

دیناله ارمی توان فهرستی از معدوم‌های ده به ترتیبی مشخص نوشته شده اند است:

ماشاء: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

عدد ۱: اجله اول و ۲: اجله دوم و اگر دنباله نامتناهی باشد ۳: اجله نامتناهی نامتناهی.

تعریف: ہر تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ایک دنبالہ قطعی می نامیم۔
 راجلات دنبالہ f می نامیم۔ معمولاً دنبالہ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ بنائش می دهم۔
 و $a_1 = f(1)$ و $a_2 = f(2)$ و $a_n = f(n)$ و $b_1 = f(1)$ و $b_2 = f(2)$ و $b_n = f(n)$ و $c_1 = f(1)$ و $c_2 = f(2)$ و $c_n = f(n)$

مثال ١: $e_n = \left\{ \frac{1+n^r}{n^r} \right\}$, $d_n = \{ \sin(n) \}$, $c_n = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$, $b_n = \{ n^r \}$, $a_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$

$$L_n = 1 + (-1)^n \text{ همگی دیناله هستند}$$

$e_n = \left\{ \cos \frac{n\pi}{4} \right\}$, $d_n = \left\{ \sqrt{n+1} \right\}$, $c_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$, $b_n = \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$, $a_n = \left\{ \sin \frac{\pi}{n} \right\}$: مثال ٢

نتیجه ۱ در مثال اول ۲ درهمه دنباله با عدد n از عدد یک شروع می شود. می توان شروع n از عدد ۱ بنا شد (مثال زیر)

$$b_n = \left\{ \cos \frac{n\pi}{4} \right\}_{n=0}^{+\infty} \quad , \quad c_n = \left\{ \sqrt{n-3} \right\}_{n=3}^{+\infty} : \text{مثال 3}$$

نوع ۲، می‌توان برای بیشتر دنباله‌ها برای جمله n ام فرمول یادستوری تعیین کرد. (مثال زیر)

مثال ۴: در سری برای جمله عمومی دنباله

$$\left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots \right\}$$

پیدا کنید

حل: جواب $\alpha_n = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{5^n}$ که در آن $n \geq 1$

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{\Delta^n} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\Delta}, a_2 = -\frac{2}{\Delta^2}, a_3 = \frac{3}{\Delta^3}, \dots$$

نوع ۳: برای برخی از دنباله‌ها می‌توان فرمول (یا دستوری) برای a_n یافت (مثال زیر)

مثال ۵: اگر α رقم n ام بعد از اعشاریاش عدد پیر

دنباله $\{a_n\}$ ؟ صورت مقابل است. وجود ندارد

$\{ \dots, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$ و دستوری برای a_n

مثال ۱۶: دنباله فیبوناچی $\{F_n\}$ به طور بارزترشی به صورت زیر تعریف می شود

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3 \quad \text{b.} \quad f_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & n \geq 3 \end{cases}$$

حد دنباله ها از این به بعد دنباله ها را دنباله های نامتناهی در نظر می گیریم.

تعریف: اگر a_n یک دنباله باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ هرگاه

اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ موجود باشد آنگاه دنباله a_n همگرم نامیم و اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ موجود نباشد یا آنگاه $+\infty$ شود آنگاه $N < NA : N \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0$

دنباله a_n را برای نایم

مثال ۱۷ الف) دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ همواره عدد منتهی است زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

ب) دنباله $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ همواره عدد e است زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

ج) دنباله $a_n = n^2$ و آنراست زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

د) دنباله $a_n = 1 + (-1)^n$ و آنراست زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + (-1)^n)$ وجود ندارد. جملات این دنباله: $2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$ است.

مثال ۱۸ برای $n \geq 2$ دنباله $a_n = \frac{1}{n^r}$ عدد منتهی است زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^r} = 0$

قضیه ۱۱

قوانین حدی برای دنباله ها: اگر a_n و b_n دو دنباله همواره باشد و c عددی ثابت باشد آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad (۱) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} \quad \text{اگر } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0 \quad (۲) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^p = (\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n)^p \quad \text{اگر } a_n > 0 \text{ و } p > 0 \quad (۴) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (۵)$$

قضیه ۲ اگر $b_n \leq a_n \leq c_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ (قضیه فشردگی).

قضیه ۳ اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

مثال ۱۹ چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ پس طبق قضیه قبل $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$

مثال ۲۰: هدای ویا و برای دنباله های زیر تعیین کنید:

الف) $a_n = (-1)^n$ ب) $b_n = \frac{n+1}{n}$ ج) $c_n = \frac{n}{n+1}$

حل الف) چون جملات a_n به صورت $1, -1, 1, -1, \dots$ است بنابراین $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ وجود ندارد پس دنباله a_n واگراست.

ب) دنباله b_n همواره عدد است زیرا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

ج) دنباله c_n همواره عدد است زیرا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

قضیه ۴ اگر $f(x)$ تابع با دامنه $D_f = [a, +\infty)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و اگر $a_n = f(n)$ برای n بزرگ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$

مثال ۱۱ نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

حل: با فرض $f(n) = \frac{\ln n}{n}$ برای x ، چون

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{H.O.P}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

پس طبق قضیه ۱ داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ [شیران $f(n) = \frac{\ln n}{n}$]

قضیه ۱۰ اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ و تابع f در L پیوسته باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(L)$

مثال ۱۲: نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0$

حل: چون تابع $\sin x$ در $x=0$ پیوسته است و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ پس طبق قضیه قبل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\frac{\pi}{n}) = \sin(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n}) = \sin 0 = 0$

پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} = \sin 0 = 0$

مثال ۱۳: همدی و یا واگرایی دنباله $a_n = \frac{n!}{n^n}$ را معین کنید

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \times 3 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} \right)$$

چون داخل پرانتز حد اکثر یک است $\left(\frac{2 \times 3 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} \leq 1 \right)$ زیرا صورت از مخرج کمتر یا مساوی است.

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n}$$

حال طبق قضیه فشردگی $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

قضیه ۱۱ دنباله $\{2^n\}$ به ازای $1 < 2 \leq$ همدست و برای مقدارهای 2 واگر است و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \begin{cases} 0 & -1 < 2 < 1 \\ 1 & 2 = 1 \end{cases}$$

[اثبات صفحه ۱۹۰ کتاب استوارت] (همچنین در صفحه ۵ جزوه)

تعریف: دنباله a_n را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n $a_n \leq a_{n+1}$

و دنباله a_n را نزولی نامیم هرگاه برای هر n $a_n \geq a_{n+1}$

و دنباله a_n را یکنوا نامیم هرگاه یا صعودی باشد یا نزولی.

توجه: برای تعیین صعودی و نزولی دنباله a_n می‌توان به صورتی زیر عمل کرد

(۱) اگر $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ آنگاه دنباله a_n صعودی است و اگر $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ آنگاه دنباله a_n نزولی است

(۲) اگر $a_{n+1} - a_n > 0$ آنگاه دنباله a_n صعودی است و اگر $a_{n+1} - a_n \leq 0$ آنگاه دنباله a_n نزولی است

(۳) اگر تابع $f(x)$ برای x صعودی باشد آنگاه $a_n = f(n)$ هم صعودی است و اگر $f(x)$ نزولی باشد آنگاه دنباله a_n نزولی است

یا دآورد: اگر $f(x)$ آنگاه تابع f صعودی است و اگر $f(x)$ آنگاه تابع f نزولی است

مثال ۱۴. صعودی و نزولی بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید

الف) $a_n = \frac{3}{n+5}$ (ب) $b_n = \frac{n}{n^2+1}$ (ج) $c_n = \ln(n)$ (د) $d_n = e^n$

حل الف) دنباله a_n نزولی است زیرا $a_n = \frac{3}{n+5} > \frac{3}{n+6} = a_{n+1}$ (طبق تعریف)

ب) دنباله b_n نزولی است (از توجه ۴ قسمت ۳ تک می‌گیریم)

چون $a_n > a_{n+1}$ برای $n > 1$ [$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$] $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$

برای $n > 1$ چون $f'(x) < 0$ پس تابع $f(x)$ نزولی است بنابراین دنباله $b_n = f(n) = \frac{n}{n^2+1}$ نیز نزولی است.

ج) تابع $f(x) = \ln x$ برای $x > 0$ $[D_f = (0, +\infty))$ در نظر می‌گیریم و $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

پس تابع $f(x)$ صعودی است بنابراین دنباله $c_n = f(n) = \ln(n)$ صعودی است.

