای مثال، اگر دو کارت که دارای موقعیت یکسان هستند را معادل معرفی کنیم، آنگاه کلاس هم‌ارزی هفت پیک، شامل همه پیک‌هاست.

اگر رابطه هم‌ارزی برای کارت‌های هم‌ارزی را، داشتن ارزشی یکسان فرض کنیم، آنگاه کلاس هم‌ارزی هفت پیک، همه هفت‌هاست:

$$\{\text{هفت پیک، هفت دل، هفت گشنیز و هفت خشت}\}.$$

مبحث این کلاس موضوعی جدید و با هر چیزی که قبلا با آن برخورد کرده‌اید، متفاوت است؛ اما درک آن منتهی به ریاضیات نو و هیجان‌انگیز می‌شود؛ برای مثال گروه‌های خارج‌قسمتی از نظریه گروه‌ها، یا فضاهای خارج‌قسمتی در توپولوژی، از این دسته‌اند.

رابطه‌ها

ارائه تعریف رابطه ساده است. می‌توانیم مثال‌های زیادی بزنیم.

[۱] اریک آرتور بلر (*Eric Arthur Blair*) با نام مستعار جورج اورول (*George Orwell*) زاده ۲۵ ژوئن ۱۹۰۳، درگذشته ۲۱ ژانویه ۱۹۵۰، داستان‌نویس، روزنامه‌نگار، منتقد ادبی و شاعر انگلیسی بود. او را بیشتر برای دو رمان مشهور قلعه حیوانات و ۱۹۸۴ می‌شناسند.

مثال ۱.۳۱.

(۱) *عدد x با y رابطه دارد، اگر $x = y$.*
(۲) *عدد صحیح x با عدد صحیح y رابطه دارد، اگر $x = y \mod n$.*
(۳) *عدد صحیح x با عدد صحیح y رابطه دارد، اگر $x|y$.*
(۴) *شخص A با B رابطه دارد، اگر A خواهر یا برادر B باشد.*
(۵) *عدد حقیقی x با عدد حقیقی y رابطه دارد، اگر $x < y$.*
(۶) *عدد حقیقی x با عدد حقیقی y رابطه دارد، اگر $xy = ۰$.*
(۷) *شهر X با شهر Y ارتباط دارد، اگر در روز یکشنبه، یک پرواز از X به Y موجود باشد.*

رابطه‌های زیادی وجود دارند که می‌توان تعریف کرد، اما چگونه می‌توان نماد رابطه را به روش ریاضی تعریف کرد؟ مجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم؛ برای مثال، مجموعه اعداد صحیح، اعداد طبیعی، مردم، یا شهرها، سپس رابطه‌ای با آن تعریف می‌کنیم. این مجموعه را X می‌گوییم. بعد دو عضو می‌گیریم، بنابراین در حقیقت با $X \times X$ کار می‌کنیم. که می‌توان این را در تعریف نهایی رابطه دید.

تعریف ۱.۳۱.

فرض کنید X یک مجموعه باشد و R زیرمجموعه‌ای از ضرب $X \times X$ باشد. گوییم x با y **رابطه دارد** *یا با* **رابطه R مرتبط** *شده است و می‌نویسیم $y \sim x$ اگر $(x, y) \in R$.*

مثال ۲.۳۱.

فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ و رابطه $\sim$ را به این شکل تعریف کنیم که "عدد صحیح x با عدد صحیح y رابطه دارد، اگر $x = y \mod n$." بنابراین، اگر برای مثال $n = ۵$ باشد، آنگاه $(۲, ۷) \in R$ و $(۱۰۱, ۲۱) \in R$ اما $(۳, ۴) \notin R$ و $(۱۰۱, ۲۰) \notin R$.

دقت کنید که در تعریف، R رابطه است نه $\sim$. گرچه در عمل، مرجع R را رها می‌کنیم و درمورد $\sim$ به‌عنوان یک رابطه روی X صحبت می‌کنیم. در عمل بیشتر ریاضی‌دانان به‌ندرت در مورد یک رابطه به‌عنوان یک زیرمجموعه فکر می‌کنند.

رابطه‌های هم‌ارزی

حال می‌توان به نوع خاصی از رابطه پرداخت که در ریاضیات بسیار مهم است:

تعریف ۲.۳۱.

رابطه $\sim$ روی X را یک رابطه هم‌ارزی گوییم، اگر در سه شرط زیر صدق کند:

(۱) *بازتابی: برای هر $x \in X$، $x \sim x$.*
(۲) *تقارن: برای هر $x, y \in X$، $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$.*
(۳) *تعدی: برای هر $x, y, z \in X$، $x \sim y$ و $y \sim z$ نتیجه می‌دهد که $x \sim z$.*

بنابراین برای هر رابطه، باید همه این شرایط را بررسی کنیم. چرا این‌ها برای کار کردن شرایط خوبی هستند؟ سال‌ها پیش ریاضی‌دانان کشف کردند که این سه، ساده و بسیار معمولند. به‌علاوه، خواهیم دید که اجازه می‌دهند اعضا را در مجموعه‌های مجزا گروه‌بندی کنیم.

مثال ۳.۳۱.

برای عدد طبیعی n، رابطه $\sim$ روی $\mathbb{Z}$ با

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \ (mod \ n),$$

تعریف می‌شود.
شرایط را بررسی می‌کنیم:

(۱) بازتابی: $x = x \mod n \Longleftrightarrow x \sim x$. از آنجا که همیشه $x = x \ (mod \ n)$ درست است، می‌بینیم که $\sim$ بازتابی است.
(۲) تقارن: $x \sim y$ نتیجه می‌دهد $x = y \ (mod \ n)$، و می‌دانیم که این نتیجه می‌دهد $y = x \ (mod \ n)$، دقیقا می‌گوید $y \sim x$. بنابراین $\sim$ متقارن است.
(۳) تعدی: فرض کنید که $x \sim y$ و $y \sim z$. لذا $x = y \ (mod \ n)$ و $y = z \ (mod \ n)$ است. باتوجه‌به تعریف همنهشتی، یعنی، هر سه عدد، در تقسیم بر n باقیمانده یکسانی دارند، نتیجه می‌گیریم که $x = z \ (mod \ n)$، یعنی $x \sim z$. بنابراین $\sim$ متعدی است. هر سه شرط صادق هستند، بنابراین $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است.

مثال ۴.۳۱.

(۱) رابطه $<$ روی مجموعه اعداد حقیقی یک رابطه هم‌ارزی نیست، زیرا بازتابی نیست: برای هر x، $x < x$ درست نیست.
(۲) رابطه $\leq$ روی مجموعه اعداد حقیقی یک رابطه هم‌ارزی نیست، زیرا متقارن نیست: برای مثال $۳ \leq ۴$ درست است اما $۴ \leq ۳$ درست نیست.
(۳) رابطه "A پدربزرگ B است" متعدی نیست. زیرا اگر X پدربزرگ Y و Y پدربزرگ Z باشد، آنگاه X الزاما پدربزرگ Z نیست.

تمرین ۱.۳۱.

مشخص کنید کدام یک از روابط زیر بازتابی، تقارنی یا متعدی و کدام یک از روابط هم‌ارزی هستند.

(۱) عدد حقیقی x با عدد حقیقی y رابطه دارد، اگر $x = y$. (توجه کنید که این یک تعریف است پس به‌طور ضمنی یک "اگر و تنها اگر"است نه تنها یک "اگر".)
(۲) عدد طبیعی x با عدد طبیعی y رابطه دارد، اگر $x < y$.
(۳) عدد حقیقی x با عدد حقیقی y رابطه دارد، اگر $x \leq y$.
(۴) عدد حقیقی x با عدد حقیقی y رابطه دارد، اگر $xy = ۰$.
(۵) $x \sim y$ است، اگر x خواهر یا برادر y باشد.
(۶) مجموعه A با B رابطه دارد، اگر $A \subset B$.
(۷) برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، x با y رابطه دارد، اگر $x - y$ یک عدد صحیح باشد.
(۸) فرض کنید $X = \mathbb{R}$. لذا برای هر $x, y \in X$، $x \sim y$، اگر $|x - y| \leq ۱$.

تمرین ۲.۳۱.

برای شرط بازتابی، تقارنی و تعدی مثالی از یک رابطه ارائه دهید که در آن شرط صدق کند ولی در دو شرط دیگر صادق نباشد. سپس، برای هر شرط مثالی از یک رابطه ارائه دهید که در آن شرط صادق نباشد ولی در دو شرط دیگر صادق باشد.

•تیزبینی

اگر با سه شرط بازتابی، تقارنی و تعدی بازی کنیم، ممکن است به نظر برسد که می‌توان بازتابی بودن را از دوتای دیگر نتیجه گرفت، پس فرض کنید یک رابطه متقارن و متعدی است.
اگر $x \sim y$، باتوجه‌به متقارن بودن $y \sim x$. اما با استفاده از متعدی بودن (قرار دادن $z = x$) می‌توان نتیجه گرفت

$x \sim x$.
بنابراین به نظر می‌رسد که شرط بازتابی اضافی است؛ اما اینطور نیست! شروع کار را مشاهده کنید. می‌گوید ”اگر $x \sim y$ ...“. این یک اگرِ بزرگ است! تضمینی نیست که x با عضو مجزا دیگری رابطه داشته باشد! (و این شامل خودش نیز می‌شود!) بنابراین، استدلال غلط است.
تمرین قبل رابطه‌ای را خواسته بود که متقارن و متعدی باشد اما بازتابی نباشد. چنین رابطه‌ای، مثالی برای همین وضع است.

کلاس‌های هم‌ارزی

نماد کلاس هم‌ارزی در ریاضیات بسیار مهم است. همان‌طور که در بخش بعدی خواهیم دید، این نماد، این امکان را می‌دهد که اعضای هم‌ارز را با یکدیگر دسته‌بندی کنیم.

تعریف ۳.۳۱.

کلاس هم‌ارزی x *تحت رابطه هم‌ارزی $\sim$، با $[x]$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ است.*

مثال ۵.۳۱.

(۱) *در مثال ۳.۳۱ دیدیم که می‌توان از حساب پیمانه‌ای برای قراردادن یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}$ استفاده کرد. کلاس‌های هم‌ارزی به‌صورت زیر هستند.*

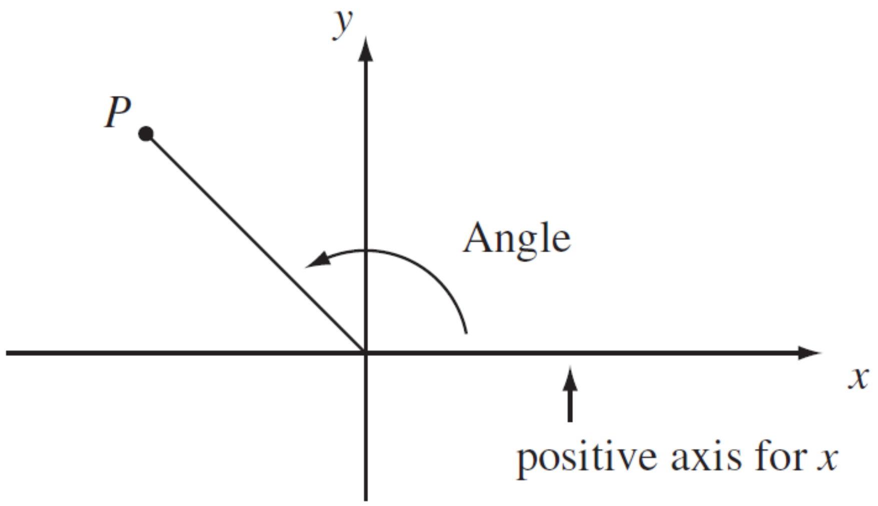
$$\begin{aligned}
[0] &= \Big\{\cdots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\Big\}\\
[1] &= \Big\{\cdots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \cdots\Big\}\\
[2] &= \Big\{\cdots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \cdots\Big\}\\
[3] &= \Big\{\cdots, -3n+3, -2n+3, -n+3, 3, n+3, 2n+3, 3n+3, \cdots\Big\}\\
&\vdots\\
[n-1] &= \Big\{\cdots, -3n+(n-1), -2n+(n-1), -n+(n-1), n-1,\\
&\qquad n+(n-1), 2n+(n-1), 3n+(n-1)\cdots\Big\}\\
&= \Big\{\cdots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \cdots\Big\}\\
[n] &= [0].
\end{aligned}$$

(۲) *فرض کنید X مجموعه‌ای از ورق‌ها در یک دسته استاندارد از ورق‌های بازی باشد. در نظر بگیرید که رابطه $\sim$، به‌صورت ”$x \sim y$ اگر x و y هم نوع باشند“ تعریف شده باشد. آنگاه چهار کلاس هم‌ارزی مجزا موجود است: پیک‌ها، دل‌ها، گشنیزها و خشت‌ها (لوزی ها).*

- **دم دستی**

یک رابطه هم‌ارزی ارائه شده است، بپرسید ”کلاس‌های هم‌ارزی شبیه چه چیزی عمل می‌کنند؟“

تمرین ۳.۳۱.



