فصل سوّم

روان‌شناسی یادگیری ریاضی

می‌دانیم که روان‌شناسی دانشی است که بر مطالعه‌ی رفتار و تجربه‌ی انسان متمرکز است و در جستجوی یافتن پاسخ‌هایی علمی برای این قبیل سؤالات است که انسان‌ها

۱- چگونه یاد می‌گیرند؟

۲- چگونه تکالیف خود را انجام می‌دهند؟

۳- چگونه رشد (اعم از جسمی و فکری) می‌کنند؟

روان‌شناسان، یادگیری را تغییر نسبتاً پایدار در رفتار بر اثر تجربه می‌دانند. عدّه‌ی زیادی از روان‌شناسان معاصر نیز که به نقش مهم شناخت پی برده‌اند، یادگیری را چیزی بیش از دخالت پیوند محیط- رفتار می‌دانند (بندورا، ۲۰۰۰ و ۱۹۸۶). ای‌سی، تولمن (۱۹۳۲ به نقل از سانتراک، ۲۰۰۳)، بر هدفمندی رفتار تأکید می‌نمود و معتقد بود که اگر می‌خواهیم بفهمیم چرا مردم اعمال خاصّی را انجام می‌دهند، باید کلّ زنجیره‌های رفتاری را مطالعه کنیم. تولمن تنها روان‌شناس نیمه‌ی اوّل قرن بیستم نبود که می‌گفت عوامل شناختی، نقش مهمّی در یادگیری دارند؛ ولفگانگ یکی از روان‌شناسان گشتالت هم چنین نظری داشت.

روان‌شناسان علاقه‌مند به آموزش ریاضی می‌کوشند تا دریابند چگونه عامل‌های گوناگون بر تفکر و رفتار ریاضی فراگیران مؤثرند و این سؤال که ریاضی‌گونه اندیشیدن به چه معناست، در مرکزیت این مطالعه قرار دارد.

چرا روان‌شناسی در فهم ما از این که مردم چگونه ریاضی را یاد می‌گیرند نقش فراوانی دارد؟ این پرسشی است که پاسخ آن هنوز برای بسیاری مبهم و ناشناخته است و به‌رغم برخی

از تلاش‌ها در به کارگیری ابزار روان‌شناختی در تبیین یادگیری و آموزش علوم از جمله ریاضیات می‌توان مدعی شد که هنوز اندکند کسانی که با نگرش روان‌شناختی در این عرصه تلاش می‌کنند. عبارت روان‌شناسی یادگیری ریاضی نه تنها در میان مردم عادی، بلکه در جمع معلمان و مربیان ریاضی، به ویژه در جامعه ما، عنوان چندان آشنایی نمی‌باشد. به علاوه، آنچه دانشجویان به ویژه در رشته‌های دبیری از مباحث روان شناختی می‌آموزند غالباً همچون مفاهیم کلی و بی ارتباط با سایر شاخه‌های معرفت بشری از جمله علوم تجربی و ریاضیّات برایشان جلوه‌گر می‌شود. از این‌رو، ارتباطی معنادار بین دانسته‌های آنان در روان‌شناسی و تلاش در عرصه فراگیری ریاضی مشاهده نمی‌شود. مثلاً دانشجویان در درس روان‌شناسی تربیتی با نظریه‌های مختلف یادگیری از جمله نظریه‌ی پردازش اطلاعات[1] آشنا می‌شوند در حالی که کمترین اطلاعی از کاربرد این الگو در یادگیری و آموزش ریاضی و تدوین برنامه‌های درسی ندارند و نمی‌دانند الگوی مذکور چگونه می‌تواند رفتار فراگیران را پیش‌بینی کند. فراگیران برای آنان موضوعی ناشناخته به شمار می‌آیند.