د) تابع $f(x) = e^x$ در نظر می‌گیریم و $f'(x) = e^x > 0$ پس تابع f صعودی است و بنابراین دنباله $d_n = e^n = f(n)$ صعودی است [توجه $D_f = \mathbb{R}$]

تعریف: دنباله a_n را از بالا کراندار نامیم هرگاه عددی مانند M وجود داشته باشد که

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$$

و دنباله a_n را از پایین کراندار نامیم هرگاه عددی مانند L موجود باشد که

$$\forall n \in \mathbb{N} : L \leq a_n$$

و دنباله a_n را کراندار نامیم هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد

قضیه ۷. دنباله a_n کراندار است اگر و فقط اگر عددی مثبت مانند C وجود داشته باشد بطوریکه

$$[-C \leq a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}] \quad \text{یا} \quad [|a_n| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}]$$

توجه ۵: در قضیه ۷ اگر عددی مثبت مانند C موجود نباشد دنباله a_n برای کران بی نامیم.

مثال ۱۵. دنباله‌های مانند $a_n = \sin(n)$ و $b_n = (-1)^n$ کراندار هستند و دنباله‌های مانند

$$c_n = 2^n \quad \text{و} \quad d_n = n! \quad \text{بی کران می‌باشند}$$

$$[-1 \leq \sin(n) \leq 1 \quad \text{پس} \quad -1 \leq a_n \leq 1, \quad -1 \leq b_n = (-1)^n \leq 1]$$

[دنباله‌های $c_n = 2^n$ و $d_n = n!$ کران بالا ندارند پس بی کران (کراندار نیستند) هستند]

$$2 \leq c_n \quad \text{و} \quad 1 \leq d_n$$



قضیه ۸: هر دنباله همگرا، کراندار است.
 توجه ۶: برعکس این قضیه همواره برقرار نیست [هر دنباله کرانداری تواند همگرا نباشد مثال ۵ دنباله $a_n = (-1)^n$ کراندار است ولی همگرا نیست زیرا حد ندارد.]

قضیه ۹: هر دنباله کراندار و یکنوا، همگرا است. اثبات کتاب استوارت صفحه ۸۹۲

توجه ۷: از قضیه ۹ برای همگرایی دنباله های استفاده می کنیم که محاسبه حد آن آسان نیست مثال زیر
 مثال ۱۶: نشان دهید که دنباله $a_n = \frac{2^n}{n!}$ همگرا است.

حل: چون $0 < a_n = \frac{2^n}{n!} \leq 2$ پس دنباله a_n کراندار است.

از طرفی چون $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{2^n}{n!} = a_n$ زیرا بعد از ساده کردن به $\frac{2}{n+1} < 1$ می رسم. پس دنباله a_n نزولی است [یعنی یکنوا است] پس طبق قضیه ۹ این دنباله همگراست.

در پایان این بخش قضیه و اثبات می کنیم

اثبات قضیه ۹: اگر $2 < a_n \leq \infty$ آنگاه دنباله $a_n = 2^n$ کراندار است زیرا $2^n < 2^{n+1}$

از طرفی ۱ برای هر n از $1 \leq n$
 $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2^n = a_n$

یعنی دنباله $a_n = 2^n$ نزولی است پس طبق قضیه ۹ دنباله a_n برای $2 < a_n$ همگراست.

[در ادامه نشان می دهیم که برای $2 < a_n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = 0$ مثال ۱۷]

اگر $0 < 2 < a_n$ پس $1 < a_n < 2$ بنابراین طبق حالت قبل دنباله $b_n = |a_n|$ همگراست
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ و طبق قضیه ۳ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n = 2^n) = 0$ زیرا $b_n = |a_n|$

اگر $2 = a_n$ پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = 1$ زیرا $1 = a_n$ پس دنباله a_n به عدد ۱ همگراست

اگر $2 = -1$ آنگاه چون دنباله $(-2)^n = (-1)^n 2^n$ و اگر است پس دنباله 2^n نیز واگراست

هرگاه $2 > 1$ یا $2 < -1$ چون می توان فرض کرد که $f(x) = x^n$ [برای $x > 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و برای $x < -1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وجود ندارد] پس دنباله $a_n = 2^n$ واگراست.

اگر $2 = 0$ همه حالات دنباله $a_n = 2^n$ صفر است پس دنباله 2^n به صفر همگراست
 پس بطور خلاصه دنباله 2^n برای $2 \leq 1$ همگراست و برای مقادیر دیگر 2 واگراست

مثال ۱۱۷ نشان دهید که برای $0 < r < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$

حله فرض کنید $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = x$ باشد طبق حدت $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = x$ پس $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = r \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = rx$

یعنی $x = rx$ چون $r \neq 0$ پس $x = 0$ یا بر این $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ برای $0 < r < 1$



تمرینات:

۱- نشان دهید دنباله $a_n = \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{\pi}{n}$ همگراست [حد دنباله را بیابید]

۲- حد دنباله های زیر را بیابید:
 $a_n = \frac{2n}{3n+1}$ و $b_n = \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}$ و $c_n = e^{\frac{1}{n}}$ و $d_n = n^2 e^{-n}$

۳- صعودی و نزولی بودن دنباله های زیر را معین کنید:

$a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$ و $b_n = n + \frac{1}{n}$ و $c_n = n e^n$

۴- کران دار بودن و یا بی کران بودن دنباله های زیر را بررسی کنید:

$a_n = 1 + (-1)^n$ و $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ و $c_n = n^n$ و $d_n = \frac{1}{n!}$ و $e_n = \frac{2^n}{n!}$

سریها (یا سری های نامتناهی)

تعریف: افرینش یک دنباله باشد در این صورت عبارت $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ یا بطور فشرده تر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را یک سری نامتناهی (یا یک سری) می نامیم و $a_1, a_2, \dots$ را جمله ها

سری و a_n را جمله عمومی سری می نامیم و $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ را مجموع جزئی n ام سری می نامیم.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را هگذا به عدد S نامیم هرگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ و این سری را واگرا نامیم هرگاه

حد $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ موجود نباشد یا $\pm \infty$ باشد.

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به عدد S هگذا باشد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ را مجموع این سری می نامیم و

مثال ۱: نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ [یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ به عدد ۱ هگذاست]

حل: طبق تعریف $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ می یابیم.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right] = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right] = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

توجه ۱: معیار S_n برای مقدار زیادی از سریها وقت گیر و خیلی آسان نیست. برای راحتی بعضی از سریهای خاص واسم دارا معضی می کنیم و هگذاهای و واگراهای آن را به صورت قضیه بیان می کنیم و بعضی از این قضایا را اثبات می کنیم و بعضی از قضایا ما بدین اثبات می پذیریم.

مثال ۲: (سری هندسی) سری $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ را یک سری هندسی

یا قدر نسبت r می نامیم و در قضیه زیر ثابت می کنیم که اگر $|r| < 1$ آنگاه سری به $\frac{a}{1-r}$ هگذاست و اگر $|r| \geq 1$ سری هندسی واگراست.

قضیه ۱: اگر $|r| < 1$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ و اگر $|r| \geq 1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ واگراست.

اثبات: S_n مجموع جزئی n ام این سری را می یابیم.

$$S_n = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ar^n}{1-r} \begin{cases} \frac{a}{1-r} & |r| < 1 \\ \text{واگراست} & |r| \geq 1 \end{cases}$$

اگر $|r| = 1$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$ پس سری هندسی واگراست.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \quad (أ) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n \quad (ب) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1^n} \quad (ج) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1^n} \quad (د)$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = r \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{r^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{r}} = \frac{r}{r+1}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=m}^{+\infty} a_{n-m}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_{n+m}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n-1}}$$
$$\Delta = \frac{I_0}{r} + \frac{r_0}{q} - \frac{r_0}{rV} + \dots$$
$$\Delta - \frac{1}{r} + \frac{r_0}{a} - \frac{r_0}{r_V} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta \left(\frac{r}{r_V} \right)^n = \frac{\Delta}{1 + \frac{r}{r_V}} = \frac{\Delta}{r} = \mu$$

سوی یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{3}{4}$ و $r = -\frac{2}{3}$ و $a = 5$ است.

مثال ۵. همداری وراثتی $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \times 3^{1-n}$ را معین کنید.

حل:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \times 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2^n) \times 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

وراثت

یک سری هندسی با قدر نسبت $r = \frac{4}{3}$ ($\frac{4}{3} > 1$) و اول است.

مثال ۶: نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ واگراست.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

نباید این سری واکراست.

مثال ۷ عدد $\frac{2}{317}$ به صورت نسبت دو عدد صحیح $\frac{p}{q}$ بنویسید.

$$Y_{1/31V} = Y_{1/31V1V1V} \dots = Y_{1/3} + \frac{1V}{10^3} + \frac{1V}{10^5} + \frac{1V}{10^7} + \dots$$

حل: صی دائیہ کہ :

بنابراین یک سری هندسی داریم که در آن $a = \frac{17}{10}$ و $r = \frac{1}{10}$ و با عدد $7,3$ جمع شده است.
 $7,3\overline{17} = 7,3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{17}{10^n} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 7,3 + \frac{\frac{17}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{73}{10} + \frac{17}{90} = \frac{1147}{90}$

مثال ۱۸ اگر $|a| < 1$ آنگاه مجموع سری (توان) $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ را بیابید.
 حل سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت $r = a$ است و $|a| < 1$ چون $|a| < 1$ پس

سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ را یک سری توانی نامید که در آن $|a| < 1$.