شکل ۱.۳۱: زاویه یک نقطه

فرض کنید $X = \mathbb{R}^۲$ صفحه باشد. دو رابطه زیر را در نظر بگیرید:

(۱) *نقطه $p_۱ \in \mathbb{R}^۲$ با $p_۲ \in \mathbb{R}^۲$ رابطه دارد، اگر فاصله آن‌ها از مبدأ یکسان باشد.*

(۲) *زاویه نقطه p را، زاویه بین خطی که p را به مبدأ وصل می‌کند و محور مثبت xها، تعریف می‌کنیم. شکل ۱.۳۱ را ببینید. نقطه $p_۱ \in \mathbb{R}^۲$ با $p_۲ \in \mathbb{R}^۲$ رابطه دارد اگر زاویه‌های آن‌ها یکسان باشند. نشان دهید که این‌ها رابطه‌های هم‌ارزی هستند. کلاس‌های هم‌ارزی کدامند؟ تصاویری برای ارائه کلاس‌های هم‌ارزی رسم کنید.*

• افرازها

حال به موضوع رابطه‌های هم‌ارزی می‌رسیم. در این بخش خواهیم دید که هر رابطه هم‌ارزی یک مجموعه را به گونه‌ای تقسیم می‌کند که هر قسمت مجزا و شامل اعضایی است که با همه قصد و منظورها، یکسان هستند. برای مثال، کشاورزان همه حیواناتشان را در یک مزرعه یکسان قرار نمی‌دهند. آن‌ها زمین را طوری تقسیم می‌کنند که گاوها در یک قسمت، مرغ‌ها در یک قسمت، گوسفندان در قسمت دیگر و غیره هستند. با این روش، حیوانات ساده‌تر مدیریت می‌شوند. به‌طور واضح با هر موضوع، برای مثال، گاوها متفاوت خواهند بود. آن‌ها نام‌ها و هویت‌های خودشان را دارند اما نه در همه شرایط؛ برای مثال زمانی که برای دوشیدن می‌آیند یکسانند.

به‌کارگیری یک رابطه هم‌ارزی روش بسیار قدرتمندی از سازماندهی کردن یک مجموعه است؛ آن مجموعه را به قسمت‌های مدیریت‌پذیرتر تقسیم می‌کند. به روشنی در هر مسئله ریاضیات، باید رابطه هم‌ارزی صحیح را انتخاب کرد. برای مثال، کشاورز حیوانات را بر اساس تعداد پا جدا نمی‌کند.

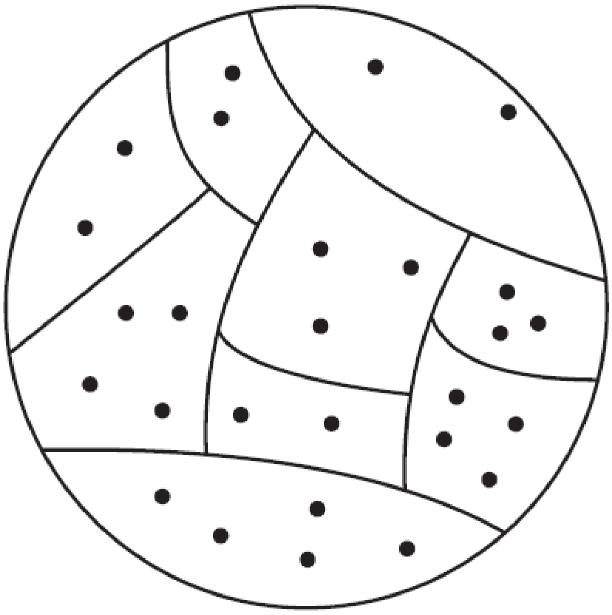
برای هر رابطه هم‌ارزی روی X، کلاس‌های هم‌ارزی X را طوری تقسیم می‌کنند که اجتماع کلاس‌های هم‌ارزی برابر X است و برای هر دو عضو x و y در X، کلاس‌های x و y یا مجزا و یا یکسان هستند. بنابراین مجموعه به قسمت‌های مجزا شکسته می‌شود. شکل ۲.۳۱ را ببینید.
حال این را به‌صورت ریاضی بیان کنیم.

قضیه ۱.۳۱.

فرض کنید $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی تعریف شده روی X باشد. در این صورت

(۱) $\bigcup_{x\in X}[x] = X$ *(نماد به کار رفته در معادله، به معنی اجتماع مجموعه‌های $[x]$ برای هر $x \in X$ است.)*،

(۲) $x \sim y$ *اگر و تنها اگر* $[x] = [y]$،



شکل ۲.۳۱: یک افراز برای یک رابطه هم‌ارزی

(۳) $y \nsim x$ *اگر و تنها اگر* $\emptyset = [y] \cap [x]$.

برهان.

(۱) فرض کنید $x \in X$. باتوجه‌به اینکه $x \sim x$، آنگاه $x \in [x]$، $x \in \bigcup_{x\in X} [x]$. بنابراین، $X \subseteq \bigcup_{x\in X} [x]$. برعکس آن و یعنی $\bigcup_{x\in X} [x] \subseteq X$ روشن است.

(۲) $[\Longrightarrow]$ فرض کنید که $x \sim y$. اگر $z \in [x]$ باشد، آنگاه $x \sim z$ و بنابراین با خاصیت تعدی $y \sim z$، لذا $z \in [y]$. این نشان می‌دهد $[x] \subseteq [y]$. اما اگر $y \sim x$، آنگاه باتوجه‌به خاصیت تقارن $x \sim y$ و با دلایل مشابه بالا درمی‌یابیم $[y] \subseteq [x]$. بنابراین $[x] = [y]$.

(۲) $[\Longleftarrow]$، چون $x \sim x$ لذا $x \in [x] = [y]$ بنابراین $y \sim x$.

(۳) $[\Longrightarrow]$ فرض کنید که $y \nsim x$ و برای رسیدن به تناقض در نظر بگیرید که

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

چون $[x] \cap [y] \neq \emptyset$، $z \in X$ موجود است که $z \in [x]$ و $z \in [y]$، به‌عبارت‌دیگر $x \sim z$ و $y \sim z$. باتوجه‌به خاصیت تعدی $y \sim x$ و این یک تناقض است.

(۳) $[\Longleftarrow]$ فرض کنید که $[x] \cap [y] = \emptyset$ و $y \sim x$. چون $y \sim x$، آنگاه $x \in [x]$ و $x \in [y]$، بنابراین $x \in [x] \cap [y]$ و این تناقض است.

■

✍ توجه ۱.۳۱.

قضیه قبل نشان می‌دهد که مجموعه‌های $[x]$ و $[y]$ ناتهی و با یکدیگر یکسان، یا مجزا هستند.

مسیر اثبات را این بار همراه با تحلیل آن پیش می‌رویم.

برهان. در ابتدا دقت کنید، فرض این است که $\sim$، یک رابطه هم‌ارزی است، یعنی در سه شرط بازتابی، تقارنی و تعدی صدق می‌کند. زمانی که اثبات را تحلیل می‌کنیم نیاز است که همه آنچه که مورد استفاده قرار گرفته است را مورد بررسی قرار دهیم. اگر درست نباشند، می‌توانیم فرض ضعیف‌تری داشته باشیم، برای مثال، $\sim$، بازتابی و متقارن است.

تحلیل (۱)

فرض کنید $x \in X$.

> تلاش برای نشان دادن اینکه دو مجموعه یکسان هستند، در سطح اعضا کار می‌شود.

چون $x \sim x$،

> از خاصیت بازتابی استفاده شده است! بنابراین یک قسمت از فرض مورد استفاده قرار گرفته است.

آنگاه $x \in [x]$،

> تعریف کلاس هم‌ارزی به کار گرفته شده است.

پس $x \in \bigcup_{x \in X} [x]$، بنابراین $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$

> به‌طور مؤثر در تلاشیم نشان دهیم که دو مجموعه A و B یکی هستند، پس مسئله به $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ تقسیم شده است؛ فصل ۲۰ را ببینید. تنها با کار کردن در سطح اعضا، اولی را نشان داده‌ایم. نیاز است که دومی را انجام دهیم.

عکس نتیجه روشن است و $\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$.

> از قرار معلوم قسمت دوم برای نویسنده روشن است! اما باید آن را در همان جا بررسی کنیم.

تحلیل (۲)

$[\Longrightarrow]$

> این یک ”اگر و تنها اگر“ است بنابراین به دو قسمت تقسیم می‌شود، اول ”فقط اگر“ می‌آید، که $x \sim y \Longrightarrow [x] = [y]$ است. فرض $x \sim y$ است؛ نیاز است جایی که از آن استفاده شده است را بررسی کنیم.

فرض کنید که $x \sim y$.

> به نظر می‌رسد که فرض مورد استفاده قرار گرفته است؛ اما اینطور نیست. نویسنده تنها در حال بیان این است که فرض، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

اگر $z \in [x]$، آنگاه $z \sim y$ و بنابراین با استفاده از خاصیت تعدی $z \sim y$،

تعریف کلاس هم‌ارزی به کار رفته است. اوه، اینجاست که از فرض $x \sim y$ استفاده می‌کنیم. همچنین شرط تعدی را به کار می‌بریم.

بنابراین $z \sim y$. این نشان می‌دهد $[x] \subseteq [y]$.

دوباره از تعریف کلاس هم‌ارزی استفاده شده است. اوه، دوباره شعبده‌بازی و به‌کارگیری "$A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، نتیجه می‌دهد $A = B$".

اما اگر $x \sim y$، آنگاه با خاصیت تقارن $y \sim x$، با استدلالی مشابه بالا می‌بینیم $[y] \subseteq [x]$ و بنابراین $[x] = [y]$.

شرط تقارن به کار رفته است، بنابراین از هر سه شرط رابطه هم‌ارزی استفاده شده است. نیاز است درستی آن بررسی شود. به نظر درست می‌رسد از فرض نتیجه گرفتیم که $x \sim y$.

(۲) $[\Longleftarrow]$
چون $x \sim x$، پس $x \in [x] = [y]$.

نیاز است که قسمت "اگر" یا (۲) را اثبات کنیم. دوباره از بازتابی بودن استفاده شده است. یک بار از دو فرض بهره بردیم. تعریف کلاس هم‌ارزی یعنی $x \in [x]$ به کار رفته و از فرض گزاره $\Longleftarrow$، یعنی $[x] = [y]$ استفاده شده است.

بنابراین $x \sim y$.

نتیجه‌ای که می‌خواهیم، با استفاده از $x \in [y] \Longrightarrow x \sim y$، به‌دست می‌آید.

تحلیل (۳)
$[\Longrightarrow]$

دوباره، (۳) یک "اگر و تنها اگر" است که به دو قسمت شکسته شده است.

فرض کنید $x \nsim y$ و برای رسیدن یک تناقض، $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ را در نظر بگیرید. $z \in X$ی وجود دارد که $z \in [x]$ و $z \in [y]$،

به‌کارگیری برهان خلف، پس فرض است که نتیجه قسمت "تنها اگر" نادرست است.
باتوجه‌به اینکه آن را برای یک تناقض فرض می‌کنیم لذا معقول است.

به‌عبارت‌دیگر $z \sim x$ و $z \sim y$. با استفاده از خاصیت تعدی $x \sim y$ و این یک تناقض است.

استفاده دوباره از یکی از فرض‌های ما $x \nsim y$ بود.

(۳) [$\Longleftarrow$] فرض کنید که $[x] \cap [y] = \emptyset$ و یک تناقض که $x \sim y$. چون $y \sim x$، پس $x \in [x]$ و $x \in [y]$.

بازهم اثبات به‌وسیله برهان خلف است! به‌کارگیری تعریف رابطه هم‌ارزی.

بنابراین $x \in [x] \cap [y]$. این یک تناقض است.

خُب ما فرض کرده بودیم اشتراک تهی باشد.

