

محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی یا تغییر متغیر در مختصات قطبی می‌دانیم که ارتباط مختصات دکارتی و مختصات قطبی به صورت زیر است

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2)$$

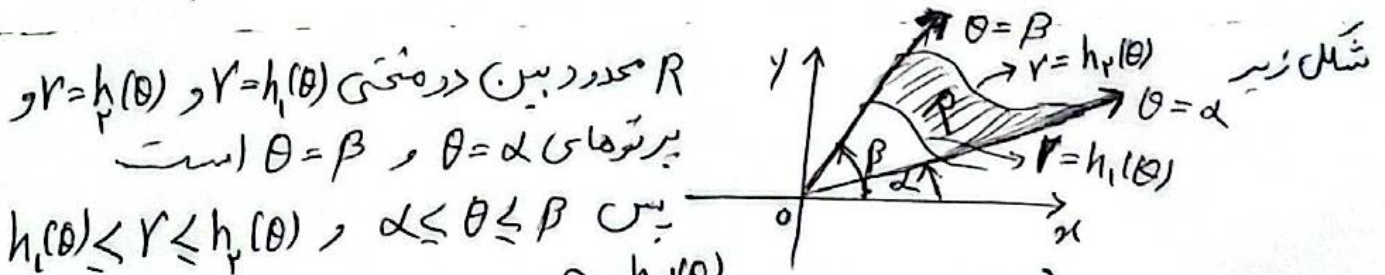
از روابط (1) برای تغییر متغیر انتگرال دوگانه $\iint_R f(x, y) dx dy$ که در آن R یک ناحیه بسته و کراندار در صفحه xy است با این تغییر متغیر ناحیه R به ناحیه R در دستگاه مختصات قطبی منتقل می‌گردد [چون دستگاه دکارتی و دستگاه قطبی برهم منطبق فرض می‌کنیم بنابراین R ثابت باقی می‌ماند]

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

بنابراین:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (*)$$

مبلی نوشتن حدود r از θ [حدود انتگرال دوگانه در مختصات قطبی] به صورت زیر عمل می‌کنیم. ناحیه R در دستگاه مختصات قطبی را بین دو پرتو $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ قرار می‌دهیم [به صورت نمونه‌های زیر] سپس پرتوی را از مبدا به خارج می‌کشیم بطوریکه وارد ناحیه R شود و از آن خارج شود. اولین محل برخورد این پرتو با ناحیه R [محل ورود] حد پایین r است و دومین محل برخورد این پرتو با ناحیه R [محل خروج] حد بالای r است و حدود θ همان α (حد پایین) و β (حد بالا) است.



R محدود بین دو منحنی $r = h_1(\theta)$ و $r = h_2(\theta)$ پرتوهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ است

پس $\alpha \leq \theta \leq \beta$ و $h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (*)$$

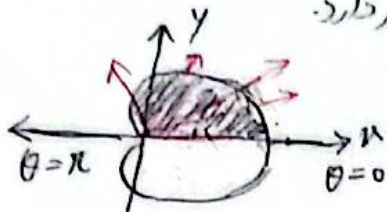
توجه: 1. انتگرال داخلی همواره بر حسب r است یعنی dr بر $d\theta$ مقدم است مگر زمانی که $f(r, \theta) = f_1(\theta) \cdot f_2(r)$ باشد که در این صورت

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f_1(\theta) d\theta \right) \cdot \left(\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f_2(r) r dr \right)$$

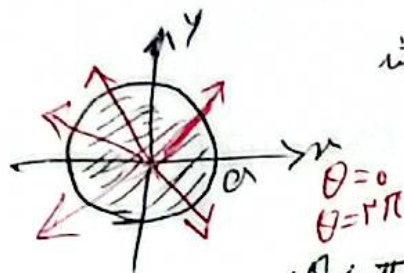
یعنی $r = h_1(\theta) = a$ و $r = h_2(\theta) = b$ است.

به نمونه‌های صفحه بعد توجه کنید.

① ناحیه R درون دایره $r = a(1 + \cos \theta)$ و بالای محور x قرار دارد.
 همپوشانی که از مبدأ خارج کسینوس شروع آن مبدأ قطعات
 [یعنی محل ورود] و انتهای آن $r = a(1 + \cos \theta)$ [محل خروج] است.
 پس: $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta)$



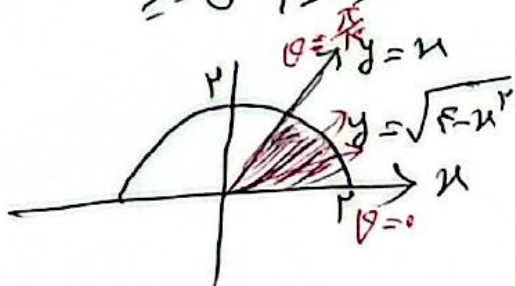
اگر R ناحیه محصوره در دایره (درون دایره) باشد آنگاه $0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta)$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$