قضیه ۲ (شرط لازم برای همگرایی یک سری) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

اثبات ۱. $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ بنابراین $a_n = S_n - S_{n-1}$. حال اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = t$

وجود دارد پس فرض کنید $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = t$ بنابراین $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = t$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n - S_{n-1}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = t - t = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

توجه ۳ عکس قضیه قبل در حالت کلی درست نیست. مقدار زیادی سری وجود دارد که $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ولی $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ واگر است

یکی از این سریها سری همساز (هارمونیک) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ است که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ولی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ واگر است (مثال)

نتیجه: اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ و یا اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ موجود نباشد آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ واگر است. (عکس نتیجه قضیه قبل)

مثال ۹. سریهای زیر همگی واگر هستند.
 (الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ (ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}$ (ج) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ (د) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \text{ وجود ندارد (و د) (ج)}$$

توجه ۴: نتیجه بالا به آزمون واگرایی یک سری معروف است.

قضیه ۳: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ دو سری همگرا باشند و c یک عدد ثابت باشد آنگاه سریهای $\sum_{n=1}^{+\infty} c a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ همگرا هستند و

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

قضیه ۴: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ دو سری باشند که اختلاف آنها در m جمله اول آنها است آنگاه هر دو سری همگرا یا

هر دو سری واگر هستند.

نتیجه: اگر در یک سری تعداد متناهی حذف شود یا تعداد متناهی جمله به آن اضافه شود در همگرایی و یا واگرایی آن

تاثیری ندارد

مثال ۱۱۰ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$ را بیابید
 حل: می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (مثال ۱) و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $r = \frac{1}{2}$ و با عدد ۱ همگیت
 زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \times 1 + 1 = 4$$

مثال ۱۱۱ می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست مثال آنکه چند جمله متناهی (مثلاً ۵ جمله) از آن حذف شود آنگاه سری باقی مانده همگرا
 یعنی $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

<----->

تمرین

۱- مشخص کنید که سریهای زیر همگراست یا واگرا، اگر همگراست مجموع آن سری را بیابید.

الف) $\frac{1}{n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{p} - 1 + 2 - 4 + \dots$ ب) $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \dots$
 ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ر) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

۲- مشخص کنید که سریهای زیر همگراست یا واگرا، اگر همگراست مجموع آن سری را بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2^n}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ د) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$
 ر) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{4}{7^n} \right)$ ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

۳- عددهای زیر را با صورت نسبت دو عدد صحیح بنویسید.

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt[4]{252}$

آزمونهای همگرایی و واگرایی سریها.

در این بخش تعداد آزمون برای سریها معرفی می‌کنیم که توسط این آزمون‌ها به همگرایی و واگرایی سریها پی می‌بریم.
در بخش قبل به آزمون واگرایی سری پرداختیم [اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ یا $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ وجود نداشته باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ واگراست.]

آزمون اشتدال: فرض کنید که تابع f یک تابع مثبت و پیوسته و نزولی روی بازه $[1, +\infty)$ باشد و $a_n = f(n)$ در این صورت سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

توجه: در استفاده از آزمون اشتدال لازم نیست سری $\sum a_n$ و اشتدال مجازی از یک شروع شوند. مثلاً برای سری $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$ باید اشتدال مجازی به صورت $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^2}$ در نظر گرفته شود.

مثال ۱) سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ را یک سری همگاری نامیم. نشان دهید که سری همگرا واگراست.

حل: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ روی بازه $[1, +\infty)$ در نظر می‌گیریم. این تابع روی این بازه مثبت و پیوسته و نزولی است و $f(x) = \frac{1}{x}$.

اشتدال مجازی واگراست: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln|x|]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$
بنابراین $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ طبق آزمون اشتدال واگراست.

مثال ۲) همگرایی و واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ را بررسی کنید.

حل: تابع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ روی بازه $[1, +\infty)$ پیوسته و مثبت و نزولی است. برای بررسی بودن از مشتق کمک می‌گیریم:
 $f'(x) = \frac{-2x}{x^2+1} < 0$ برای $x > 0 \Rightarrow f(x)$ روی $[1, +\infty)$ نزولی است.

و $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\tan^{-1} x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

بنابراین اشتدال مجازی $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ همگراست پس طبق آزمون اشتدال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ همگراست.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ را یک p -سری یا یک سری ابر-همگرا نامیده می‌شود.

مثال ۳) نشان دهید که اگر $p > 1$ آنگاه سری ابرهمگرا $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست و اگر $p \leq 1$ آنگاه این سری واگراست.

حل: اگر $p < 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ و اگر $p = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^0} = 1 \neq 0$ بنابراین در این دو حالت $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ طبق آزمون واگرایی، واگراست.

اگر $p=1$ در این صورت p سری به سری همار $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ تبدیل می شود که در مثال ادیده ایم که واثر است.

اگر $p \neq 1$ و $p > 0$ باشد تابع $f(u) = \frac{1}{u^p}$ یک تابع فردی و پیوسته و مثبت روی $(0, +\infty)$ است و $f(u) = \frac{1}{u^p}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{du}{u^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{u^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{-p+1}}{-p+1} + \frac{1}{p-1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & p < 1 \end{cases}$$

بنابراین طبق آزمون اشتدال برای $p > 1$ چون اشتدال مجازی $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ نیز همگراست. و چون $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ برای $p < 1$ واثر است پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p < 1$ واثر است و طبق ملاحظ قبل پس اگر $p > 1$ سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست و اگر $p < 1$ سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ واثر است.

مثال ۴. همگرایی و واثری برای سری $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ را بررسی کنید.

حل: تابع $f(u) = \frac{1}{u \ln u}$ روی بازه $(2, +\infty)$ در نظر می گیریم. این تابع روی بازه $(2, +\infty)$ پیوسته و مثبت و نزولی است. [تدری بودن تابع را بررسی کنید همین]

$$\int_2^{+\infty} \frac{du}{u \ln u} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{du}{u \ln u} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln(\ln u) \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = +\infty$$

چون اشتدال مجازی $\int_2^{+\infty} \frac{du}{u \ln u}$ واثر است پس طبق آزمون اشتدال سری $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ واثر است.

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln u| + C$$

$$\ln u = u \Rightarrow du = \frac{du}{u}$$

مثال ۵. همگرایی یا واثری برای $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$ بررسی کنید.

حل: تابع $f(u) = \frac{\tan^{-1} u}{u^2+1}$ در نظر می گیریم. این تابع روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته و تدری و مثبت است.

$$\int_1^{+\infty} f(u) du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\tan^{-1} u}{u^2+1} du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\tan^{-1} u)^2}{2} \right]_1^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2$$

پس طبق آزمون اشتدال سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$ همگراست.

تدری بودن تابع $f(u) = \frac{\tan^{-1} u}{u^2+1}$ روی $(0, +\infty)$ بررسی شود (تدری)

نکته: از آزمون اشتدال نتیجه نمی شود که مجموع سری برابر با مقدار اشتدال است.

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1 \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۶: معین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ همگراست یا واگراست.

حل: تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیریم. این تابع روی این بازه پیوسته و مثبت است. برای شروع بودن تابع:

$$f(x) = \frac{x(\frac{1}{x}) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

آر $\ln x > 1$ آنگاه: $f'(x) < 0$ یعنی آر $e > x$ آنگاه $f(x) > 0$ و $f(x)$ برای $x > e$ تری است. [توجه می توان دو جمله اول سری انکار داشت و $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ با $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ را مقایسه کرد]

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_3^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} = +\infty$$

بنابراین طبق آزمون اشتغال سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ واگراست و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ دو جمله بیش تر از سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ دارد و طبق قضیه ۴ (نتیجه آن) واگراست [در مثال ۸ از آزمون مقایسه کمک گرفته ایم]

تمرین: شروعی بودن توابع $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ و $g(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x^2 + 1}$ روی بازه به ترتیب $(2, +\infty)$ و $(1, +\infty)$ را بررسی کنید

آزمون مقایسه: فرض کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جلالت مثبت باشد [یعنی $a_n > 0$ و $b_n > 0$ $\forall n$]

(۱) اگر برای هر n $a_n \leq b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(۲) اگر برای هر n $a_n \leq b_n$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ هم واگراست.

مثال ۷: همگرایی و یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ را معین کنید.

حل: از آزمون مقایسه به صورت زیر کمک می گیریم. می دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک ۲-سری است و همگراست. از طرفی جمله غالب در سه جمله ای $2n^2 + 4n + 3$ جمله $2n^2$ است و می دانیم که

نامساوی $\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$ برای هر n ای برقرار است ($n \in \mathbb{N}$)

حال چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2}$ هم همگراست طبق قضیه

طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ همگراست [طبق (۱)]

مثال ۸: همگرایی و یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ را بررسی کنید. (مثال ۶ بالای صفحه)

حل: می دانیم که سری هسار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست. همچنین $\ln n > 1$ $\forall n \geq 3$ و در نتیجه

$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 3$ حال طبق آزمون مقایسه بنده (۲) چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست پس

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ هم واگراست.