■

تحلیل ما از این اثبات نشان می‌دهد که از فرض رابطه هم‌ارزی بودن $\sim$ استفاده کرده‌ایم. پس این خوب است. این به این معنی نیست که اگر گزاره را ضعیف کنیم غلط خواهد بود. روش تفکر در فصل ۳۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت. نکته این است که برهان ما سه شرط را به کار برده است. چگونه می‌توانیم بدانیم کسی نیست که اثباتی با به‌کارگیری تنها یک یا دو تا از شرایط ارائه دهد؟
برای اثبات اینکه با حذف هر یک از این سه شرط رابطه هم‌ارزی مثال نقضی برای قضیه وجود خواهد داشت، چه چیزی لازم است؟

تمرین ۴.۳۱.

مثال نقض‌ها را بیابید!

قضیه این بود که اگر یک رابطه هم‌ارزی داشته باشیم، آنگاه روشی داریم برای تقسیم مجموعه به قطعه‌هایی که مجموعه به‌طور کامل با همه آن قطعه‌ها ساخته می‌شود و آن قطعه‌ها مجزا هستند. البته، می‌توان مانند ریاضی‌دانان فکر کرد و پرسید آیا عکس آن درست است؟
بنابراین می‌پرسیم " اگر روشی برای تقسیم یک مجموعه داشته باشیم، آیا می‌توان یک رابطه هم‌ارزی به‌دست آورد؟"

بله، می‌توانیم. اول باید منظور از تقسیم یک مجموعه را تعریف کنیم. ابتدا، دقت کنیم که برای گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌ها می‌توان نماد $X_1, X_2, X_3, \cdots$ را برای نشان دادن مجموعه‌ها به کار برد. با‌این‌حال، یک گردایه ممکن است با یک مجموعه ناشمارا اندیس‌گذاری شود. برای مثال در نظر می‌گیریم $X_a = [-a, a]$ که $a \in \mathbb{R}$.
این گردایه از مجموعه‌ها، ناشماراست؛ زیرا $\mathbb{R}$ ناشماراست. برای ادامه در هر دو حالت می‌توان گردایه را با قرار دادن مجموعه‌های X_λ که $\lambda \in I$ و I یک مجموعه است در نظر گرفت. برای مثال، I می تواند $\mathbb{N}$، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ و غیره باشد.

تعریف ۴.۳۱.

فرض کنید X یک مجموعه باشد. در نظر بگیرید که برای مجموعه‌ای مانند I، $\{X_\lambda\}_{\lambda \in I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌ها باشد، به‌طوری‌که

(۱) $\bigcup_{\lambda \in I} X_\lambda = X$،

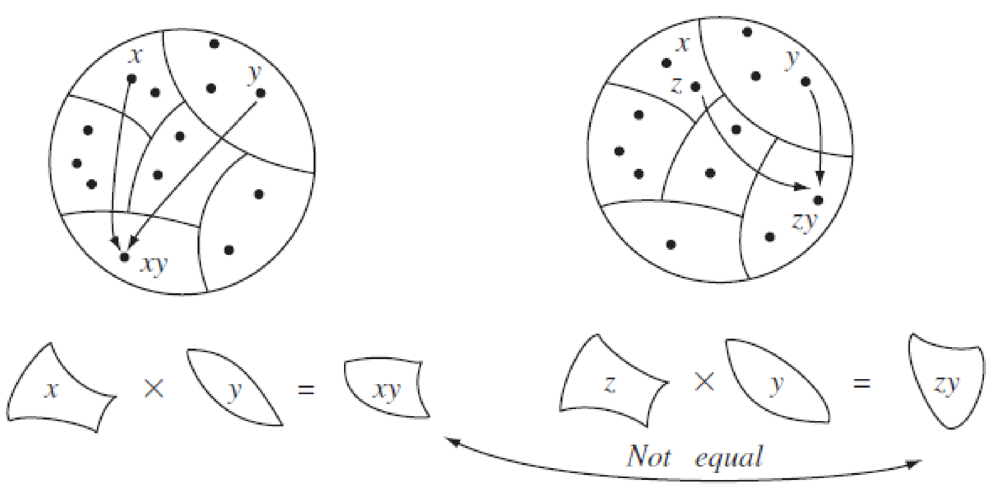
(۲) $X_\lambda = X_\mu$ *اگر و تنها اگر* $\lambda = \mu$،

(۳) $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ *اگر و تنها اگر* $\lambda \neq \mu$.

گردایه این مجموعه‌ها، یک **افراز** X *نام دارد.*

مثال ۶.۳۱.

مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی هر رابطه هم‌ارزی، یک افراز است. این نتیجه از قضیه ۱.۳۱ با گذاشتن $X_x = [x]$ و $I = X$ به‌دست می‌آید. حال عکس قضیه ۱.۳۱ را به‌دست می‌آوریم. یعنی با داشتن هر افراز، یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌کنیم.



(i) (ii)

شکل ۳.۳۱: ضرب کلاس‌ها

تمرین ۵.۳۱.

فرض کنید X با $\{X_\lambda\}_{\lambda\in I}$ افراز شده است. رابطه $\sim$ با "$x \sim y$ اگر $x \in X_\mu$ برای یک μ نتیجه دهد که $y \in X_\mu$" تعریف می‌شود؛ ثابت کنید $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است.

آنچه نشان داده‌ایم این است که قرار دادن یک رابطه هم‌ارزی بر یک مجموعه با ارائه یک افراز معادل است و بر عکس. این آن چیزیست که درمورد روابط هم‌ارزی می‌دانیم. مجموعه را به قطعاتی به نام ، کلاس‌های هم‌ارزی،تقسیم می‌کنیم و ریاضیات را با این کلاس‌ها انجام می‌دهیم.

اهمیت کلاس‌های هم‌ارزی این است که می‌توان مجموعه را افراز کرد و فقط بر کلاس‌های هم‌ارزی تمرکز کرد؛ در واقع اعضا را در یک بسته واحد دسته‌بندی می‌کنیم.

- **حساب پیمانه‌ای**

مثال ۳.۳۱ را دیدیم که "$x \sim y \iff x = y \pmod n$" یک رابطه هم‌ارزی است و در مثال ۵.۳۱ دیدیم که کلاس‌های هم‌ارزی $[۰]$، $[۱]$، $[۲]$، $\cdots$، $[n-۱]$ هستند. این مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی با $\mathbb{Z}_n$ نشان داده می‌شود. حال می‌توان حساب روی کلاس‌های هم‌ارزی را با روابط زیر تعریف کرد. فرض کنید

$$[x]+[y]=[x+y] \quad \text{و} \quad [x].[y]=[xy].$$

دقت کنید که این حساب بر روی کلاس‌های هم‌ارزی تعریف شده و بر اعداد صحیح تعریف نشده است. ضرب کلاس‌های هم‌ارزی $[x]$ و $[y]$ را با کلاس هم‌ارزی xy تعریف می‌کنیم. شکل ۳.۳۱(i) را ببینید.

مثال ۷.۳۱.

(۱) *در $\mathbb{Z}_۷$ داریم:*

$$[۳].[۵]=[۳\times ۵]=[۱۵]=[۱].$$

(۲) *در $\mathbb{Z}_۸$ داریم:*

$$[۶]+[۷]=[۶+۷]=[۱۳]=[۵].$$

حالا *عمیق‌تر فکر می‌کنیم!*

می‌خواهیم کلاس‌ها را ضرب کنیم اما در واقع تعریف وابسته به اعضای X است و نه کلاس‌ها! برای مثال، آنچه می‌خواهیم این است که اگر $[z]=[x]$، آنگاه

$[x].[y] = [z].[y]$. نمی‌خواهیم کلاس نتیجه، به عضو خاصی در کلاس وابسته باشد. برای مثال، زمانی که با پیمانه ۵ کار می‌کنیم نباید گرفتن [۱] یا [۶] متفاوت باشد. به‌ویژه ممکن است داشته باشیم $z \sim x$ اما $zy \nsim xy$، شکل ۳.۳۱(ii) را ببینید.

قضیه ۲.۳۱.

اگر $[u] = [x]$ و $[v] = [y]$ باشد، آنگاه

$$[u].[v] = [x].[y].$$

برهان. فرض کنید که $u \sim x$ و $v \sim y$. پس باید نشان دهیم که $xy \sim uv$.
طبق تعریف برای $k_1 \in \mathbb{Z}$ای داریم

$$x \sim u \Longleftrightarrow x = k_1 n + u,$$

و به‌طور مشابه برای $k_2 \in \mathbb{Z}$ای

$$y \sim v \Longleftrightarrow y = k_2 n + v.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} xy &= (k_1 n + u)(k_2 n + v) \\ &= k_1 k_2 n^2 + k_1 n v + u k_2 n + uv \\ &= (k_1 k_2 n + k_1 n + k_2 u) n + uv \end{aligned} \tag{۱.۳۱}$$

پس $xy \sim uv$. ■

به‌عبارت‌دیگر، تعریف ضرب وابسته نیست به اینکه کدام یک از اعضای کلاس‌ها به کار برده می‌شوند.

تعریف ۵.۳۱.

*عضوی که برای نمایش یک کلاس هم‌ارزی به کار می‌رود، **نماینده** کلاس نامیده می‌شود.*

تعریف ۶.۳۱.

*فرض کنید با استفاده از اعضای کلاس‌ها، عملگری بر کلاس‌ها تعریف شده است. اگر عملکر به نماینده‌ها وابسته نباشد، آن را **خوش‌تعریف** گوییم.*

مثال ۸.۳۱.

طبق قضیه قبل ضرب کلاس‌ها خوش‌تعریف است.

تمرین ۶.۳۱.

جمع کلاس‌ها را با $[x] + [y] = [x + y]$ تعریف کنید. نشان دهید این عملگر خوش‌تعریف است.

تمرین

۱. مشخص کنید کدام یک از رابطه‌های زیر بر X، بازتابی، متقارن یا متعدی هستند. بررسی کنید که آیا رابطه‌ها هم‌ارزی هستند یا نه؟ و اگر هستند کلاس‌های هم‌ارزی آن‌ها را مشخص کنید.

(آ) فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ و $x \sim y \iff x - y$ زوج باشد.

(ب) فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ و $x \sim y \iff x - y$ فرد باشد.

(ت) فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $x \sim y \iff xy = ۰$.

(ج) فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $x \sim y \iff xy \neq ۰$.

(د) فرض کنید $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $(x_۱, y_۱) \sim (x_۲, y_۲) \iff x_۱ = x_۲$.

(ذ) فرض کنید $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $(x_۱, y_۱) \sim (x_۲, y_۲) \iff x_۱ y_۱ = x_۲ y_۲$.

(و) فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.

(ه) فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ و $x \sim y \iff ۵|(x + ۳y)$.

(ی) فرض کنید $X = \mathbb{Z}$ و $x \sim y \iff Int(x) = Int(y)$، $Int(x)$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که $Int(x) \leq x$.

۲. مشخص کنید کدام یک از کلاس‌های زیر در (آ) $\mathbb{Z}_۶$ (ب) $\mathbb{Z}_۹$ معادلند:

$$[-۱۱۴], [-۳], [-۱], [۰], [۱], [۳], [۶], [۸], [۹], [۱۲], [۱۷], [۱۵], [۲۷], [۴۵].$$

۳. تابع $f : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ را برای $m \in \mathbb{N}$ با $f([x]) = [x + x^۲]$ تعریف کنید. نشان دهید این تابع خوش‌تعریف است.

۴. آیا توابع زیر خوش‌تعریف هستند؟

(آ) نگاشت $f : \mathbb{Z}_۸ \longrightarrow \mathbb{Z}_۶$ که $f([x]) = [۲x]$.

(ب) نگاشت $f : \mathbb{Z}_۳ \longrightarrow \mathbb{Z}_۹$ که $f([x]) = [x^۲]$.

(ج) نگاشت $f : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ با $f([x]) = [ax + b]$، که $a, b \in \mathbb{Z}_m$.

چکیده

- رابطه R روی مجموعه X، یک زیرمجموعه از $X \times X$ است. اگر $(x,y) \in R$، گوییم $x \in X$ با $y \in X$ رابطه دارد و می‌نویسیم $x \sim y$.
- رابطه هم‌ارزی رابطه‌ای است که
  (۱) بازتابی است، یعنی $x \sim x$،
  (۲) متقارن است، یعنی $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$،
  (۳) متعدی است، یعنی $x \sim y,\ \ y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.
- کلاس هم‌ارزی x، $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ است.
- هر رابطه هم‌ارزی بر یک مجموعه را به قطعاتی افراز می‌کند: کلاس‌های هم‌ارزی.
- می‌توان عملگرهایی بر کلاس‌ها با استفاده از نماینده‌ها تعریف کرد، اما خوش‌تعریف بودن عملگرها باید بررسی شود.