چگونه می‌توان با نگرش روان‌شناختی به تجزیه‌وتحلیل مقولاتی چون یادگیری و آموزش ریاضی پرداخت و در شناسایی و رفع مشکلات مهارتی و مفهومی فراگیران کوشید، و یا این‌که بسط ساختارهای مفهومی و ذهنی در انسان چگونه اتفاق می‌افتد؟ و یا توانایی ریاضی که آمیخته‌ای از تجربه و دانش پیشین و توان ذهنی وعقلی فرد است، چگونه قابل تبیین است؟ همگی پرسش‌هایی هستند که در عرصه‌ی روان‌شناسی یادگیری ریاضی مایل به یافتن پاسخ‌هایی مناسب برای آن‌ها هستیم. به علاوه، الگوهای تفکر ریاضی فراگیران چگونه شکل می‌یابد و چطور در موقعیت‌های گوناگون یادگیری و حلّ مسأله‌ی ریاضی یکپارچه و هماهنگ شده و به کار می‌آیند، در این شاخه از دانش بشری قابل کنکاش و تفسیر است. اسکمپ از جمله دانشمندانی است که در سال‌های اخیر از ۱۹۷۰ به بعد پژوهش‌های فراوانی در این مورد انجام داده و کتاب روان‌شناسی یادگیری ریاضی[2] او تا کنون به چند زبان زنده‌ی دنیا ترجمه و چاپ شده است.

در این کتاب، اسکمپ می‌گوید یادگیری و آموزش ریاضی از مقوله‌های روان‌شناختی است و ما پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در ریاضی نخواهیم داشت، مگر این‌که بدانیم ریاضیّات چگونه یاد گرفته می‌شود. هنگامی که یک روان‌شناس فرایند یادگیری و پردازش مقوله‌های

---

1. Information Processing Theory (IPT)
2. The psychology of learning mathematics

نسبتاً دشوار ریاضی را مطالعه می‌کند، می‌کوشد تا دریابد که "افـراد بـه هنگـام انجـام تکـالیف دشواری مانند ریاضیّات چه می‌کنند"، "چـه فعـل و انفعـال‌هـایی رفتـار ریاضـی یـک فـرد را می‌سازند" و "چه عامل‌هایی بر آن مؤثرند"؟

از آن‌جا که کار در ریاضی فعالیتی عقلانی است تا فیزیکـی، بنـابراین هـم روان‌شناسـان و متخصصان آموزش ریاضی و هم معلّمان باید بکوشند تا آنچه را در ذهن و اندیشه‌ی فراگیـران می‌گذرد بشناسند و مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دهند. از این‌رو، رفتار درست یا نادرست ریاضـی از سوی فراگیران مورد توجّه و علاقه‌ی روان‌شناسان و پژوهشگران آموزش ریاضی مـی‌باشـد. چرا و چگونه دانش‌آموز یا دانشجوی ما به استدلالی درست یا نادرست دست یافتـه اسـت؟ و چاره‌ی کـار یـا درمـان آن چیـست؟ در ایـن عرصـه توجّـه بـه سـه عنـصر "کـی"، "کجـا" و "چگونه" دارای اهمیت است.

به قول بارودی[1] (۱۹۸۷)، فهم این‌که "فراگیران چگونه ریاضی را یاد می‌گیرند"، مـی‌توانـد به ما معلّمان ریاضی به شیوه‌های گوناگون یاری دهد. در واقع این فهم درست و واقع‌گرایانه ما را قادر می‌سازد تا با داشتن تصویری شفّاف از چگونگی بروز رفتار ریاضی افراد، تصمیم‌سازی مناسب علمی در اندیشه‌سازی و انتخاب عنوان‌هـای درسـی، تقـدّم و تـأخّر مطالـب و اتّخاذ شیوه‌های آموزشی را داشته باشیم و در رفع مانع‌های یادگیری دانش‌آموزان بکوشیم. به عـلاوه، قادر خواهیم شد تا آگاهانه روش‌هایی را برگزینیم که به درستی می‌توانند میزان پیشرفت رفتار ریاضی شاگردان را در موقعیت‌های مختلف از جمله حل مسأله و امتحـان انـدازه‌گیـری کننـد. بارودی (۱۹۹۷)، تبعات فراوان ناشی از غفلت نحـوه‌ی یـادگیری ریاضـی را در دانـش‌آمـوزان بررسی کرده است. او معتقد است یکی از پیامدهای این امر احتمـالاً دشـواری‌هـای بـی‌دلیلی است که در آموزش ریاضی برای فراگیران به بار خواهد آورد. دانش‌آموزان چه بسا یاد بگیرنـد ریاضی را به گونه‌ای مکانیکی و بـدون بـه‌کـارگیری مـؤثر اندیـشه بیاموزنـد و بـدین ترتیـب مشکلات یادگیری خود را توسعه دهند. این نوع یـادگیری همـان چیـزی اسـت کـه اسکمپ (۱۹۷۶) از آن به عنوان فهم ابزاری یاد می‌کند و معتقد است که این نوع فهم نه تنهـا یـادگیری معنادار مفاهیم و مهارت‌های ریاضی را به همراه نخواهد داشت، بلکه غالباً به صورت مانعی در تولید، تثبیت و تقویت اندیشه‌ی ریاضی درمی‌آید و طبعاً زمینه‌های تقویت نگرش منفی نـسبت به ریاضی را در اذهان دانش‌آموزان فراهم می‌آورد. خواسته یا ناخواسته باورهـای مـا دربـاره‌ی