مثال ۹: همگرایی و یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ را بررسی کنید.

حل: می دانیم که $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است و همگراست

همچنین برای $n \geq 4$ نامساوی $n! > 2^n$ برقرار است پس
 حال طبق آزمون مقایسه (بزرگ) چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست پس
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ هم همگراست

مثال ۱۰ اگر p عددی باشد که $p < 1$ آنگاه بدین است که $n^p < n$ پس $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$ حال چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ واگراست پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p < 1$ واگراست.

آزمون مقایسه حدی: فرض کنید که $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند یعنی برای هر عدد طبیعی n : $a_n > 0$ و $b_n > 0$

اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ (الف) اگر L عددی مثبت باشد آنگاه هر دو سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ (از یک نوع هستند) (یعنی هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند)
 (ب) اگر $L = +\infty$ آنگاه اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ نیز واگراست.
 (ج) اگر $L = 0$ و اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ نیز همگراست.
 مثال ۱۱ به کمک آزمون مقایسه حدی، همگرایی یا واگرایی سری های زیر را معین کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ (ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+n}}$ (ج) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$

حل الف با $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ از مقایسه حدی کمک می گیریم.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 > 0$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست پس $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ نیز همگراست (طبق الف)

(ب) با سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ از مقایسه حدی کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+2n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ واگراست و طبق آزمون مقایسه حدی قسمت (ب) پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+n}}$ واگراست.

(ج) با سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ از مقایسه حدی کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5+n^2}} \times \frac{n^{\frac{1}{2}}}{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^{\frac{5}{2}} + 3n^{\frac{3}{2}}}{2n^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{5}{n^5} + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2\sqrt{\frac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2}{2} = 1 > 0$$

چون سری $\sum \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ یک $\frac{1}{2}$ - سری واکراست پس طبق آزمون مقایسه نسبت (الف) سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5+n^2}} \text{ واکراست.} \rightarrow \leftarrow$$

مثال ۱۲: همگرایی و واگرایی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$ را معین کنید.
حل: از آزمون اشتراک کمک می گیریم.

$$f(x) = \frac{x}{e^x} = x e^{-x}, \quad \forall x \geq 1$$

تابع $f(x)$ در بازه $(1, +\infty)$ پیوسته و مثبت و نزولی است.

$$[f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0; \quad \forall x \geq 1 \Rightarrow \text{تابع } f(x) \text{ نزولی است}]$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x e^{-x} dx \xrightarrow{\text{روش جزء بجزء}} \lim_{b \rightarrow +\infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_1^b = -\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b}(b+1) + 2e^{-1} =$$

$$= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b+1}{e^b} + 2e^{-1} \xrightarrow{\text{Hôpital}}$$

$$= +\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} + 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

همگرایی

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

روش جزء بجزء

$x = u \quad e^{-u} du = dv$
 $dx = du \quad \leftarrow v = -e^{-u}$

چون اشتراک $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ همگرایی پس طبق آزمون اشتراک، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$ همگرایی

$\rightarrow \leftarrow$

تقریب، همگرایی و واگرایی سریهای زیر را معین کنید.

- | | | | |
|--|--|--|--|
| (۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n^2+1}$ | (۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ | (۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ | (۴) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$ |
| (۵) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^4 n^n}$ | (۶) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ | (۷) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+4^n}{n+4^n}$ | (۸) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2}$ |
| (۹) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ | (۱۰) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}$ | (۱۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$ | (۱۲) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ |
| (۱۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ | (۱۴) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n} e^n}$ | | |

سریهای متناوب و همگرایی مطلق و آزمونهای نسبت و ریشه

تعریف: سری متناوب، سری است که جملات آن یک دیمان مثبت و منفی باشد. به عبارت دیگر اگر a_n و a_{n+1} ... a_{n-1} ... a_1 و a_n ... a_{n+1} ... a_1 سری متناوب هستند.

مثال ۱: سریهای زیر، سری متناوب هستند:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

آزمون سری متناوب (آزمون لایپنیتز): اگر سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ که در آن $a_n > 0$ است در دو شرط زیر صدق کند آنگاه سری همگراست.

الف) دنباله a_n تدریجاً به صفر میل کند یعنی

$$\forall n : a_{n+1} \leq a_n$$

ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

همچنین اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = S$ و $R_n = S - s_n$ [خطای حاصل از تقریب مجموع S سری]

$|R_n| \leq a_{n+1}$ به وسیله مجموع جبرئ n ام آن باشد [در این صورت]

$$|S - s_n| < a_{n+1} \quad \text{به عبارت دیگر}$$

مثال ۱: نشان دهید که سری همگرا متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگراست.

حل: طبق آزمون سری متناوب $a_n = \frac{1}{n}$ و $a_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{n+1} = a_{n+1} < a_n = \frac{1}{n}$$

بنابراین سری همگرا متناوب همگراست.

مثال ۲: همگرایی و یا طغری سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{4^n - 1}$ را معین کنید.

حل: این سری یک سری متناوب است و در شرط (ب) آزمون سری متناوب صدق نمی کند زیرا

$$a_n = \frac{3^n}{4^n - 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{4^n - 1} = \frac{3}{4} \neq 0$$

پس نمی توان از آزمون سری متناوب کمک گرفت.

ولی از آزمون واک برای کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{4^n - 1} = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ -\frac{3}{4} & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$$

بنابراین حد وجود ندارد پس سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{4^n - 1}$ واگراست.

[در بحث بعد از آزمون نسبت برای این سری استفاده می کنیم]

مثال ۳ همگرایی یا واگرایی سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ را بررسی کنید.

حل: نشان می دهیم که هر دو شرط آزمون سری متناوب برای این سری برقرار است

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+1} > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 0$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{(2-x^3)x}{(x^3+1)^2} < 0 \quad \forall x > \sqrt[3]{2}$$

مخرج که چون توان ۲ دارد مثبت است پس صورت را تعیین علامت می کنیم

$$(2-x^3)x = 0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=\sqrt[3]{2} \quad \text{و} \quad x \quad \begin{array}{c|ccc} & -\infty & 0 & \sqrt[3]{2} & +\infty \\ \hline x & - & 0 & + & + \\ \hline -x^3+2 & + & + & 0 & - \\ \hline x(-x^3+2) & - & + & - & - \end{array}$$

بنابراین $f(x)$ روی بازه $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ نزولی است. بنابراین دنباله a_n برای n بزرگی است.

بنابراین سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست.

مثال ۴: مجموع سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ را با دقت سه رقم اعشار بیابید.

حل: این سری متناوب طبق آزمون سری متناوب همگراست. زیرا $a_n = \frac{1}{n!} > 0$ و $a_n = \frac{1}{n!} < \frac{1}{(n+1)!} = a_{n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{(n+1)!} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

چند جمله اول سری را می نویسیم تا تقریب مناسب را بدست آوریم.

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \dots$$

$$a_7 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} = 0.0002 \Rightarrow S_7 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} \approx 0.36788$$

$$\Rightarrow |S - S_7| \leq b_7 < 0.0002 \quad \Rightarrow S \approx 0.36788 \quad \text{با تقریب سه اعشار}$$

تعریف (همگرایی مطلق) سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را همگرایی مطلق می نامیم هرگاه سری قدر مطلق آن یعنی $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

تعریف (همگرایی مشروط یا شرطی) سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را بطور مشروط (همگرایی شرطی) می نامیم به شرطی که همگرا باشد ولی همگرایی مطلق نباشد.

مثال ۵: همدای و نوع آن و یا راداری سری را تعیین کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ (ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (ج) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

حل (الف) چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right|$ همداست [یک p سری ($p=2$) است] پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ به طور مطلق همداست.

(ب) سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ هم ساز است و همداست ولی پس سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ به طور مشروط همداست.

(ج) قبل دیدیم که $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ و همداست پس $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ همدای مطلق (همدای مطلق) است.

قضیه ۱. هر سری همدای مطلق، هم تراهم است. (سری به طور مطلق، همداست)

مثال ۶. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ همدای مطلق (همدای مطلق) همداست.

حل. سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ در نظریه گیریم چون $|\cos n| \leq 1$ پس $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ همداست ($p=2$ سری) پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ همداست پس بنا بر این سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ به طور مطلق همداست.

آزمون نسبت: فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ یک سری دلخواه باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

(الف) اگر $L < 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ به طور مطلق همداست.

(ب) اگر $L > 1$ یا $L = +\infty$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ واثر است.

(ج) اگر $L = 1$ این آزمون برای این سری کارایی ندارد.

آزمون ریشه n ام (کوشی یا کشی) فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ یک سری دلخواه باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

(الف) اگر $L < 1$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ به طور مطلق همداست.