بخش ششم

نکته‌ها

فصل ۳۲

همه را کنار هم بگذار

در زندگی، چیزی غیر از مشاهدات نمی‌تواند ذهن را به کنکاش مداوم وادارد.

"مارکوس آئورلیوس آنتونیوس، تأملات [۱]"

در پنج قسمت قبلی این کتاب چیزهای زیادی وجود دارد که باید خوب درک شود و در هر قسمت روی روشی متفاوت از اندیشیدن (مانند یک ریاضی‌دان) تمرکز دارد. در کنار هم قراردادن و به‌کارگیری مؤثر همه آن‌ها، به‌طور نیازمند زمان و تمرین است. اگر چه روش‌های زیادی ارائه شد ولی بااین‌وجود اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان ساده نیست؛ هیچ مجموعه قوانینی برای پیگیری وجود ندارد. و قطعا، ریاضیات بیشتر از علم، یک هنر است.

بنابراین، در این فصل برخی از نکات جذاب فصل‌های قبل را انتخاب می‌کنیم تا ببینید که چگونه می‌توانیم روش‌ها را ادغام کنیم.

شروع کردن

بزرگترین مانع در هر نوع مسئله ریاضی، شروع کار است. مجموعه‌ای از تمرینات هفتگی را در اختیار دانشجوان قرار می‌دهم. زمانی که دانشجویی می‌گوید "من روی سوال X مانده‌ام" معمولا پاسخ این است "بسیار خُب، تاکنون چه کاری انجام داده‌اید؟ پاسخ اغلب آن‌ها این است" هیچ کاری، نمی‌توانم شروع کنم. حتی نمی‌دانم از کجا شروع کنم."

توصیه‌های موجود در اکثر کتاب‌های کمک مطالعاتی این است که روش مثال‌های حل‌شده قبلی را ادامه دهید. بااین‌حال، دانشجویان به چنین تذکری نیاز ندارند. احتمالا قبلا برای مسائل مشابه، به یادداشت‌های خود نگاه کرده‌اند. در حقیقت ممکن است دلیل توصیه به مطالعه این کتاب، همین مشکلات بوده باشد.

اغلب دانشجویانی که با ریاضیات پیشرفته شروع می‌کنند، به دنبال مثال یا قضیه‌ای هستند که بتوانند از آن، یک گزاره یا حکم ساده‌تر نتیجه بگیرند. متاسفانه، اندیشه ریاضی چنین نیست.

باتوجه‌به این نکته، بیایید به برخی از "روش‌های شروع به کار" نگاه کنیم. (ابهامات بدیهی، مانند ندانستن معانی همه کلمات موجود در سوال را نادیده می‌گیریم!)

[۱] مارکوس آئورلیوس آنتونیوس ($Marcus\ Aurelius\ Antoninus$) از امپراتوران بزرگ روم است. او یکی از «پنج امپراتور خوب» و یک فیلسوف رواقی است. وی در ۲۶ آوریل سال ۱۲۱ میلادی زاده شد و در ۱۷ مارس ۱۸۰ میلادی درگذشت. مارکوس آئورلیوس نقش برجسته‌ای در آخرین دوره جنگ‌های رم علیه پارتها داشت. او کتاب تاملات (Meditations) را در میان سال‌های ۱۷۰ تا ۱۸۰ در حالی که روم در حال جنگ بود، تألیف کرد.

- **با مثال‌ها بازی کنید.**

به‌ندرت می‌توانید در مورد یک مسئله خاص چیزی را بیان کنید، ممکن است بتوانید مثال یا استنتاجی در ارتباط با آن ارائه دهید. بنابراین اولین روش برای شروع به کار کردن، بازی با مثال‌ها است. این مثال‌ها اغلب نور امیدی ایجاد می‌کنند. به‌عبارتی بازی کردن با برخی از مثال‌ها، منجر به درک بیشتر از مسئله می‌شود. مطمئن نیستم که چرا؟ شاید مجبورمان می‌کند که بدون اینکه مسئله را حل کنیم با آن درگیر شویم.

قضیه ۲.۲۰ را در نظر بگیرید: " فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی باشند. لذا $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$." اثبات این قضیه پیش‌تر مطرح شده، اما فرض می‌کنیم چنین نبوده است. بازی با برخی از مثال‌ها نشان می‌دهد که چرا تساوی برقرار است؛ سپس به سرعت، روش اثبات آشکار می‌شود.

اگر یک گزاره شامل مجموعه‌های نامتناهی باشد، ببینید برای مثال‌های خاصی از آن مانند $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ انجام این نوع تمرین‌ها، بخش ریاضی مغز شما را درگیر حل مسئله می‌کند.

- **آن را بشکنید؛ با قطعه‌های کوچک شروع کنید.**

یکی دیگر از دلایل اینکه برخی از دانشجویان به سختی شروع به کار می‌کنند این است که: با رویکرد " لقمه بزرگ" پیش می‌روند. انتظار آن‌ها بر این است که تنها یک الگوریتم / محاسبه / فرمول / قضیه‌ای وجود داشته باشد که به سوال پاسخ دهد. نمی‌دانند که باید قطعه‌ای کوچک برگزینند و به استفاده از مجموعه‌ای از الگوریتم‌ها، محاسبات، فرمول‌ها و قضیه‌ها نیاز دارند.

فرض ما یک اصل پیشرو است که باید مسئله را به مسائل کوچکتر تبدیل کند. به‌عنوان‌مثال، برای مسئله "ثابت کنید $A \iff B$ " نباید در جستجوی قضیه‌ای باشید که این را نتیجه دهد یا نباید به امید رسیدن به B سعی کنید فهرستی به‌شکل $A \iff C$، $C \iff D$ و ... ایجاد کنید. به‌جای آن ثابت کنید $A \implies B$ و سپس $B \implies A$. این روش را بارها دیده‌ایم. اثبات قضیه‌ی ۱.۲۹ و قضیه‌ی ۱.۳۱ (۳) مثال‌هایی از این نوع هستند.

برای نشان دادن تساوی دو مجموعه A و B ($A = B$) به همین شکل عمل می‌کنیم. در اینجا امیدواریم زنجیره‌ای از تساوی‌ها وجود داشته باشد که

$$A = C = D = \cdots = Z = B$$

و بتواند اتفاق افتد؛ مثال ۱.۲۰ را ببینید.

روش شکستن مسئله این است که نشان دهیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. این را می‌توانید در اثبات قسمت‌های (۱) و (۲) قضیه ۱.۳۱ مشاهده کنید. چگونه می‌توانیم نشان دهیم $A \subseteq B$؟ تا سطح عناصر مجموعه، پایین می‌رویم. عنصر $x \in A$ را انتخاب کنید و نشان دهید $x \in B$. برای مثال قضیه ۷.۲۰ را ببینید.

مسئله‌ای که به این شکل شکسته می‌شود با اینکه در ظاهر به دو مسئله تبدیل شده است ولی راحت‌تر حل می‌شود! یک برتری این روش آن است که وقتی یک قسمت را اثبات می‌کنید احساس موفقیت می‌کنید، به‌طوری‌که اگر از شما سوال شود که تاکنون چه کاری انجام داده‌اید؟ می‌توانید بگویید "در حقیقت، می‌توانم $A \implies B$ را نشان بدهم، طرف دیگر هم دور از دسترس نیست."

- **مسئله را تغییر دهید.**

سومین روش برای شروع کردن این است که آن را تغییر دهید. آنچه انجام می‌دهیم تعمیم و تخصیص است. این دو روش آنچنان اهمیت دارند که یک فصل را به خود اختصاص داده‌اند (فصل ۳۳). تعمیم لم تقسیم در صفحه ۲۶۳ یک نمونه خوب از تغییر مسئله است. فرض این بود که y یک عدد صحیح غیر صفر باشد. بااین‌وجود، بخش عمده‌ای از برهان، اثباتی از یک گزاره متفاوت است، که در آن y یک عدد صحیح مثبت است. هنگامی که بخشی از اثبات، استدلالی جداگانه و کوتاه‌تر در ارتباط با y منفی است. این روش را می‌توان برای چندین مرتبه، مورد استفاده قرار داد. اگر گزاره در مورد اعداد صحیح است امکان دارد استفاده از اعداد طبیعی ساده‌تر باشد.

به‌طورکلی، می‌توانیم مسئله را به گروهی کوچک‌تر از اشیا محدود کنیم و آن‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. نکته در این است که با تغییر دادن سوال، حداقل می‌توان کاری را انجام داد.

رفتن به سطح بالاتر

اما چگونه می‌توان از پاسخ به پرسش‌ها فراتر رفت و واقعا مانند یک ریاضی‌دان اندیشید؟ بیایید برخی از روش‌ها را ببینیم.

- **پرسش را عکوس کنید، مثال‌های خود را بسازید.**

یک ریاضی‌دان واقعی مثال‌های خود را می‌سازد.

در اینجا، نه تنها یافتن مثال‌هایی از تعریف‌ها و قضیه‌ها که در فصل‌های قبلی پیشنهاد شد، معنی پیدا می‌کنند، بلکه سودمند نیز هستند. برای اینکه منظورم را روشن‌تر بیان کنم مثالی از حسابان ارائه می‌کنم. تمرینی اساسی در حسابان، پیدا کردن مقادیر اکسترمم توابع است. تابعی داده می‌شود که باید نقاط بحرانی آن را بیابید.

روش ساخت این مثال‌ها چنین است: پرسش را عکوس کنید. فرض کنید بیشینه و کمینه در نقاط خاصی داده شده باشند. آیا می‌توانید تابعی بسازید که چنین بیشینه و کمینه‌ای داشته باشد؟

با انجام دادن این کار، مطالب زیادی در مورد بیشینه و کمینه می‌آموزید. بدیهی است که می‌توانید تنها یک تابع را حدس بزنید و با آن کار کنید؛ اما با ساخت مثالی با محدودیت‌هایی از پیش تعریف شده، به درک بیشتری خواهید رسید، به‌عنوان‌مثال تابعی بسازید که در $x = ۲$ دارای بیشینه $f(۲) = ۵$ و در نقاط $x = -۲$ و $x = ۷$ دارای کمینه $f(۷) = -۳$ و $f(-۲) = ۲۰$ باشد.

به‌عنوان‌مثالی دیگر از روش معکوس کردن پرسش، مبحث مخروط‌ها از هندسه مقدماتی را در نظر بگیرید. سوال رایج این است: " مخروطی مفروض است، مرکز، رأس، و خروج از مرکز آن را محاسبه کنید." و غیره. این سوال را برعکس کنید. مرکز، رأس، و خروج از مرکز مخروطی مفروض است، آن را بیابید.

- **سوال کنید که چه رخ خواهد داد اگر ...؟**

ریاضی‌دانان خوب دوست دارند سوال کنند که " چه رخ خواهد داد اگر ...؟" به‌عنوان‌مثال، چه رخ خواهد داد اگر آن فرض را حذف کنیم؟ دیدیم که ممکن است این کار به حل مسائل کمک کند. همچنین اجازه خواهد داد که محدودیت‌های موضوع را کشف کنیم . در نهایت می‌توانیم بدانیم که چرا تعریف‌ها و قضیه‌ها به این شکل بیان شده‌اند.

به‌عنوان‌مثالی دیگر، اغلب مجموعه‌ها، در ریاضی شیئی با شرایط اضافه هستند. در سطحی بسیار ساده می‌توان گفت که یک مجموعه متناهی، مجموعه‌ای با تعداد محدودی از عناصر است اما مثال‌های بسیار پیچیده‌ای مانند گروه‌ها نیز وجود دارد. (یک گروه، مجموعه‌ای با نوعی از ضرب عناصر مجموعه است که ضرب باید خواص خاصی را تامین کند.)

حال برای مجموعه‌های A و B، حاصلضرب آن‌ها را با $A \times B$ نشان می‌دهیم. می‌توانیم بپرسیم که اگر A و B دارای ویژگی خاصی باشند، آیا $A \times B$ نیز چنین خاصیتی دارد؟ به‌عنوان‌مثال فرض کنید که A و B مجموعه‌های متناهی باشند. آیا $A \times B$ نیز متناهی است؟ در این حالت، بله چنین است. اگر A و B نامتناهی باشند، آیا $A \times B$ نامتناهی است؟ اگر A و B گروه باشند، آیا $A \times B$ نیز گروه است؟ و غیره.

انتظار بر این است که همواره با طرح سوالات، مفاهیم جدید ایجاد کنیم.