② ناحیه درون دایره $x^2 + y^2 = a^2$ [یعنی دایره $r = a$] باشد
 آنگاه $0 \leq r \leq a$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$

اگر R نیم دایره بالای محور x باشد آنگاه $0 \leq r \leq a$ و $0 \leq \theta \leq \pi$

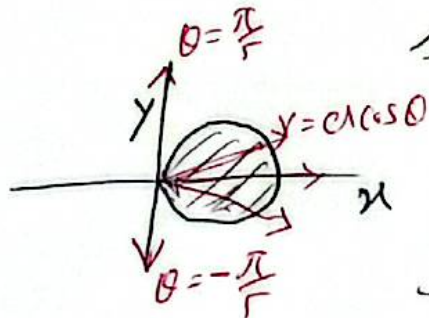
③ اگر R ناحیه محصور بین $y = \sqrt{4-x^2}$ و $y = x$ و محور x در نقطه دیگر به شکل زیر
 آنگاه $0 \leq r \leq 2$ و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



$$y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

نیم دایره چون $y \geq 0$ است.

④ اگر R درون دایره $x^2 + y^2 = 2x$ باشد شکل زیر



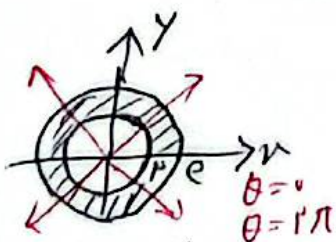
$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 2 \cos \theta$$

$r = 2 \cos \theta$ معادله این دایره در مختصات قطبی است

بنابراین $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ و $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ است

⑤ اگر $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ یعنی R محصور (محصور) بین دو دایره با مراکز مبدأ

شعاعهای $r = 2$ و $r = e$ است (شکل زیر)



$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 &\Rightarrow r = 2 \\ x^2 + y^2 = e^2 &\Rightarrow r = e \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \leq r \leq e$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

⑥ اگر R ناحیه محصور بین خطوط $y = \sqrt{3}x$ و $x = 3$ و محور x باشد (شکل زیر)

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{3} = \theta$$

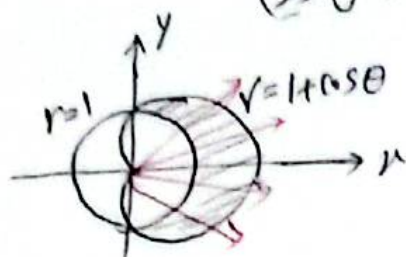
$$x = 3 \Rightarrow r \cos \theta = 3 \Rightarrow r = 3 \sec \theta$$

(ادامه در صفحه ۳)



بنابرین $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ و $0 \leq r \leq 3 \sec \theta$

⑦ اگر R درون دایره $r = 4 \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ باشد (نگاه کنید) طبق شکل



$$1 \leq r \leq 4 \cos \theta$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

مثال ۱) انتگرال $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{dy dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را محاسبه کنید

حل: این انتگرال در مختصات قطبی [یا با تغییر متغیر قطبی] حل می‌کنیم. [برای نمونه ۶]

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{dy dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{3}x} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dx$$

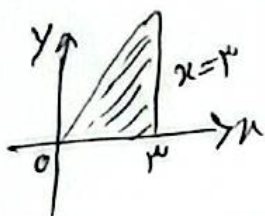
مختصات قطبی

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{3 \sec \theta} \frac{r dr d\theta}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_1^{3 \sec \theta} dr \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [r]_1^{3 \sec \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sec \theta d\theta = 3 [\ln |\sec \theta + \tan \theta|]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3 \ln |2 + \sqrt{3}| - 3 \ln |1 + 0| = 3 \ln (2 + \sqrt{3})$$

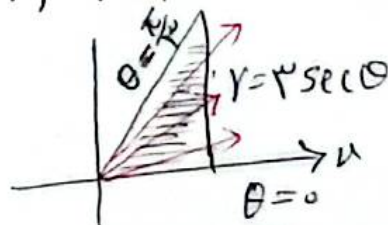
$$0 \leq y \leq \sqrt{3}x$$

$$0 \leq x \leq 3$$



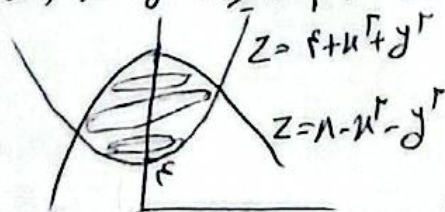
$$x = 3 \Rightarrow r \cos \theta = 3 \Rightarrow r = 3 \sec \theta$$