(ب) اگر $L > 1$ یا $L = +\infty$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ ($L = +\infty$) آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ واثر است.

(ج) اگر $L = 1$ این آزمون برای این سری کارایی ندارد.

توجه: این دو آزمون (آزمون نسبت و آزمون ریشه n ام) با هم معادل هستند یعنی اگر در یکی از این دو آزمون $L = 1$ شود در آزمون دیگر هم $L = 1$ می شود و با عبارت دیگر اگر آزمون نسبت برای یک سری کارایی نداشته باشد آزمون ریشه n ام هم کارایی (برای این سری) ندارد و برعکس.

مثال ۷: همدای و نوع آن و یا راداری سری را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

حل الف) روش اول به کمک آزمون نسبت:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{(-1)^n n^3} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} < 1$$

سری به طور مطلق همگراست.

روش دوم به کمک آزمون ریشه n ام:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n n^3}{3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

پس سری به طور مطلق همگراست.

نکته: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ زیرا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} e^0 = 1$$

حل ب) از آزمون نسبت کمک می گیریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

سری واگراست.

حل ج) از آزمون ریشه n ام استفاده می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$$

سری به طور مطلق همگراست.

حل د) طبق آزمون نسبت

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{n!}{1} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

پس سری $\sum \frac{1}{n!}$ به طور مطلق همگراست.



تعبیر: اگر جمله عمومی سری داده شده به صورت تابع توان دار باشد آزمون ریشه n ام آسان تر جواب می دهد. و اگر در جمله عمومی سری داده شده فاکتوریل باشد آزمون نسبت آسان تر جواب می دهد.

تعبیر ۲: اگر در آزمون نسبت یا آزمون ریشه n ام عدد یا برابر یا یک شود باید از آزمونهای دیگر مانند آزمون مقایسه آزمون مقایسه حدی، آزمون اشتراک، آزمون واگرایی بیشکلی به سری داده شده استفاده می کنیم (یا آزمون دیگری).

مثال ۸: همگرایی و نوع آن ویا واگرایی سریهای زیر را معین کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^k}$ (ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$ (ج) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$ (د) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

حل الف) آزمون ریشه n ام.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^k}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^k} = \frac{2}{1} > 1$

سری واگراست
 می دانیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1^k = 1$

حل ب) آزمون ریشه n ام
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$
 سری بطور مطلق همگراست

حل ج) آزمون ریشه n ام
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$
 سری بطور مطلق همگراست

حل د) آزمون نسبت
 سری واگراست
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right| =$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{((n+1)(n!))^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 1$

مثال ۹: همگرایی و نوع آن ویا واگرایی سریهای زیر را معین کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n}$ (ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ (ج) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

حل الف) آزمون ریشه n ام
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$

سری بطور مطلق همگراست

حل ب) آزمون نسبت (سری واگراست)
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{3^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} \quad (\text{در قسمت ب})$$

حل ج) آزمون ریشه n ام

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \stackrel{\text{قسمت ب}}{=} \frac{1}{e} < 1$$

سری بطور مطلق همگراست.



تمرین: همگرای و تباعد آن و یا دلخواهی سریهای زیر را مشخص کنید.

۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k e^{-n^2}$

۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}}}$

۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$

۴) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$

۵) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

۶) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + n^6}$

۷) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2n+1}$

۸) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

۹) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{n!}$

۱۰) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n \times n!}{5 \times 11 \times \dots \times (3n+2)}$

تعریف: هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$ را سری توانی به حسب $(x-\alpha)$ یا سری توانی به مرکز α یا سری توانی حول α می نامیم. اگر $\alpha=0$ در این صورت سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است.

یکی از کاربردهای سری توانی برای نمایش برخی از مهم‌ترین توابعی است که در ریاضیات، فیزیک و شیمی بکار می رود. در این بخش به سؤالات زیر جواب داده می شود.

۱- به ازای چه مقادیری از x سری توانی همگراست؟

۲- آیا می توان به یک سری توانی یک تابع نسبت داد؟

۳- آیا می توان یک تابع را به صورت یک سری توانی نمایش داد؟

مثال ۱: به ازای چه مقدارهایی از x سریهای توانی زیر همگراست.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

حل الف) از آزمون نسبت n ام کمک می گیریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-3)^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-3|}{\sqrt[n]{n}} = |x-3|$$

اگر $|x-3| < 1$ سری بطور مطلق همگراست. یعنی بازه $(2, 4)$

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

سری همواره متناوب است پس همگراست

$$x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

سری همواره واگراست

$$x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

پس اگر $2 < x < 4$ آنگاه سری توانی همگراست.

ب) از آزمون نسبت استفاده می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

سری برای هر مقدار از x همگرای مطلق است پس برای هر x سری توانی همگراست
یعنی برای هر عدد حقیقی سری توانی همگراست

در صفحات بعد نشان می دهیم که $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (جوابهای سؤال ۲، ۳)

قضیه ۱: برای هر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$ فقط یکی از سه حالت زیر وجود دارد:

الف) سری فقط در $x = \alpha$ همگراست

ب) سری به ازای همه از اعداد حقیقی همگراست. مثال اقسیم اب) منفی قبل

ج) عددی مثبت باشد R وجود دارد که اگر $|x-\alpha| < R$ سری همگراست و اگر $|x-\alpha| > R$ سری واگراست. مثال اقسیم اب) منفی قبل

نیمه ۱: برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در قضیه قبل $\alpha = 0$ است و سه حالت در قضیه قبل به صورت زیر است. الف) سری فقط در $x = 0$ همگراست. مثال ۲ قسمت الف)

ب) سری به ازای همه از اعداد حقیقی همگراست

ج) عددی مثبت باشد R وجود دارد که اگر $|x| < R$ سری همگراست و اگر $|x| > R$ سری واگراست

نیمه ۲: (تعریف شعاع همگرای و بازه همگرای سری توانی) عدد مثبت R در قضیه قبل را شعاع همگرای سری توانی می نامیم. و بنا بر قرارداد در حالت الف) شعاع همگرای $R = 0$ و در حالت ب) شعاع همگرای $R = +\infty$ و بازه همگرای سری توانی بازه ای است

یک قسمت الف) بازه همگرای $(-R, R)$ است و شعاع همگرای عدد ۱ است و $\alpha = 3$ است در قسمت ب) مثال ۱ شعاع همگرای $R = +\infty$ و بازه همگرای $R = (-\infty, +\infty)$ مجموعه اعداد حقیقی است بنا بر این در حالت ج) در قضیه برای بازه همگرای چهار حالت زیر وجود دارد.

برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$ در $[\alpha-R, \alpha+R]$ و $(\alpha-R, \alpha+R)$ و $(\alpha-R, \alpha+R]$ و $[\alpha-R, \alpha+R)$

برای سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: $[-R, R]$ و $(-R, R)$ و $(-R, R]$ و $[-R, R)$

مثال ۲: شعاع همگرای و بازه همگرای سری های توانی زیر را بیابید

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} x (n!)^2}$ د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

حل الف) از آزمون نسبت استفاده می کنیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) |x|$$

اگر $x = 0$ باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) |x| = 0$ پس سری فقط در $x = 0$ همگرای مطلق است
اگر $x \neq 0$ باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) |x| = +\infty$ پس سری واگراست

بنابراین شعاع همگرای این سری $R = 0$ و بازه همگرای آن $\{0\}$ است

حل ب) از آزمون ریشیه n ام کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| = |x| < 1$$

اگر $|x| < 1$ سری بطور مطلق همگراست

پس بازه همگرایی مطلق $(-1, 1)$ است و شعاع همگرایی این سری $R=1$ است

برای $x=1$ و $x=-1$ که در آزمون ریشیه n ام صدق نمی کند جداگانه بررسی توانی بررسی می کنیم

$(\sum_{n=1}^{+\infty} 1^n = +\infty)$ سری واگراست.

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$$

(وجود ندارد) $(\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n)$ سری واگراست.

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

بنابراین شعاع همگرایی این سری توانی $R=1$ و بازه همگرایی همان $(-1, 1)$ است.

حل ج) سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$ این سری به تابع بسل معروف است

از آزمون نسبت کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^2}{4(n+1)^2} = 0 < 1$$

طبق آزمون نسبت این سری توانی برای هر عدد حقیقی x بطور مطلق همگراست.

بنابراین شعاع همگرایی این سری توانی $R=+\infty$ و بازه همگرایی $(-\infty, +\infty)$ است.

حل د) از آزمون نسبت کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3|x| \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 3|x| < 1$$

طبق آزمون نسبت اگر $3|x| < 1$ سری بطور مطلق همگراست و اگر $3|x| > 1$ سری واگراست

بنابراین اگر $|x| < \frac{1}{3}$ سری بطور مطلق همگراست و شعاع همگرایی $R = \frac{1}{3}$ و بازه همگرایی مطلق $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ است. برای $x = \frac{1}{3}$ و $x = -\frac{1}{3}$ جداگانه بررسی می کنیم.