- **اهمیت تامل، شبکه را ببینید.**

اگرچه چنین به‌نظر می‌رسد که موضوع خطی است و هر ایده‌ای از روی دیگری ساخته می‌شود؛ اما ریاضیات شامل یک شبکه از ارتباطات داخلی بین ایده‌ها و موضوعات نیز هست. تأملِ پس از آموختن یک موضوع، باید شامل اندیشیدن درباره چگونگی انجام کاری تازه و متناسب در این شبکه باشد. فقط موضوع را به پایان نرسانید و بگویید «اکنون این کار را انجام داده‌ام.»

ساختار کلی کار را می‌توان تجزیه و تحلیل کرد و پرسید که آیا ممکن است بتوان آن را به روشی دیگر بیان نمود. این فرایند دیدگاهی متفاوت ارائه می‌کند و تمرین مفیدی برای کمک به درک موضوع است. برای مشاهده دیدگاه‌های متنوع، به کتاب‌های مختلف نگاه کنید. آیا قضیه‌ها و تعریف‌ها متفاوت هستند؟ آیا دقت اثبات‌ها بیشتر است یا کمتر؟

تمرین

۱. فرض کنید F_n، nامین عدد فیبوناچی باشد. دوستم می‌گوید که

$$F_۱ + F_۲ + F_۳ + \cdots + F_n = F_{n+۲},$$

اما به یاد ندارد که آیا واقعا درست است.
آیا درست می‌گوید؟ اگر نه، آیا می‌توانید با ساختن گزاره‌های مشابه به او کمک کنید؟ در هر صورت، هر گزاره‌ای را که تصور می‌کنید درست است؛ اثبات کنید.

۲. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و $d_۰$، $d_۱$، ...، $d_{k-۱}$ و d_k ارقام آن باشند. به‌علاوه فرض کنید تابع f با ضابطه $f(n) = d_k^۳ + d_{k-۱}^۳ + \cdots + d_۰^۳$ تعریف شده باشد، یعنی عدد صحیح مثبت n را روی مجموع مکعب‌های ارقام آن می‌نگارد. عدد اولیه n داده شده است با اعمال پی‌درپی نگاشت f روی آن، دنباله‌ی a_m از اعداد صحیح حاصل می‌شود.

گوییم عدد صحیح n، **پایان‌یافته** است، اگر $m_۰$ی موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $m \geq m_۰$ داشته باشیم $a_m = a_{m_۰}$. به‌عنوان‌مثال، اگر $n = ۱۹$، آنگاه

$$a_۱ = ۱۹, a_۲ = ۱^۳ + ۹^۳ = ۷۳۰, a_۳ = ۷^۳ + ۳^۳ = ۳۷۰, a_۴ = ۳^۳ + ۷^۳ = ۳۷۰ \cdots .$$

بنابراین $n = ۱۹$ یک عدد صحیح پایان‌یافته است. مجموعه اعداد صحیح پایان‌یافته را با $\mathcal{D}$ نمایش می‌دهیم.

هر **نقطه ثابت** از تابع f (یعنی nهایی که $f(n) = n$) یک عدد صحیح پایان‌یافته است. همه نقاط ثابت f را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم.

(آ) مجموعه‌های $\mathcal{D}$ و $\mathcal{F}$ را بررسی کنید.
(ب) آیا همه اعداد صحیح مثبت پایان‌یافته هستند؟
(ج) اگر چنین نیست، آیا می‌توانید درباره دنباله‌های تولید شده توسط بی‌پایان‌ها چیزی بگویید؟
(د) آیا $\mathcal{D}$ کراندار است؟ مجموعه $\mathcal{F}$ چطور؟
(و) آیا می‌توانید $\mathcal{F}$ را به‌طور کامل تعیین کنید؟ این تمرین و یکی از موارد زیر از درسی در دانشگاه لیدز گرفته شده است.

دانشجویی در خارج از کشور چند هدیه می‌خرد و قصد دارد آن‌ها را به خانه بفرستد. کالا ها قبلا در بسته‌های جداگانه بسته‌بندی شده‌اند. به‌طور معجزه‌آسا، عدد صحیح nی وجود دارد به‌طوری‌که برای هر مجموعه از اعداد صحیح (a, b, c) که $۱ \leq a \leq b \leq c \leq n$، دقیقا یک بسته به عمق a عرض b و طول c موجود است.

ارسال بسته‌های پیچیده شده در بسته‌های بزرگتر، ارزانتر، (و از نظر ریاضی جذاب‌تر) است. برای جلوگیری از شکستگی، فضای بین قطعه‌ها نباید خالی باشد. به‌عبارت‌دیگر، یک بسته بزرگ با اندازه $p \times q \times r$ حجمی برابر pqr دارد که با مجموع حجم بسته‌های موجود در آن برابر است. فرض کنید، بزرگی بسته‌های جدید اهمیتی نداشته باشد. دانشجو به چند بسته نیاز دارد؟

۴. آیا می‌توانید یک روش ریاضی برای محاسبه روز خاصی از هفته که تاریخ آن داده شده است بسازید؟ به‌عنوان‌مثال، برای ۲۰ اردیبهشت ۱۳۶۴ و برای ۸ بهمن ۱۳۷۸. پاسخ هر دو روز جمعه است. راهنمایی: به پیمانه فکر کنید.

چکیده

◄ برای شروع:
(۱) با مثال‌ها بازی کنید.
(۲) مسئله را بشکنید، با قطعه‌های کوچک شروع کنید.

(۳) *مسئله را تغییر دهید.*

◄ *برای رسیدن به سطحی پیشرفته‌تر:*

(۱) *پرسش را برعکوس کنید، مثال‌های خود را بسازید.*

(۲) *بپرسید چه اتفاقی رخ می‌دهد اگر...؟*

(۳) *تأمل کنید و ارتباط ایده‌ها را ببینید.*

فصل ۳۳

تعمیم و تخصیص

همه تعمیم‌ها گمراه‌کننده‌اند.

"آنون"

تا اندازه‌ای در سراسر کتاب مشغول تعمیم و تخصیص بوده‌ایم. قبل درک کامل ایده‌ها و تا زمانی که نیاز به دیدن مثال‌های قبلی نباشد، بحث در مورد جزئیات را به تأخیر می‌اندازیم.

تعمیم

•تضعیف مفروضات

باتوجه‌به قضیه داده شده سوالی که باید بپرسید این است که " آیا می‌توان فرض را تضعیف کرد و همچنان نتیجه قبلی را به‌دست آورد؟" هدف ریاضیات این است که درصورت امکان با استفاده از چندین فرض یک نتیجه قوی به‌دست آورد. به این معنی که، از کمترین حد ممکن تا بیشترین حد ممکن استفاده کنید.

گزاره‌ای که با تضعیف مفروضات به‌دست می‌آید را **تعمیم** *می‌نامیم.*

قضیه ساده زیر را در مورد اعداد زوج در نظر بگیرید:
"**اگر x و y اعداد طبیعی زوج باشند، آنگاه عدد $x+y$ زوج است.**"
می‌توانیم فرض این گزاره را تضعیف کنیم تا گزاره زیر حاصل شود.
"**اگر x و y اعداد صحیح زوج باشند، آنگاه عدد $x+y$ زوج است.**"
این گزاره درست است.

می‌توانیم فرض را در مسیر دیگری تضعیف کنیم. الزام زوج بودن اعداد را حذف کنیم.
"**اگر x و y اعداد طبیعی باشند، آنگاه عدد $x+y$ زوج است.**"
به‌هرحال، این گزاره نادرست است. به‌عنوان‌مثال، قرار دهید: $x = ۳$ و $y = ۴$. بنابراین تضعیف (یا در این حالت حذف) فرض یک قضیه، ممکن است گزاره را به گزاره نادرستی تبدیل کند.

قبلا مثالی دیدیم که در آن تضعیف یک فرض می‌تواند گزاره را به قضیه جدیدی تبدیل کند. لم تقسیم (صفحه ۲۶۰) در ابتدا برای یک عدد طبیعی y بیان شده بود و سپس با تضعیف این فرض به یک عدد صحیح، تعمیم لم را به‌دست آوردیم (صفحه ۲۶۳).

بنابراین، اگر قضیه دارای این فرض است که x یک عدد طبیعی است، سپس آن را به x که یک عدد صحیح است تعمیم دهید. در حقیقت اثبات پیچیده نیست. ابتدا گزاره را برای اعداد طبیعی اثبات و سپس از روش خوبی که

در تعمیم لم تقسیم به کار بردیم استفاده می‌کنیم: برای x منفی قرار می‌دهیم $x' = -x$. از آنجا که x' مثبت است گزاره برای x' درست است. با استفاده از آنچه می‌دانیم، گزاره را برای x اثبات می‌کنیم. (و باید به یاد داشته باشیم که حالت $x = 0$ را انجام دهیم!).

•تغییر نتیجه

اگر با تضعیف فرض‌های گزاره P، گزاره نادرستی حاصل شود، آنگاه ممکن است بتوانیم با تغییر نتیجه، گزاره درست Q را به‌دست آوریم. اگر بتوان گزاره Q را از این گزاره P به‌دست آورد، آنگاه Q را نیز یک تعمیم می‌نامیم.

قضیه فیثاغورس را دیدیم: فرض کنید T مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع a، b و وتر c باشد. بنابراین $c^2 = a^2 + b^2$.

با حذف شرط قائم‌الزاویه بودن می‌توان فرض را تضعیف کرد. با انجام این کار نمی‌توان وتر را تعریف کرد و لذا گزاره زیر تولید می‌شود:
فرض کنید T مثلثی با اضلاع a، b و c باشد. آنگاه $c^2 = a^2 + b^2$.

این گزاره نادرست است و تقریبا هر مثال تصادفی نادرستی آن را نشان می‌دهد. بنابراین اگر نتیجه را تغییر دهیم می‌توانیم گزاره درستی به‌دست آوریم، قانون کسینوس‌ها:
فرض کنید T مثلثی با اضلاعی به طول a، b و c باشد. پس $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ که C زاویه روبه‌رو به ضلعی به طول c است.

توجه داشته باشید که می‌توانیم قضیه فیثاغورس را از قانون کسینوس‌ها نتیجه بگیریم. در فرض قرار می‌دهیم $C = 90^\circ$ و نتیجه، حالت خاصی از قانون کسینوس‌ها است. یعنی $\cos 90^\circ = 0$، در نتیجه $c^2 = a^2 + b^2$.

بنابراین قانون کسینوس‌ها تعمیمی از قضیه فیثاغورس است. توجه داشته باشید که فرضیات قانون کسینوس‌ها به تمام مثلث‌ها اشاره دارد، درحالی‌که مفروضات قضیه فیثاغورس به مثلث قائم الزاویه اشاره دارد.

•جذابیت تعمیم‌های غلط

تلاش برای تعمیم می‌تواند به ریاضیاتی جذاب منتهی شود. می‌دانیم که معادله $x^2 + y^2 = z^2$ تعداد زیادی پاسخ صحیح دارد. اما اگر به‌جای "۲" سایر اعداد طبیعی "n" را قرار دهیم چطور؟

به این گزاره می‌رسیم که معادله $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq 2$ دارای جواب صحیح است. این ادعا نادرست است. در حقیقت، نه تنها برای برخی از $n \geq 3$، معادله $x^n + y^n = z^n$ هیچ جواب صحیح مثبتی ندارد، بلکه برای همه $n \geq 3$، هیچ جواب صحیح مثبتی وجود ندارد. گزاره دوم، آخرین قضیه فرما است که در صفحه ۱۳۰ دیدیم. تلاش برای اثبات این گزاره ۳۵۰ سال به طول انجامید و به پیشرفت‌های زیادی در ریاضیات از طریق نظریه اعداد، هندسه جبری و غیره منتهی شد.

تخصیص

خصوصی‌سازی عکس تعمیم است. پیش فرض‌ها را قوی‌تر می‌کنیم. به‌عنوان‌مثال، اگر گزاره‌ای درباره اعداد صحیح داشته باشیم می‌توانیم آن را به اعداد طبیعی محدود کنیم. به‌طور مشابه، قضیه فیثاغورس حالت خاصی از قانون کسینوس‌ها است.

با تخصیص می‌توانیم گزاره‌ها را از نادرستی نجات دهیم. گزاره "اگر $a < b$، آنگاه $a^2 < b^2$" نادرست است. (برای مثال، $a = -5$ و $b = 2$ قرار دهید.) با اضافه کردن شروط $a > 0$ و $b > 0$ می‌توانیم مفروضات را قوی‌تر کنیم. بنابراین آن را به‌شکل خاص "فرض کنید $a, b > 0$؛ اگر $a < b$، آنگاه $a^2 < b^2$." تبدیل می‌کنیم. این گزاره درست است.