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



مثال ۲. حجم جسم محصور بین دو رویه $Z = 1 - x^2 - y^2$ و $Z = 4 + x^2 + y^2$ را بیابید. (برای نمونه ۲)

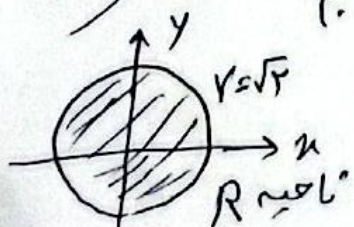
حل: این دو رویه سهمیگون دوار می‌باشند و تصویر (سایه) این جسم دایره $x^2 + y^2 = 2$ است



$$\begin{cases} Z = 4 + x^2 + y^2 \\ Z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 4 + x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = -3 \Rightarrow x^2 + y^2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{حجم جسم} = \iint_R [1 - x^2 - y^2 - 4 - x^2 - y^2] dx dy = \iint_R [-3 - 2(x^2 + y^2)] dx dy$$

این انتگرال در مختصات قطبی حل می‌کنیم.

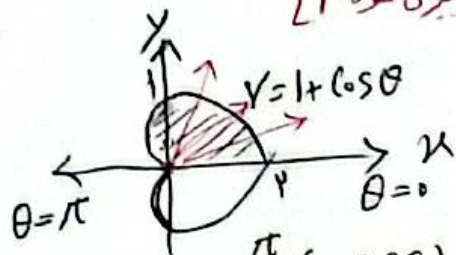


$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

(ادامه در صفحه بعد)

$$\begin{aligned}
 \text{حجم} &= \int \int_R [4 - (x^2 + y^2)] \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [4 - r^2] r \, dr \, d\theta = \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^{\sqrt{2}} [4r - r^3] \, dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi [4 - 1] = 6\pi \text{ واحد مکعب}
 \end{aligned}$$

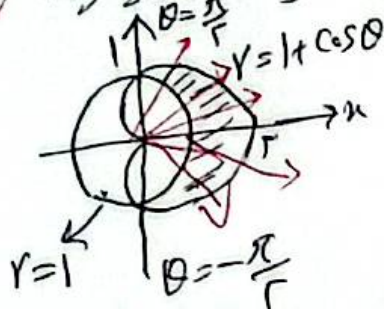
مثال ۳، ورقه نازکی با چگالی حجم $\rho(x, y) = 3$ از پایین به محورهای x و y بالا به دایره $r = 1 + \cos \theta$ محدود است. گشتاور مرتبه اول این ورقه را حول محورهای x و y بیابید. [برای نمونه ۱]



$$M_x = \int \int_R y \rho(x, y) \, dR = \int \int_R 3y \, dR = \text{درجه یکمات قلی}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos \theta} (r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{1+\cos \theta} \sin \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta \, d\theta = \left[-\frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{16}{4} = 4
 \end{aligned}$$

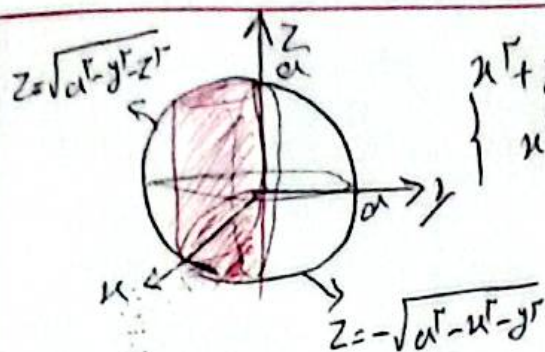
مثال ۴، مساحت ناحیه محصور درون دایره $r = 1 + \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ را بیابید. [نمونه برای]



$$\text{مساحت ناحیه} = \int \int_R dR = \int \int_R r \, dr \, d\theta =$$

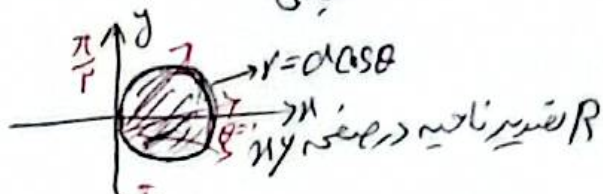
$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_1^{1+\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 - 1] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos^2 \theta + 2\cos \theta] d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 2\cos \theta \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + 2\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin \pi + 2 \right] = \frac{\pi}{4} + 3
 \end{aligned}$$

مثال ۵، حجم ناحیه T که استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ (از $z = 0$ تا $z = h$) را بیابید. [برای نمونه ۴]



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta \Rightarrow r = a \sin \theta \end{cases}$$

در مختصات قطبی



$$I = \iint_R [\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})] dR = 2 \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dR$$