سری واگراست

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n (-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

یک $p = \frac{1}{2}$ سری است.

طبق آزمون سری متناوب این

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n (\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

سری همگراست [تمرین: بررسی کنید]

بنابراین شعاع همگرایی این سری توانی $R = \frac{1}{3}$ و بازه همگرایی $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ است.

حل ۱) برای این سری یعنی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ از آزمون ریشه n ام کمک می‌گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3 \times 3^{\frac{1}{n}}} |x+2| = \frac{1}{3} |x+2| < 1$$

طبق آزمون ریشه اگر $\frac{1}{3} |x+2| < 1$ سری بطور مطلق همگراست و اگر $\frac{1}{3} |x+2| > 1$ سری واگراست بنابراین اگر $\frac{1}{3} |x+2| < 1$ آنگاه $|x+2| < 3$

$$|x+2| < 3 \Rightarrow -3 < x+2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1$$

پس شعاع همگرایی سری توانی $R=3$ و بازه همگرایی مطلق سری $(-5, 1)$ است

برای $x=1$ و $x=-5$ جداگانه بررسی می‌کنیم (در داخل سری با جای تعویض x می‌کنیم)

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \times 3^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \neq 0 \quad \text{سری واگراست}$$

$$x=-5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \cdot n \neq 0 \quad \text{سری واگراست}$$

بنابراین شعاع همگرایی این سری توانی $R=3$ و بازه همگرایی $(-5, 1)$ است.

در جدول زیر برای سری‌های توانی مثال ۱ و ۲ شعاع همگرایی و بازه همگرایی مطلق جمع شده می‌کنیم.

سری توانی	شعاع همگرایی	بازه همگرایی	بازه همگرایی مطلق	مثال
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R=1$	$(2, 4)$	$[2, 4)$	مثال ۱ (الف)
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R=+\infty$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	مثال ۱ (ب)
$\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$	$R=0$	$\{0\}$	$\{0\}$	مثال ۲ (الف)
$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R=1$	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	مثال ۲ (ب)
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! (n!)^2}$	$R=+\infty$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	مثال ۲ (ج)
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$	$R=\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	مثال ۲ (د)
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$	$R=3$	$(-5, 1)$	$(-5, 1)$	مثال ۲ (ر)

مثال ۳ بازه همگنی و شعاع همگنی سری های توانی زیر را بیابید:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (ج) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(Lnn)^n} \quad (ب) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2} \quad (الف)$$

حل (الف) به کمک آزمون نسبت

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+2)^2} \times \frac{5^n (n+1)^2}{x^n} \right| = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 |x| = \frac{1}{5} |x| < 1$$

اگر $|x| < \frac{1}{5}$ سری توانی بطور مطلق همگراست و اگر $|x| > \frac{1}{5}$ سری توانی واگراست
اگر $|x| < \frac{1}{5}$ آنگاه $|x| < 5$ پس شعاع همگنی $R = 5$ و بازه همگنی مطلق $(-5, 5)$ است
برای $x = 5$ و $x = -5$ جداگانه بررسی می کنیم.

$x = 5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ سری همگراست $(P=2 \text{ سری})$
[چون قدر مطلق آن $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ همگراست]
 $x = -5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ سری همگراست
پس بازه همگنی $[-5, 5]$ است
حل (ب) از آزمون ریش نه n ام استفاده می کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^2 x^{2n}}{(Lnn)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n)^2}{(Lnn)^2} x^2 = 0 < 1$$

پس سری بطور مطلق هم جا همگراست و شعاع همگنی $R = +\infty$ و بازه همگنی R یعنی $(-\infty, +\infty)$ است.

حل (ج) از آزمون نسبت کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} |x| = |x| < 1$$

اگر $|x| < 1$ سری بطور مطلق همگراست و اگر $|x| > 1$ سری واگراست
پس شعاع همگنی $R = 1$ و بازه همگنی مطلق $(-1, 1)$ است
برای $x = 1$ و $x = -1$ جداگانه بررسی می کنیم.

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ (واگراست) سری هارمونیک

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ (طبق آزمون سری متناوب) همگراست
تمرین بررسی کنید

بنابراین بازه همگنی سری $(-1, 1)$ است

نکته: با توجه به مثال های ۱ و ۲ و قضیه ۱ با سوال ۱ جواب داده شد.
حال زمینه را برای پاسخ دادن به سوال ۳ آماده می کنیم.

نمایش توابع با شکل سری های توانی

به دور روش می توانیم برای یک تابع یک سری توانی و برای سری توانی یک تابع نسبت دهیم.
روش اول: روش ابتکاری: از سری یک فصول $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ می توان برای چندین تابع سری توانی
و برای چندین سری توانی، چندین تابع نسبت دهیم [از اشتغال گیری و مشتق گیری هم کمک می گیریم].
قضیه ۲ [مشتق گیری و اشتغال گیری جمله به جمله از سری توانی] اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-\alpha)^n$ برابر R باشد و $R > 0$ آنگاه اگر $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (u-\alpha)^n$

الف) تابع $f(u)$ روی بازه $(\alpha-R, \alpha+R)$ مشتق پذیر (و در نتیجه پیوسته) است و

$$f'(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (u-\alpha)^{n-1} \quad \text{و} \quad f''(u) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n (u-\alpha)^{n-2}$$

(ب)

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

نتیجه: اگر $\alpha=0$ و $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ آنگاه

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad x \in (-R, R)$$

(ب)

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in (-R, R)$$

مثال ۴: در زیر که سری توانی هندسی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ همگراست هرگاه $|x| < 1$ و همچنین مجموع
این سری تابع $\frac{1}{1-x}$ است.

بنابراین: ① $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ برای $|x| < 1$. یعنی با تابع $\frac{1}{1-x}$ سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

در بازه $(-1, 1)$ نسبت می دهیم و بررسی به سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ تابع $\frac{1}{1-x}$ برای $|x| < 1$
نسبت می دهیم. حال با تغییراتی در x طوری که در بازه $(-1, 1)$ یا $|x| < 1$ قرار داشته باشد
چندین سری توانی و توابع از سری رابطه ① به هم نسبت می دهیم

می دانیم که $1-x=1-x$ پس در رابطه ① بجای x متغیر $-x$ قرار می دهیم (در طرفین رابطه)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad ② \quad |x| < 1$$

و با رابطه ۲ می رسم.
حال وقتی که $|x| < 1$ آنگاه x است پس در رابطه ① و ② به جای x متغیر x قرار می دهیم و به
رابطه های ③ و ④ در صفحه بعد می رسم.

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \quad (۳) \quad |x| < 1 \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (۴)$$

حال با کمک قضیه ۲ می توانیم از طرفین رابطه ① تا ⑤ مشتق را اشتغال بگیریم و چهار تابع با چهار سری توانی با صورت زیر ثبت دهیم

$$\textcircled{۱} \xrightarrow{\text{اشتغال گیری}} -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (|x| < 1) \quad (۵)$$

$$\textcircled{۲} \xrightarrow{\text{اشتغال گیری}} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (|x| < 1) \quad (۶)$$

در رابطه ⑤ و ⑥ مقدار C صفر می شود زیرا با قرار دادن $x=0$ در دو طرف رابطه ها $C=0$

$$x=0 \xrightarrow{\textcircled{۵}} -\ln(1-0) = 0 + C \Rightarrow C = -\ln 1 = 0 \Rightarrow C=0$$

$$x=0 \xrightarrow{\textcircled{۶}} \ln(1+0) = 0 + C \Rightarrow C = \ln(1) = 0 \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \textcircled{۵} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) \quad (|x| < 1) \quad \textcircled{۶} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$\textcircled{۱} \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (|x| < 1) \quad (۷)$$

$$\textcircled{۲} \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \dots \quad (|x| < 1) \quad (۸)$$

$$\textcircled{۴} \xrightarrow{\text{اشتغال گیری}} \tan^{-1} x = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{x=0} C=0$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (۹)$$

$$\textcircled{۵} \xrightarrow{\text{اشتغال گیری}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{x=0} C=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (۱۰)$$

توجه: برای رسیدن رابطه ⑩ می توان روابط ⑤ و ⑥ را با هم جمع کرد همچنین با تغییر اندیس سری های توانی ⑦ و ⑧ اندیس پایین n از ۰ شروع کنیم

$$\textcircled{۷} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \quad (۱۱) \quad \text{برای بدنه}$$

[ادامه مثال در صفحه بعد]

ادامه مثال ۴ $(|x| < 1)$ (۱۱) مشتق گیری $\frac{x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) x^{2n+1}$

(۱۲) مشتق گیری $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (2n+2) x^{2n+1}$ $(|x| < 1)$

مثال ۵: یک یک سری توانی برای توابع $\frac{1}{x+2}$ و $\frac{x^3}{x+2}$ بیابید.