کاربرد اصلی تخصیص، در حل مسئله‌هاست. می‌توان مسئله را در حالت خاص به راحتی حل کرد و با استفاده از آن به بینشی درمورد حالت کلی رسید. به‌عنوان‌مثال، برای اثبات تعمیم لم تقسیم ابتدا آن را به اعداد طبیعی محدود

کردیم و سپس اثبات آن را به اعداد صحیح تعمیم دادیم.

بدون از دست دادن کلیت

در بعضی از اثبات‌ها از عبارت "بدون از دست دادن کلیت" استفاده کردیم. گاهی در برخی از متون آن را به اختصار رمزنگاری می‌کنند.

از این عبارت زمانی استفاده می‌شود که فرضی را لحاظ می‌کنیم به‌طوری‌که حالتی خاص از گزاره جدید را شامل شود ولی در واقع چنین نیست بلکه به همان شکل کلی باقی می‌ماند. به‌عنوان‌مثال، اگر یک گزاره داشته باشیم که به صورت "برای هر دو عدد صحیح مجزای x و y داریم ... شروع شود، آنگاه بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم $x < y$. اگر این‌طور نبود، پس $y < x$، و می‌توانیم از آن استفاده کنیم.

تمرین

۱. *بهترین فرض ممکن در مورد n به‌طوری‌که $\sqrt{n}$ عددی گنگ باشد چیست؟ یعنی، گزاره "$\sqrt{n}$ عددی گنگ است اگر و فقط اگر n به‌شکل ... باشد." را کامل کنید. دلیل پاسخ خود را بیان کنید.*

۲. *قسمت (آ) تمرین ۳.۵ یعنی $\sqrt[۷]{۷!} < \sqrt[۸]{۸!}$ را در نظر بگیرید. تا چه حد می‌توانید این را تعمیم دهید؟ قسمت (ب) این تمرین را نیز تعمیم دهید.*

۳. *در یک جدول ۳×۳ اعداد ۱ تا ۹ طوری چیده می‌شود که مجموع عناصر هر سطر، مجموع عناصر هر ستون و مجموع عناصر یکی از قطرها ثابت باشد. از هر عدد یک‌بار می‌توانید استفاده کنید. چنین مربعی را* **مربع شگفت‌انگیز** *می‌نامند. به‌عنوان‌مثال مربع زیر را در نظر بگیرید.*

جدول ۱.۳۳

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

مجموع عناصر هر سطر، هر ستون و هر دو قطر برابر ۱۵ است. آیا می‌توانید مثال‌های دیگری از مربع‌های شگفت‌انگیز بیابید؟
آیا می‌توانید یک مربع شگفت‌انگیز ۴×۴ از اعدا ۱ تا ۱۶ بیابید؟ مربع شگفت‌انگیز $n \times n$ با استفاده از اعداد ۱ تا $n^۲$ چطور؟
اگر در حالت ۳×۳ به‌جای استفاده از اعداد ۱ تا ۹ از هر عدد صحیحی استفاده کنیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟
آیا در مورد حالت ۳×۳، مجموع سطرها و غیره که ثابت است می‌تواند هر عدد صحیحی باشد؟ در حالت $n \times n$ چطور؟

۴. *یک شبکه ۴×۴ از ۱۶ مربع را در نظر بگیرید. نشان دهید که می‌توانید شش صلیب را در این شبکه قرار دهید به‌طوری‌که در هر سطر و ستون، تعداد صلیب‌ها زوج باشد.*
این مسئله گاهی به‌عنوان مسئله صندوق شیر شناخته می‌شود؛ و مسئله اصلی برحسب قراردادن بطری‌های شیر در جعبه بیان می‌شود.
آیا می‌توانید این مسئله را به یک شبکه $n \times n$ برای $n \geq ۳$ تعمیم دهید؟

۵. *آخرین رقم عدد $۳^{۱۲۲}۵^{۶۰۰}۱۱۲^{۴۵۰}$ را بیابید. درباره رقم یکی مانده به آخر چطور؟ تا چه حد می‌توانید این نتیجه را در مورد آخرین رقم حاصلضرب سه عدد تعمیم دهید؟*

۶. *چندجمله‌ای $ax^۲ + bx + c = ۰$ که $a, b, c \in Q$ در تمرین ۷.۲۶ قسمت ۵ به چندجمله‌ای با درجه بالاتر تعمیم دهید. آیا می‌توانیم ثابت کنیم که یک جواب گویا است اگر و فقط اگر جواب دیگر گویا باشد؟*

۷. *اداره پست به منظور منطقی کردن عملیات چاپ تمبر خود تصمیم گرفته است تمبر پستی را فقط در دو نوع، a تومانی و b تومانی چاپ کند، که a و b اعداد صحیح مثبت هستند. ضعف این پیشنهاد این است که (مگر اینکه a یا b عدد ۱ باشند)، تولید تمبرها به هر قیمتی امکان‌پذیر نیست. به‌عنوان‌مثال، اگر $a = ۵$ و $b = ۸$، اداره پست می تواند تمبر ۱۳ تومانی یا ۱۶ تومانی را ارائه کند اما نمی‌تواند تمبر ۱۷ تومانی بفروشد. باتوجه‌به انتخاب خاص a و b، به یک عدد عنوان "خوب" می‌دهیم اگر بتوان تمبرهای پستی به قیمت آن عدد فروخت و در غیر این صورت، به آن عنوان "بد" می‌دهیم. در مثال بالا، ۱۳ و ۱۶ خوب هستند، در حالی که ۱۷ بد است.*

آ *تا آنجا که ممکن است بررسی کنید که چگونه مجموعه اعداد بد به انتخاب a و b وابسته است.*

ب *با انتخاب گزینه‌های خاصی از a و b که خیلی بزرگ نباشند آزمایش را شروع کنید، به‌عنوان‌مثال با $a = ۵$ و $b = ۸$ شروع کنید. آیا هیچ الگویی می‌بینید؟*

پ خوب است که در هنگام آزمایش، هدفمند باشید. سعی کنید مقدار a را ثابت فرض کنید. مثلا $a = ۵$، به نوبت مقادیر $b = ۲,۳,\dots,۱۰$ را بررسی کنید. فرض کنید $a = ۵$، آیا می‌توانید چیزی در مورد اعداد بد برای یک b دلخواه بیان کنید؟ در مورد $a = ۶$ و b دلخواه چطور؟

ت برای حالت a و b دلخواه چه چیزی می‌توانید اثبات کنید؟

ث آیا می‌توانید درباره تعریف دقیق ریاضی عدد "خوب" بیندیشید؟ اگر چنین است، آیا می‌توانید به تفسیر هندسی از این تعریف بیندیشید؟

این مسئله از یک واحد درسی در دانشگاه لیدز انتخاب شده است.

چکیده

- *اگر فرض‌ها را تضعیف کنیم؛ برای مثال، فرض‌هایی را حذف کنیم، آنگاه تعمیم داده‌ایم.*
- *اگر مفروضات را تقویت کنیم، آنگاه تخصیص داده‌ایم.*
- *بدون از دست‌دادن کلیت، به این معنی است که چیزی مشابه خصوصی‌سازی انجام شود، اما در همان سطح اول باقی بماند.*

فصل ۳۴

درک درست

در ریاضیات اشیا را درک نمی‌کنید، بلکه فقط از آن‌ها استفاده می‌کنید.

”جان فون نویمان“

چگونه متوجه می‌شوید که مفهومی را در ریاضیات، به‌طور واقعی درک کرده‌اید؟ پاسخ دادن به این سوال خیلی سخت است. اغلب اوقات فرد، دانستن را احساس می‌کند؛ بااین‌وجود نقاط ضعف در زمان تلاش برای حل تمرین‌ها و مسئله‌ها آشکار می‌شود. در این فصل روش‌های تشریح درک یک مفهوم را فهرست خواهیم کرد.

- **درک تعاریف**

یک تعریف را درک کرده‌اید، اگر

- *بتوانید دقیقا آن را بیان کنید،*
- *بتوانید آن را با کلمات خودتان بیان کنید،*
- *بتوانید مثال‌های واقعی از آن ارائه دهید، به‌ویژه مثال‌های بدیهی و غیربدیهی،*
- *بتوانید نامثال‌هایی از تعریف ارائه دهید،*
- *بتوانید آن را در موقعیت‌های مختلف و ناآشنا تشخیص دهید،*
- *قضیه‌هایی که در آن‌ها از تعریف استفاده می‌شود را بشناسید،*
- *بدانید چرا در آن قضیه‌ها از این تعریف استفاده می‌شود،*
- *بدانید که چرا این تعریف خاص ساخته شده است،*
- *سایر تعریف‌های مشابهی که با چنین کلماتی ساخته شده است را بشناسید و تفاوت‌های بین آن‌ها را بدانید.*

آخرین مورد فهرست بالا اهمیت بالایی دارد، زیرا ریاضی‌دانان از تعریف‌های متفاوتی استفاده می‌کنند و این تفاوت‌ها، پیامدهای مهمی برای قضیه‌ها دارد. با اضافه کردن یک فرض اضافی به یک تعریف، اثبات بسیاری از قضیه‌ها ساده‌تر می‌شود.

درک قضیه‌ها

یک قضیه رادرک کرده‌اید، اگر

- *بتوانید دقیقا آن را با کلمات خودتان بیان کنید،*

- *بتوانید مثال‌های واقعی که در آن‌ها از آن استفاده می‌شود را ارائه دهید،*
- *اثبات آن را درک کنید،*
- *بتوانید آن را در موقعیت‌های جدید و ناشناخته به کار بگیرید،*
- *بتوانید برای گزاره‌هایی که با تضعیف مفروضات حاصل می‌شود، مثال نقض ارائه دهید،*
- *عکس و نقیض آن را بشناسید،*
- *بتوانید برخی از پیامدهای حاصل از آن را ببینید (به‌عنوان‌مثال نتایج)،*
- *بتوانید آن را در یک جمله خلاصه کنید، مثلا این قضیه روشی برای محاسبه فاصله در اختیار قرار می‌دهد،*
- *ببینید که در کجای نظریه‌ای مطابقت دارد، آیا خود آن، پایان یک مبحث است یا اینکه در مسیری برای رسیدن به قضیه‌ای بزرگتر از آن استفاده شده است،*
- *بدانید که آیا به یک دسته کوچک یا بزرگ از اشیا اشاره می‌کند.*

درک اثبات‌ها

یک اثبات را درک کرده‌اید، اگر

- *بتوانید دقیقا آن را با کلمات خودتان بیان کنید،*
- *بدانید در کجا از مفروضات استفاده شده است،*
- *ساختار آن را بشناسید، یعنی چگونه به بخش‌های کوچکتر تقسیم شده است و از چه روش‌هایی (مستقیم، تناقض، و غیره) استفاده شده است،*
- *بتوانید هر مرحله را ساده ببینید نه اینکه آن را یک معجزه بپندارید،*
- *بتوانید از ایده‌های موجود در اثبات‌ها برای اثبات سایر گزاره‌ها استفاده کنید،*
- *بتوانید هر شکافی را پر کنید،*
- *بدانید که اثبات چقدر دقیق است،*
- *بتوانید آن را خلاصه کنید، به‌عنوان‌مثال جزئیات را رها کنید اما نکات کلیدی را نگه دارید،*
- *بدانید که با حذف برخی از فرض‌ها چه مشکلاتی رخ می‌دهد.*

درک موضوع اصلی

معمولا ریاضیات به موضوعات مختلف دسته‌بندی می‌شود، به‌عنوان‌مثال، حساب، معادلات دیفرانسیل، ترکیبیات و غیره.
یک موضوع را درک کرده‌اید، اگر

- *بتوانید تطبیق همه آن‌ها با هم را تشخیص دهید،*
- *با اندکی تغییر در تعریف‌ها بتوانید نظریه متفاوتی ارائه دهید،*
- *بتوانید آن را در یک جمله خلاصه کنید،*

- *بتوانید مثال خاصی ارائه دهید که بسیاری از ویژگی‌های این نظریه را نشان دهد،*
- *بتوانید ارتباطات، شباهت‌ها و تفاوت‌های بین این موضوع و سایر موضوعات را تشخیص دهید،*
- *بتوانید به راحتی بین یک درک شهودی و جزئیات فنی در یک استدلال، حرکت کنید،*
- *بدانید که تعریف یا قضیه‌ی کلیدی چیست،*
- *بدانید که چرا جالب و مفید است،*
- *بدانید که حداقل‌های مورد نیاز برای کار کردن یک نظریه چیست،*
- *بدانید که در این نظریه از کدام یک از ایده‌ها، بارها استفاده شده است،*
- *بتوانید آن را بدون یادداشت توضیح دهید،*
- *بتوانید آن را برای دیگری توضیح دهید.*

تمرین

۱. *به کتاب‌ها، یادداشت‌های سخنرانی و صفحات تارنمایی نگاه کنید. بررسی کنید که تا چه اندازه تعریف‌ها، قضیه‌ها و اثبات‌های موجود در آن‌ها را می‌شناسید. سعی کنید از موارد بالا به‌عنوان فهرست سیاهه استفاده کنید.*

۲. *کدام موضوع در ریاضیات وجود دارد که در مورد آن کمترین اعتماد به نفس را دارید یا پایین‌ترین درک را از آن دارید؟ به آن رجوع کنید و ایده‌های این کتاب را در مورد آن اعمال کنید!*

چکیده

- *تعریف‌ها: مثال‌ها، نامثال‌ها و قضیه‌هایی که در آن‌ها از تعریف استفاده شده است را بشناسید.*
- *قضیه‌ها: مثال‌ها و نامثال‌هایی که در آن‌ها از قضیه استفاده شده است و نتایج آن را بشناسید.*
- *اثبات‌ها: ببینید از چه مفروضاتی استفاده شده و بدانید که یک اثبات خاص چگونه شکل گرفته است.*
- *موضوع اصلی: مثال‌های کلیدی را بشناسید.*

فصل ۳۵

بزرگترین راز

عمل کردن یا نکردن؟ هیچ اجباری نیست.