در مختصات قطبی

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \sin \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a \sin \theta} d\theta = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a^3 \sin^3 \theta - a^3 \sin^3 \theta] d\theta \\ &= \frac{2}{3} a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - \sin^2 \theta] d\theta = \frac{2}{3} a^3 \left[\theta + \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3} a^3 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

$$(*) \int r \sqrt{a^2 - r^2} dr = -\frac{1}{r} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{r} \int t^{1/2} dt = -\frac{1}{r} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right] + C = -\frac{1}{r} (a^2 - r^2)^{3/2} + C$$

$$a^2 - r^2 = t \Rightarrow dt = -2r dr$$

$$(**) \int \sin^3 \theta d\theta = \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta + C$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= t \\ dt &= -\sin \theta d\theta \end{aligned}$$

مثال 6: انتگرال دوگانه $\iint_R \ln(x^2 + y^2) dR$ را حل کنید. در آن R ناحیه زیر است

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$$

[برای نمونه 5]

حل: R ناحیه محدود به دایره در طریقه $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = e^2$ است. در مختصات قطبی

$$\iint_R \ln(x^2 + y^2) dR = \int_0^{2\pi} \int_2^e r \ln r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^e 2r \ln r dr =$$

$$= 2\pi \int_2^e r \ln r^2 dr \stackrel{\text{روش جزء به جزء}}{=} 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \ln r^2 - \frac{1}{2} r^2 \right]_2^e = 2\pi \left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} e^2 - 2 \ln 2 + 1 \right]$$

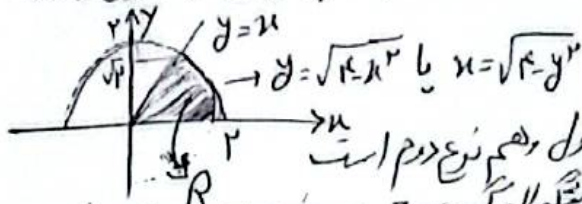
$$\int r \ln r^2 dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r^2 - \frac{1}{2} \int r^2 dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r^2 - \frac{1}{4} r^2 + C$$

روش جزء به جزء

$\ln r^2 = u \quad r^2 dr = dv$
 $du = \frac{2}{r} dr \quad \frac{1}{2} r^2 = v$

مثال ۷: اشتغال دوگانه $\iint_R \ln(x^2+y^2) dx dy$ را حل کنید [برای نمونه ۱۳]
 حل: ناحیه اشتغال گیری را رسم می کنیم پس اشتغال را در مختصات قطبی حل می کنیم

ناحیه R هم نواح اول و دوم ربع دوم است
 در این مثال حدود اشتغال گیری به حسب ربع دوم نوشته شده است (یعنی از چپ با راست).
 ناحیه R هم نواح اول و دوم ربع دوم است
 در این مثال حدود اشتغال گیری به حسب ربع دوم نوشته شده است (یعنی از چپ با راست).



$$\iint_R \ln(x^2+y^2) dx dy \stackrel{\text{در مختصات قطبی}}{=} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r \ln(r^2) dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^2 r \ln r^2 dr =$$

اشغال مجانبی در پایین
 (نوعه) حل شده است

$$= 2 \left[\theta \right]_0^{\pi/2} \left[-1 + 2 \ln r \right] = \frac{\pi}{2} [-1 + 2 \ln 2]$$

توجه: اشتغال $\int r \ln r^2 dr$ یک اشتغال مجانبی است زیرا تابع $\ln r$ در صفر تعریف نشده است و به صورت زیر حل می شود

$$\int r \ln r^2 dr = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^2 r \ln r^2 dr \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} r^2 \ln r^2 - \frac{1}{4} r^2 \right]_h^2 = 2 \ln 2 - 1 - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(h^2 \ln h^2 - \frac{1}{4} h^2 \right) = -1 + 2 \ln 2$$

صفر

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h^2 \ln h^2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln h^2}{\frac{1}{h^2}} \stackrel{H \cdot P}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{h}}{\frac{-2}{h^3}} = - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^2} = 0$$

(*) در مثال ۶ اشتغال $\int r \ln r^2 dr$ به روش
 جزئی و بحر حل شده است



تقسیم

۱- اشتغال دوگانه $\iint_R (4-x^2-y^2) \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ را حل کنید که در آن $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ است

۲- اشتغال دوگانه $\iint_R (x^2+y^2) dx dy$ را حل کنید که در آن $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$ است

۳- اشتغال دوگانه $\iint_R \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ را حل کنید که در آن $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ است

۴- به کمک اشتغال دوگانه حجم کره $x^2+y^2+z^2=4$ را بدست آورید

۵- اشتغال دوگانه $\iint_A \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ را حل کنید که در آن A محدوده دایره $x^2+y^2=3$ است