حل

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n \quad |x| < 2$$

چون $x \in (-1, 1)$
 $\frac{x}{2} \in (-1, 1)$

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \times \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3} \quad |x| < 2$$



مثال ۶: یک تابع برای سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ پیدا کنید و همانند مثال ۴ چندین تابع و سری برای به هم نسبت دهید.

حل: در مثال اکتساب دیدیم که سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ روی $\mathbb{R}$ همگراست یعنی بازه همگرای آن $(-\infty, +\infty)$ است. قرار می دهیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{بامشتق گیری داریم}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{\text{تغییر اندیس}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1-1}}{(n+1-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} f'(x) = f(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = 0 \\ f(x) = e^x \end{matrix}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$f(x) = 0$ نادرست است زیرا $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=1 \neq f(x)=0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

پس $f(x) = e^x$ یعنی

(ادامه در صفحه بعد)

حال به رابطه

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{شماره ۱ در فصل ۱}$$

$$\textcircled{1} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[-x]{\text{بالتغییر}} \bar{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \textcircled{2}}$$

$$\textcircled{1} \quad x \xrightarrow{\text{تغییر}} x^2 \quad \left| \quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \textcircled{3} \right|$$

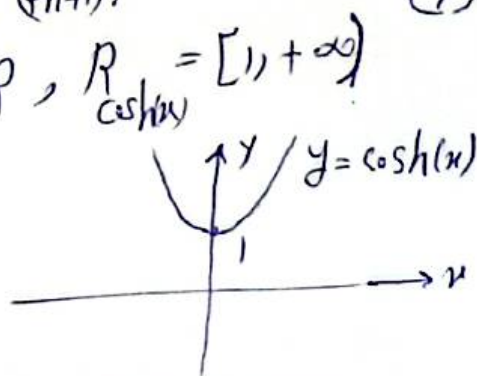
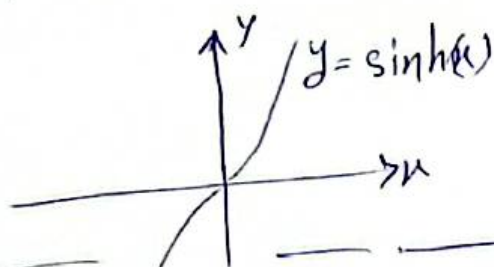
$$\textcircled{1} \quad x \xrightarrow{\text{تغییر}} -x^2 \quad \left| \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad \textcircled{4} \right|$$

نکته ۱: با جمع و تفریق در تابع e^x و $\bar{e}^x$ دو تابع هذلولی به صورت زیر تعریف می شود

$$\cosh(x) = \frac{e^x + \bar{e}^x}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \textcircled{5}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - \bar{e}^x}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \textcircled{6}$$

$$D_{\sinh(x)} = D_{\cosh(x)} = \mathbb{R} \quad R_{\sinh(x)} = \mathbb{R} \quad R_{\cosh(x)} = [1, +\infty)$$



$$\boxed{\begin{aligned} y = \cosh(x) &\Rightarrow y' = \sinh(x) \quad \text{و} \quad y = \sinh(x) \Rightarrow y' = \cosh(x) \\ \int \sinh(x) dx &= \cosh(x) + C \quad \text{و} \quad \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C \end{aligned}}$$

نکته ۲: عدد $\sqrt{-1} = i$ را عدد موهومی نامیده می شود این عدد، عدد حقیقی نیست با این عدد می توان مجموعه اعداد مختلف ساخت که این مجموعه از اعداد را با $\mathbb{C}$ نمایش می دهیم

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ و } i^2 = -1 \}$$

فرمول $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ با فرمول اولیه معروف است. به کمک این فرمول با صورت زیر می توان به توابع $\sin x$ و $\cos x$ سری توانی نسبت داد.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \dots + \frac{i^n x^n}{n!} + \dots$$

با توجه به اینکه $i^2 = -1$ پس $i^0 = 1$ و $i^1 = i$ و $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$ و $i^4 = 1$ و $i^5 = i$ و $i^6 = -1$ و ...

$$\Rightarrow e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin x}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (V)}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (A)}$$

توجه: می توان فرمول $\sin x$ و $\sinh(x)$ را حفظ کرد و با گرفتن مشتق از آن ها به $\cos x$ و $\cosh(x)$ رسید. در صفحه قبل دیدیم که

$$\boxed{\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (D)}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (B)}$$

مثال ۷: یک سری توانی پیدا کنید که نمایش تابع $\frac{e^x - 1}{x}$ باشد و پس با مشتق گیری از آن، نشان دهید که

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{حلهای دانسته}$$

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right)' \Rightarrow \frac{x e^x - e^x + x}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n+1)!} \xrightarrow[\text{در طرفین رابطه}]{\text{با قرار دادن } x=1} 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

روش دوم: با کمک سری تیلور و سری مک لوران می توان برای برخی از توابع یک سری توانی که نمایش آن باشد نسبت داد.

قضیه ۳ (قضیه تیلور) اگر تابع $f(x)$ در $x = \alpha$ نمایش به شکل سری توانی داشته باشد یعنی اگر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (x - \alpha)^n \quad |x - \alpha| < R$$

که در آن R شعاع همگرایی سری است. آنگاه C_n ها از دستور $C_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ مشخص می شود که در آن $f^{(n)}(\alpha)$ مشتق n ام تابع f در $x = \alpha$ است.

به عبارت دیگر

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (x - \alpha)^1 + \frac{f''(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \dots$$

تساوی (*) را سری تیلور تابع f در $x = \alpha$ (یا حول α یا به مرکز α) نامیده می شود. در حالت خاص $\alpha = 0$ سری تیلور یا سری زیر به نام سری مک لوران تبدیل می شود.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

سؤال: تحت چه شرایطی تابعی برابر با مجموع سری تیلورش است؟
به عبارت دیگر تساوی $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$ درست است (برقرار است)

برای جواب دادن به این سؤال فرض کنیم که مجموع خبری سری تیلور به صورت زیر باشد

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k$$

و باقی مانده سری تیلور را با $R_n(x)$ نمایش می دهیم.

بنابراین

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \Rightarrow R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = f(x)$ که این جواب را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم

قضیه ۴ اگر $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ که در آن $T_n(x)$ چند جمله ای تیلور درجه n ام (مجموع خبری n ام) در $x = \alpha$ است و برای $|x - \alpha| < R$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$

آنگاه تابع f روی بازه $|x - \alpha| < R$ برابر با مجموع سری تیلورش است

قضیه ۵: (نابرابری تیلور) اگر برای $|x - \alpha| < R$ داشته باشیم $|f^{(n+1)}(x)| < M$ (که در آن M عددی است) آنگاه باقی مانده سری تیلور $R_n(x)$ در نابرابری زیر صدق می کند (در صفحه بعد)

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-\alpha|^{n+1} : |x-\alpha| \leq d \quad (**)$$

مثال ۸: ثابت کنید که تابع e^x برابر با مجموع سری مک لورانش است (یا سری مک لوران تابع e^x را بیابید).

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow \forall n \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{بدین است که} \quad f^{(n+1)}(x) = e^x$$

اگر d عددی مثبت باشد و $|x| < d$ آنگاه $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^d$ بنابراین نابرابری تیلور رابطه $(**)$ وقتی که e^d است و $M = e^d$ باشد به صورت زیر است

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} : |x| < d$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^d \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \text{قضیه فشردگی} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{پس} \quad |R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} \Rightarrow 0$$

بنابراین برای هم مقادیر x داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ پس نتیجه می شود که

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

توجه: نشان $R_n(x) = 0$ برای بسیاری از توابع وقت گیر و مشکل است، بنابراین با وجود اینکه می توان از قضیه تیلور و مک لوران برای برخی از توابع یک سری توانی برای $f(x)$ یافت ولی نشان دادن $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ مشکل است. پس روش اول مناسب تر است.

مثال ۹: سری مک لوران تابع $f(x) = \sin x$ را پیدا کنید و ثابت کنید که این سری برای هر x تابع $\sin x$ نشان می دهد (یعنی $\sin x$ برابر سری مک لورانش است).

$$\left. \begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$f(x) = \sin x = f^{(1)}(0) = f^{(3)}(0) = \dots$$

سری مک لوران $\sin x$ را به صورت زیر می نویسیم

$$f(x) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x: |f^{(n+1)}(x)| \leq 1$$

$$\text{چون } f^{(n+1)}(x) = \pm \sin x \text{ یا } \pm \cos x$$

می‌توانیم در نابرابری تیلور فرض کنیم که $M=1$ پس داریم

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{چون } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \left[\text{تقریباً سری } e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \text{ همبستگی پس} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| = 0 \quad \text{بنابراین از} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \text{نتیجه می‌گیریم} \quad 0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{پس } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{بنابراین} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال ۱۰ سری مکلاوران $\cos x$ و $\sin x$ را بدست آورید

$$y = \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{حل: مطابق مثال ۹ داریم}$$

$$\cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{با مشتق‌گیری داریم}$$

* توجه: در این سری اندیس x تغییر نمی‌کند.