"بودا در امپراطور اعتصاب می‌کند."

از کلاس‌های انگیزشی شگفت‌انگیز و بدخواهانه، ثروت بسازید، و به قول یک ضرب‌المثل قدیمی (ضرب‌المثل انگلیسی): فقط با آن کار کنید و کنار بیایید.

عمل کردن یا نکردن به توصیه‌ها مهم نیست!

"درن براون[1]، ترفندهای ذهن، ۲۰۰۶"

در این کتاب ایده‌ها و روش‌های متفاوت زیادی را با هم جمع کرده‌ام که مانند یک ریاضی‌دان دوباره و دوباره از آن‌ها استفاده می‌کنم. به خاطر سنگینی مطلب و این حقیقت که درک کتاب، سخت‌تر می‌شد، تعدادی از روش‌ها را به‌طور کامل حذف کردم. موضوعاتی مانند توازن و درجه‌های آزادی، در یافتن یک پاسخ مفید هستند و موضوعاتی چون تکرارها و استدلال‌های غیرمستقیم، در منطق اهمیت دارند؛ اما آن‌ها را گذاشتم تا کشف کنید[2].

همانند بسیاری از کتاب‌های کمکی، یک‌بار لازم و ممکن است چندبار بازخوانی نیاز باشد. معلوم است که مطالب زیادی گفته شده است و مطالب زیادی، نگفته باقی مانده است؛ نمی‌توان همه چیز را جمع کرد. اگر واقعا می‌خواهید مانند یک ریاضی‌دان بیندیشید، چه باید بکنید؟

توصیه کلیدی و عملی که به هر ریاضی‌دان مشتاقی ارائه می‌دهم دو جمله است:

- **ریاضیات را به درستی بنویس.**
- **مثال‌های خودت را بساز.**

این روش‌ها به‌طور شگفت‌انگیز تأثیرگذار هستند. دلیل اولی در فصل ۳ مورد بحث قرار گرفت. اساسا گزاره‌هایی که در ادامه می‌آیند، رخ می‌دهند:

اگر نتوانید آن را به درستی شرح دهید، آنگاه احتمال آن هست که آن را به درستی درک نکرده باشید، و اگر نتوانید آن را به درستی درک کنید، آنگاه می‌دانید که باید درون آن را مشاهده کنید و تلاش کنید که آن را درک کنید. این کمک می‌کند که ضعف‌هایی که در درک کردن دارید، آشکار شوند.

توصیه دوم نیز با یکی از فصل‌های قبلی سروکار دارد. ممکن است ساختن مسئله‌ها و مثال‌های خودتان، راز واقعی "اندیشیدن مانند یک ریاضی‌دان" باشد. تلاش برای ساختن یک مسئله آراسته می‌تواند سخت باشد. بااین‌حال، می‌توان چنین مسئله‌هایی را با روش‌های ساده‌ای، شبیه برعکس‌کردن پرسش ساخت. اگر با دوستانتان این مسئله‌ها را

[1] درن براون ($Derren\ Brown$) متولد ۲۷ فوریه ۱۹۷۱، روانشناس و نویسنده خیال‌پرداز انگلیسی است.
[2] آیا انتظار داشتید که هر چیزی را برایتان بیاورم؟

بسازید، سپس می‌توانید آن‌ها را ردوبدل(مسئله‌ها را، نه دوستانتان را) و حتی بیشتر تمرین کنید. همچنین می‌توانید مسابقه‌ای برگزار کنید: ببینید چه کسی می‌تواند سخت‌ترین مسئله قابل کنترل را طرح کند.

برای ساختن مثال‌های خودتان، در واقع سهم بزرگی از مثال‌های خوب، مرزی و بدیهی لازم است: پس نیاز است که آن‌ها را جمع‌آوری و همیشه همراه داشته باشید. یک روش کار، این است که تصور کنید چه خواهید گفت وقتی کسی شما را در نیمه شب بیدار کند و بگوید "سریع باش، یک مثال خوب از X به من بده."

البته که باید احساس آزادی کنید و خودتان تصمیم بگیرید که مهم‌ترین روش‌ها برای یک ریاضی‌دان خوب شدن چیست: "پیچیده‌ترین طرف معادله را انتخاب کنید و ساده کنید" (صفحه ۱۸۴) یا همیشه برای عکس نقیض تلاش کنید (فصل ۲۶)؟

قسمت کوچکی از توصیه آخر این است که؛ راز بزرگ تمایز ریاضی‌دانان از غیر ریاضی‌دانان نگرش است. زمان زیادی لازم است که این نگرش ریاضی وار را کشف کنید. اغلب مواجهه با تمرین‌های پرتکرار مهم است؛ بااین‌حال استفاده از اصول این کتاب در طولانی‌مدت، باعث صرفه‌جویی در زمان می‌شود. مطالعه این کتاب مشخص می‌کند چه چیزی را می دانید و چه چیزی را نمی‌دانید، روی چه چیزی باید کار کنید و غیره.

اگر قبول داشته باشید که فهمیدن(نه درک سطحی) حیاتی است، آنگاه با یورشی عمیق به یک مسئله و داشتن نگاهی فراتر از آن، درکی جادویی خواهید داشت.

آیا از روش‌های این کتاب که استفاده می‌کنید؟ می‌توان انتخاب کرد که آن‌ها را به کار بگیرید یا از آن‌ها چشم‌پوشی کنید. همان‌طور که نقل قول ابتدای این فصل می‌گوید: انجام دادن یا ندادن؟ انتخاب با شماست.

تفکر ریاضی مبارک!

چکیده

- *فقط با آن برخورد کنید.*

بخش هفتم

پیوست‌ها

پیوست آ

چگونه ثابت کنیم که

غیرممکن است بتوان الگوریتمی ارائه داد که هر گزاره‌ای را اثبات کند. بااین‌حال، در بعضی حالات راه‌کارهایی وجود دارد که می‌توان اول به دنبال آنها رفت. در این پیوست، چکیده‌ای از اثبات انواع گزاره‌های مختلف ارائه می‌شود. مثال‌ها به نفع خلاقیت، حذف شده‌اند.

چگونگی اثبات اینکه یک گزاره، دیگری را نتیجه می‌دهد.

برای اثبات اینکه A نتیجه می‌دهد B را، تعدادی از روش‌ها را امتحان کنید.

- *دنباله‌ای مستقیم از نشانه‌های استلزام.*
- *عکس نقیض گزاره را اثبات کنید: ثابت کنید که نقیض B، نقیض A را نتیجه می دهد.*
- *تناقض: فرض کنید گزاره غلط است و ثابت کنید که این شما را به گزاره باطل $1 = 0$ هدایت می‌کند، مانند .*

روش‌های دیگر زیادی وجود دارد.

چگونگی اثبات اینکه دو گزاره معادل هستند.

برای اثبات اینکه A با B معادل است، مسئله دو نیم می‌شود: به‌طور جداگانه اثبات کنید که
A نتیجه می‌دهد B را
و
B نتیجه می‌دهد A را.

چگونگی اثبات اینکه دو شیء یکسان هستند.

از بعضی ساختارهای جمع یا ضرب استفاده کنید که نشان دهید اختلاف آنها ناچیز (صفر) است.
نکات زیر را برای نشان دادن تساوی دو عدد یا دو مجموعه ببینید.

چگونگی اثبات اینکه دو عدد مساوی هستند.

برای اینکه نشان دهید $a = b$:

- *به طور جداگانه اثبات کنید که $a \leq b$ و $a \geq b$ یا*
- *ثابت کنید که $a - b = 0$.*

چگونگیاثبات اینکه دو تابع مساوی هستند.

برای اینکه نشان دهید که برای همه xها، $f(x) = g(x)$:
- *به طور جداگانه اثبات کنید که برای همه xها، $f(x) \leq g(x)$ و برای هر x، $f(x) \geq g(x)$، یا*
- *اثبات کنید که برای همه xها، $f(x) - g(x) = 0$.*

چگونگی اثبات اینکه یک مجموعه مشمول دیگری است.

برای اینکه اثبات کنید که برای دو مجموعه A و B، $A \subseteq B$ است:
- *در سطح توصیف مجموعه‌ها کار کنید و یک دنباله از تساوی‌ها را به کار بگیرید، یا*
- *در سطح اعضا کار کنید، یعنی ثابت کنید که "$x \in A \Longrightarrow x \in B$" یا "در نظر بگیرید $x \in A$"، شروع کنید و از آنجا ادامه دهید.*

چگونگی اثبات اینکه دو مجموعه مساوی هستند.

برای اثبات اینکه در مورد دو مجموعه A و B، $A = B$ باشد. مسئله دونیم می‌شود: به طور جداگانه اثبات کنید $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

چگونگی اثبات اینکه چیزی وجود دارد.

برای اینکه نشان دهیم که یک شیء موجود است، مثلا یک عدد، تابع یا یک مجموعه مشخص با خاصیت دلخواه:
- *به طور مستقیم آن را بسازید یا*
- *از اثبات با تناقض استفاده کنید: فرض کنید که شیء وجود ندارد.*

چگونگی اثبات اینکه چیزی وجود ندارد.

مانند بالا، فرض کنید وجود دارد و از اثبات به وسیله تناقض استفاده کنید.

چگونگی اثبات اینکه چیزی برای همه xها صدق می‌کند.

سخت است که یک توصیه کلی در این وضعیت ارائه دهیم. بسیاری از اثبات‌ها با در "نظر بگیرید $X \in x$..." آغاز می‌شوند. یعنی، عضو دلخواه x را انتخاب می‌کنید که در طول برهان، ثابت گرفته می‌شود.
تلاش کنید مسئله را به حالت‌ها تقسیم کنید. (این روش به روش فرسایشی مشهور است). اما مطلع باشید که به همه حالات نیاز دارید؛ تنها گرفتن یک حالت خاص کافی نیست. به خاطر بیاورید یک مثال، حالت کلی را اثبات نمی‌کند.

اثبات با سورها

(۱) *برای همه xها، $P(x)$: باید نشان دهید که اگر شخصی به شما xی تحویل داد (هر x)، آنگاه $P(x)$ درست است.*

(۲) *وجود دارد xی، $P(x)$: باید xی بیابید، به طوری که $P(x)$ درست باشد.*

چگونگی اثبات اینکه چیزی یکتاست.

فرض کنید یکی مجزا از دیگری وجود دارد، آنگاه نشان دهید که دو شیء یکسان هستند، بنابراین یک تناقض ارائه داده‌اید. برای انجام این کار، نکات بالا را در نظر بگیرید و ببینید که چطور می‌توانید نشان دهید اختلاف آنها

بی‌اهمیت (صفر) است.

چگونگی اثبات اینکه یک مجموعه نامتناهی است.

برای اینکه نشان دهید یک مجموعه نامتناهی است:
• *یک دوسویی (بیژکتیو) بین مجموعه و یک مجموعه نامتناهی، مانند $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Q}$ بسازید، یا*
• *فرض کنید که مجموعه متناهی است و با استدلال درست به تناقض برسید. (برای مثال، یک مجموعه متناهی از اعداد، بزرگترین عضو دارد. نشان دهید که این فرض، یک تناقض به‌دست می‌دهد.)*

چگونگی اثبات چیزهایی که با اعداد طبیعی اندیس‌گذاری شده‌اند.

برای اثبات یک ادعا با اندیس اعداد طبیعی، از استقرا استفاده کنید.

چگونگی اثبات چیزهایی که با اعداد صحیح اندیس‌گذاری شده‌اند.

برای اثبات یک ادعا $A(x)$ که با اعداد صحیح اندیس‌گذاری شده است، آن را برای مثال به وسیله استقرا برای اعداد طبیعی اثبات کنید.
سپس برای x که منفی است، $-x$ مثبت است، و می‌توان از اینکه $A(-x)$ درست است برای اثبات درستی $A(x)$ استفاده کرد.

چگونگی اثبات انژکتیو (یک‌به‌یک) بودن یک نگاشت

برای نشان دادن اینکه $f : X \longrightarrow Y$ انژکتیو است: فرض کنید که $f(x_۱) = f(x_۲)$ و ادامه دهید تا نشان دهید که $x_۱ = x_۲$.

چگونگی اثبات سوژکتیو (پوشا) بودن یک نگاشت

برای نشان دادن اینکه $f : X \longrightarrow Y$ سوژکتیو است:
نشان دهید که برای هر $y \in Y$، $x \in X$ی موجود است که $f(x) = y$.

چگونگی اثبات بیژکتیو (دوسویی) بودن یک نگاشت

ثابت کنید که انژکتیو و سوژکتیو است.

پیوست ب

الفبای یونانی

جدول ب.۱: حروف یونانی

تلفظ فارسی	حروف بزرگ	حروف کوچک	تلفظ فارسی	حروف بزرگ	حروف کوچک
آلفا	A	α	نو	N	ν
بتا	B	β	کسی	Ξ	ξ
گاما	Γ	γ	اُمیکرون	O	o
دلتا	Δ	δ	پی	Π	π
اپسیلون	E	ϵ	رُ	P	ρ
زتا	Z	ζ	سیگما	Σ	σ
اِتا	H	η	تاو	T	τ
تتا	Θ	θ	اوپسیلون	Υ	υ
یوتا	I	ι	فی	Φ	ϕ
کاپا	K	κ	خی	X	χ
لامبدا	Λ	λ	سای	Ψ	ψ
مو	M	μ	اُمگا	Ω	ω

پیوست پ

نمادها و نشانه‌ها

پایه لگاریتم طبیعی	e
ریشه دوم ۱-	i
بی‌نهایت	∞
وجود دارد	$\exists$
علامت پایان اثبات	$\blacksquare$
نابلا	∇
اَلِف	$\aleph$
مجموعه تهی	$\emptyset$
مجموع	$\sum$
حاصلضرب	$\prod$
متعلق است به / عضو بودن	$\in$
زیرمجموعه بودن	$\subseteq$
زیرمجموعه سره	$\subset$
اشتراک	$\cap$
اجتماع	$\cup$
نتیجه می‌دهد که (اغلب نادرست به کار برده می‌شود)	$\Longrightarrow$
معادل است با (همچنین مشهور به اگر و تنها اگر است)	$\Longleftrightarrow$
پریم	$'$
می‌نگارد به	$\longmapsto$
سوژکتیو (پوشا)	$\twoheadrightarrow$
انژکتیو (یک‌به‌یک)	$\hookrightarrow$
متناسب با	$\propto$
معادل/ موافق با	$\equiv$
تقریباً مساوی است	$\approx$
عمود بر	$\perp$
نقیض	$\neg$
تیلدا	$\sim$
هَت	$\hat{}$
بنابراین	$\therefore$
زیرا	$\because$
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

abuse of .... سواستفاده از

arcsin .... سینوس معکوس

assumtion .... فرضیات

axiom .... اصل

basic rules .... قوانین اساسی

biconditional .... دو شرطی

bijection .... دوسویی

bijective .... نگاشت دوسویی

binary operation .... عمل دوتایی

Binomial Theorem .... قضیه دوجمله‌ای

cardinality .... عدد اصلی

cases .... حالات

casting out nines .... ریختن ده‌ها عدد

circular argument .... استدلال دوری

classification theorem .... قضیه دسته‌بندی

codomain .... هم‌دامنه

common symbols .... نماد مشترک

commutative .... جا به جایی

complement of set .... متمم یک مجموعه

conclusion .... نتیجه

conditional statement .... گزاره شرطی

conjecture .... حدس

conjunction .... ترکیب عطفی

connecting phrases .... اصطلاح مرتبط

connectives .... ارتباطات

contradiction .... تناقض

contrapositive .... عکس نقیض
converse .... عکس
convex .... محدب
coprime .... متباین
corollary .... نتیجه
Cosine Rull .... قانون کسینوس
countable .... شمارش پذیر
countably infinite .... شمارای نامتناهی
countably many elements .... تعداد قابل توجهی عناصر
counterexample .... مثال نقض
dead-end integer .... عدد صحیح مرده
decimal approximations .... تقریب اعشاری
difference .... تفاضل
degrees of freedom .... درجه آزادی
Diophantine equations .... معادلات دیوفانتی
direct method of proof .... روش اثبات مستقیم
discriminant .... مبین
disjunction .... ترکیب فصلی
displaying .... نمایش دادن
divides .... بخش پذیر
divisibility .... بخش پذیری
divisible .... بخش پذیر
draw a picture .... یک تصویر رسم کنید
duble negative .... دوبار منفی
element of a set .... عنصری از مجموعه
empty set .... مجموعه تهی
equality of sets .... تساوی مجموعه‌ها
equals .... مساوی
equation .... معادله
equidistant .... دارای مسافت مساوی
equivalence class .... کلاس هم‌ارزی
equivalence modulo n .... هم‌نهشتی به پیمانه n
equivalence relation .... رابطه هم‌ارزی

گزاره‌های هم‌ارز .... equivalence statements
الگوریتم اقلیدس .... Euclidean algorithm
لم اقلیدس .... Euclids Lemma
عدد صحیح زوج .... even integer
مثال .... example
وسط محور .... excluded middle
منحصر به فرد .... exclusive
خستگی .... exhaustion
سور وجودی .... existential quantifier
بیان .... expression
مثال مرزی .... extreme example
فاکتوریل .... factorial
تجزیه .... factorization
عددفرما .... Fermat number
قضیه بزرگ فرما .... Fermat's Last Theorem
قضیه کوچک فرما .... Fermat's Little Theorem
اعدا فیبوناچی .... Fibonacci numbers
مجموعه‌ی متناهی .... finite set
نقطه ثابت .... fixed point
قضیه کوچک فرما را ببینید .... FLT, see Fermat's Little Theorem
برای همه .... for all
فرمول .... formula
قضیه چهار رنگ .... Four Colour Theorem
تابع .... function
قضیه اساسی حساب .... Fundamental Theorem of Arithmetic
تابع گاما .... Gamma function
ب‌مم .... gcd
تعمیم .... generalization
حدس گلدباخ .... Goldbach conjecture
بزرگترین مقسوم علیه مشترک .... greatest common divisor
بزرگترین عامل مشترک .... greatest common factor
گروه .... group
عدد شاد .... happy number

highest common factor .... بزرگترین عامل مشترک
Homer Simpson .... هومر سیمپسون
hypothesis .... فرضیات
identity map .... نگاشت همانی
If . . ., then .... اگر...، آنگاه
iff .... اگر و تنها اگر
implication .... استلزام
implication symbol .... نماد استلزام
include .... شامل
index .... اندیس
inductive .... استقرا
inductive definition .... تعریف استقرا
inductive hypothesis .... فرض استقرا
inductive step .... گام استقرا
infinity .... بی‌نهایت
injective function .... تابع انژکتیو
initial step .... گام اولیه
integers .... اعداد صحیح
intersection of sets .... اشتراک مجموعه‌ها
intuition .... بینش
inverse function .... تابع معکوس
irrational numbers .... اعدا گنگ
law of the excluded middle .... قانون منع میانه
least common multiple .... کوچکترین مضرب مشترک
lemma .... لم
logically equivalent statements .... گزاره‌های هم‌ارز منطقی
magic square .... مربع سحرآمیز
map .... نگاشت
mathematical statement .... گزاره ریاضی
maximum function .... تابع ماکزیمم
members of a set .... اعضای مجموعه
Milk Crate Problem .... مسئله جعبه شیر
minimum function .... تابع مینیمم

پیمانه .... *mod*

حساب پیمانه‌ای .... *modular arithmetic*

مدول .... *modulo*

مدول .... *modulus*

اعداد طبیعی .... *natural numbers*

شرط لازم .... *necessary condition*

نفی .... *negation*

سورها .... *quantifiers*

نامثال .... *non-examples*

خطای غیر مهلک .... *non-fatal error*

اعداد صحیح نامنفی .... *non-negative integers*

عدد صحیح فرد .... *odd integer*

یک به یک .... *one-to-one*

تناظر یک به یک .... *one-to-one correspondence*

تابع پوشا .... *onto function*

مشمول .... *exclusive*

شامل .... *inclusive*

توازن .... *parity*

عمود منصف .... *perpendicular bisector*

چند جمله‌ای .... *polynomial*

مجموعه‌ی توانی .... *power set*

پیش تصویر .... *preimage*

آزمون اولیه .... *primality testing*

عدد اول .... *prime number*

اصل استقرای ریاضی .... *Principle of Mathematical Induction*

اصل استقرای قوی ریاضی .... *Principle of Strong Mathematical Induction*

حاصلضرب مجموعه‌ها .... *product of sets*

برهان .... *proof*

اصلاح کردن .... *proofreading*

زیرمجموعه سره .... *proper subset*

حکم، گزاره .... *proposition*

نشانه‌گذاری .... *punctuation*

فیثاغورس .... *Pythagoras*

Pythagoras' Theorem .... قضیه فیثاغورس
Pythagorean triples .... سه تایی فیثاغورس
quantifier .... سور
rational numbers .... اعداد گویا
real numbers .... اعداد حقیقی
reductio ad absurdum .... برهان خلف
relation .... رابطه
relatively prime .... اول نسبی
representative .... نماینده
reversing .... معکوس کردن
seeing through the complexity .... دیدن کل پیچیدگی
set .... مجموعه
Simpsons .... سیمپسون
Sine Rule .... قانون سینوس
source .... منبع
square number .... عدد مربع
squarey number .... عدد مربعی
statement .... گزاره
strong assumption .... فرض قوی
strong conclusion .... حکم قوی
subset .... زیرمجموعه
sufficient condition .... شرط کافی
surjective function .... تابع پوشا
symbol .... نماد
synonyms .... مترادف
systematic method .... روش سیستمی
target .... هدف
tautology .... درست‌نما
term .... جمله
theorem .... قضیه
there exists .... وجود دارد
topics .... موضوعات
Triangle Inequality .... نامساوی مثلث

مثال بدیهی .... *trivial examples*
جداول ارزشی .... *truth tables*
اول دوقلو .... *twin prime*
بازی دو نفره .... *two-player game*
فهمیدن .... *understanding*
ناشمارا .... *uncountable*
ناشمارای نامتناهی .... *uncountably infinite*
اجتماع .... *union*
اجتماع مجموعه‌ها .... *union of sets*
منحصر به فرد .... *unique*
سور عمومی .... *universal quantifier*
جهانی .... *universal*
کران بالا .... *upper bound*
مقدار .... *value*
مقدار تابع .... *value of a function*
نمودار ون .... *Venn diagram*
هشدارها .... *warnings*
مثال واسون .... *Wason's example*
فرض ضعیف .... *weak assumption*
حکم ضعیف .... *weak conclusion*
خوش تعریف .... *well-defined*
اصل خوش‌ترتیبی .... *Well-ordering Principle*
بدون کاستن از کلیت .... *without loss of generality*
با کاغذ و قلم .... *with pen and paper*
جادوگر .... *Wizard*
واژه‌ها یا نمادها .... *words or symbols*
مثال‌های کاری .... *worked examples*

Surname: Houston *Name: Kevin*

Title: How to Think Like a Mathematician

Translators: Maryam Esmaeili and Javad Fathi Mourjani

Degree: Bachelor of Science *Subject:*
Field:

Date: *Number of pages: 314*

Keywords:

Abstract

-abstract

How to Think Like a Mathematician

by

Kevin Houston

Translators

Maryam Esmaeili and Javad Fathi Mourjani