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{به کمک دو اتحاد مثلثاتی مقابل}$$

سریهای مکلاوران $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ می‌یابیم.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

مثال ۱۱ سری تیلور تابع $y = \sin x$ حول $x = \frac{\pi}{4}$ را بیابید.

حل: (روش اول) از روی سری توانی

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{و} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n \end{aligned}$$

روش دوم: (به کمک سری تیلور) $f(x) = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^k + \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$$

$T_n(x)$ $R_{n+1}(x)$

(عدد حقیقی دگر است)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{\sqrt{2}}\right)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}{n!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{1!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^4 + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^5 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^6 - \frac{1}{7!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^7 + \dots \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n \end{aligned}$$

($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ جزء صحیح $\frac{n}{2}$)

مثال ۱۲: یک سری توانی بیابید که تابع $x^2 e^{-x}$ را نمایش دهد سپس با مشتق گیری از آن نشان دهید که

حل: می دانیم که $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ بنابراین $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} x^n = x^2$

بنابراین $x^2 e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ با گرفتن مشتق از طرفین تساوی داریم:

$$2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} x^{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

حال قرار می دهیم $x=2$:

$$x=2 \Rightarrow \underbrace{4e^{-2} - 4e^{-2}}_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} 2^{n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} = 0 \Rightarrow$$

$$4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} 2^{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!} 2^{n+1} = -4$$

جدول اول را جابجایی کنیم

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+2)}{n!} = 4$$

با فاکتوری گیری و ضرب طرفین تساوی

در (-1) به صورت می رسم.

مثال ۱۳) یک سری توانی برای تابع e^{-x^2} بیابید و یادآوری مشتق گیری از آن نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{2^n n!} = 1$$

حل: > می بینیم که $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ بنابراین $\forall x \in \mathbb{R}$ پس $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$

گرفتن مشتق اول از طرفین $\Rightarrow -2x e^{-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{n!} \Rightarrow -x e^{-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(n-1)!}$

با تغییر اندیس $\Rightarrow -e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{(n-1)!} x^{2n-2}$

$$-e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{n!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

حال قرار می دهیم $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ تا به هدف برسیم

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow -e^{-\frac{1}{e}} + e^{-\frac{1}{e}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{2^n n!} \Rightarrow$$

$$-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{2^n n!} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{2^n n!} = 1$$

مثال ۱۴ سری تیلور تابع $y = e^x$ حول $x = a$ را بیابید.
 حل: روش انبساطی (روش اول بکار می گیریم).
 زیرا $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ پس $e^{x-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$.
 $y = e^x = e^{x-a+a} = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$

مثال ۱۵ سری تیلور تابع $y = \ln x$ حول $x = a$ را بیابید که $a > 0$.
 حل: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \xrightarrow[-x \& 1+x]{\text{تغییر}} \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \xrightarrow[\text{اشدال گیری}]{\text{اشدال}} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

$$y = \ln x = \ln(a + (x-a)) = \ln[a(1 + \frac{x-a}{a})] = \ln a + \ln(1 + \frac{x-a}{a}) \Rightarrow$$

$$y = \ln x = \ln a + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\frac{x-a}{a})^{n+1}}{n+1} = \ln a + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-a)^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$$

توجه: به کمک مثال زیر یک سری توانی [سری دو جمله ای] برای $f(x) = (1+x)^K$ که در آن K یک عدد حقیقی است معرفی می کنیم.

مثال ۱۶: اگر K یک عدد حقیقی باشد سری مکلوآن $f(x) = (1+x)^K$ را بیابید و باره همگانی و شعاع همگاری آن را بدست آورید.

حل:

$$f(x) = (1+x)^K \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = K(1+x)^{K-1} \Rightarrow f'(0) = K$$

$$f''(x) = K(K-1)(1+x)^{K-2} \Rightarrow f''(0) = K(K-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = K(K-1)(K-2) \dots (K-n+1) (1+x)^{K-n} \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(0) = K(K-1) \dots (K-n+1)}$$

بنابراین سری مکلوآن $f(x) = (1+x)^K$ به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K(K-1) \dots (K-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{K}{n} x^n$$

برای یافتن شعاع همگاری سری مکلوآن $f(x) = (1+x)^K$ از $\binom{K}{n} = \frac{K(K-1) \dots (K-n+1)}{n!}$ زیرا
 آزمون نسبت کمک می گیریم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{k(k-1) \dots (k-n+1)x^n} \right| \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|k-n|}{n+1} |x| = |x| < 1 \Rightarrow R=1$$

طبق آزمون نسبت اگر $|x| < 1$ سری دو جمله‌ای بطور مطلق همگراست و اگر $|x| > 1$ آنگاه سری دو جمله‌ای واگراست. همگرایی این سری در $x=1$ و $x=-1$ به عدد حقیقی k بستگی دارد. (کتاب استوارت صفحه ۹۶۹ توضیح می‌دهد).

اثبات $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ خیلی طولانی و دشوار است.

تعریف: (سری دو جمله‌ای) اگر k یک عدد حقیقی باشد و $|x| < 1$ آنگاه سری زیر را

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots$$

مثال ۱۷ به کمک سری دو جمله‌ای برای توابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ و $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ و $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $\sin^{-1} x$ و $\cos x$ و $\sinh(x)$ سری توانی بدست آورید.

حل: برای $k = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))}{2^n n!} x^n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))}{2^n n!} x^n \quad (1)$$

$$x \xrightarrow{\text{بجای } x} -x \quad \left| \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n \right. \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} \quad (3)$$

در رابطه (۲) قرار می‌دهیم به جای x مقدار x^2 .

$$\sinh^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n \times n!} x^{2n+1} \quad (۴)$$

با گرفتن اشتدال از فرمول (۳) داریم:

در فرمول (۱) را با x^2 تبدیل می‌کنیم داریم

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)]}{2^n \times n!} x^{2n} \quad (۵)$$

از طرفین رابطه (۵) اشتدال می‌گیریم داریم

$$\sinh^{-1}(u) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)]}{2^n \times n!} x^{2n+1} \quad (۶)$$

می‌دانیم که $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ پس $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ بنابراین

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n \times n!} x^{2n+1} \quad (۷)$$

مثال ۱۱. سری مکلوران تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ بیابید

حل: از سری درجه‌ای فرمول (۲) در مثال قبل کمک می‌گیریم.

طبق فرمول (۲) $\Rightarrow$ در مثال قبل $\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{x}{4}\right)^n$
 طبق فرمول (۲) درجه‌ای

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n \times n!} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^{n+1} \times n!} x^n$$



چند سری توانی (مک لوران) معروفه که در این بخش معرفی کردیم

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$(3) \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(4) \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(5) \sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(6) \cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(7) \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

$$\boxed{\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x}$$

$$(8) \sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{(2n+1) \times 2^n \times n!} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

$$\boxed{\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x}$$

$$(9) \sinh^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)]}{(2n+1) \times 2^n \times n!} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

$$(10) \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < 1$$

$$(11) \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < 1$$

$$(12) (1+x)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1)}{n!} x^n \quad |x| < 1$$

تمرین (سریهای توانی)
 مجموع همداری و بازه همداری سریهای توانی زیر را پیدا کنید

$$۱) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$۲) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$$

$$۳) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n-1)^n}{n^2+1}$$

$$۴) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)^n}{n^n}$$

$$۵) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^n x^n}{2^n}$$

$$۶) \sum_{n=1}^{+\infty} n!(4x-1)^n$$

$$۷) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}$$

$$۸) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}$$

$$۹) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-4)^n}{n^2+1}$$

$$۱۰) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n-2)^n}{(n+2)!}$$

$$۱۱) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

۱۱- نمایش تابعی زیر را به شکل سری توانی پیدا کنید و بازه همداری آن را مشخص کنید

$$\text{الف)} f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{ب)} f(x) = \frac{x^2}{e^x - x^x}$$

$$\text{ج)} f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\text{د)} f(x) = \ln(5-x)$$

۱۲- سری تیلور تابع $y = \sin x$ حول $x = \frac{\pi}{3}$ پیدا کنید.

۱۳- سری مکلاوران تابعی زیر را پیدا کنید.

$$\text{الف)} f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2+x}}$$

$$\text{ب)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$\text{ج)} f(x) = \frac{-1+e^{2x^2}}{x}$$

۱۴- یک سری توانی برای $f(x) = xe^x$ بیابید و سپس با اشتدال گیری از سری حاصل نشان دهید که

۱۵- یک سری توانی برای $y = \ln(1-x)$ بیابید و سپس با اشتدال گیری از سری حاصل نشان دهید که

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1-x)\ln(1-x)$$

۱۶- یک سری توانی برای $y = \ln(1+x)$ بیابید و سپس با اشتدال گیری از سری حاصل نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = 2\ln 2 - 1$$

۱۷- یک سری توانی برای $y = x \tan^{-1} x$ بیابید و سپس با اشتدال گیری از سری حاصل نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} [-x + (x^2+1) \tan^{-1} x]$$