1. Baroody

این که طبیعت ریاضی چیست و چگونه یاد گرفته می‌شود، در انتخاب شیوه‌های آموزشی و ارزیابی ما تأثیر خواهد داشت. بنابراین، مهم است که باورهای خود را بیازماییم و تجربه کنیم که روش‌های انتخابی ما چگونه می‌توانند هماهنگ با پژوهش‌های انجام شده در این عرصه سازگاری یا ناسازگاری داشته باشند.

بر این نکته تأکید می‌ورزیم که نه ریاضی‌دان و نه روان‌شناس هیچکدام به تنهایی قادر نیستند آنچه در دنیای پیچیده‌ی ذهنی شاگردان می‌گذرد بشناسد، بلکه برای مطالعه در عرصه‌ی روان‌شناسی یادگیری ریاضی، ابتدا باید طبیعت و ساختار دانش ریاضی را شناخت؛ یعنی آن‌گونه که یک ریاضی‌دان به دانش ریاضی می‌نگرد، به آن نگریست و آنگاه سؤالات مربوط به قلمرو روان‌شناختی را مطرح کرد. در واقع، بدون فهمی درست از طبیعت دانش ریاضی امکان طرح روان‌شناسی یادگیری ریاضی، به مثابه‌ی یک دانش کارامد در عرصه‌ی معرفت بشری فراهم نمی‌آید. از این‌رو، می‌توان مدعی شد که روان‌شناسی ریاضی دانشی دوگانه است. از یک سو، دانش ریاضی مطرح است و از سوی دیگر دانش این‌که مردم چگونه فکر و چطور استدلال می‌کنند و چگونه ظرفیت‌های عقلانی خود را به کار می‌بندند، مورد توجه است. در واقع چگونگی ارتباط میان دانش ریاضی و نحوه‌ی تفکر و فرایندهای ذهنی و جنبه‌ی عاطفی انسان این عرصه از دانش بشری را تعریف می‌نماید. از این گذشته، آن‌گونه که یانگ لوریج[1] (۱۹۹٤) معتقد است این نکته نیز اساسی است که مربیان باید نه تنها به این مهم بیاندیشند که دانش‌آموزان چگونه یاد می‌گیرند و چگونه فکر می‌کنند (عامل‌های شناختی)، بلکه باید به عامل‌های هیجانی نیز عنایت کافی داشته باشند.

در کنار رویکرد روان‌شناختی به آموزش و یادگیری ریاضی و اتخاذ سازوکارهای متناسب با این دیدگاه در شناخت و رفع مشکلات دانش‌اندوزان که اجمالاً در این نوشتار مورد بحث قرار گرفت، اسکمپ (۱۹۸٦) رویکرد دومی را تحت عنوان رویکرد منطقی در تبیین و تفسیر رفتار ریاضی افراد مطرح می‌کند. او معتقد است که ریاضی‌دانان و معلمان ریاضی و برنامه‌ریزان آموزشی غالباً با غفلت از رویکرد اول (رویکرد روان‌شناختی) عمدتاً با رویکرد منطقی یادگیری و آموزش ریاضی را مورد مطالعه قرار می‌دهند. این امر از دیدگاه اسکمپ یعنی ارائه و تبیین ریاضیّات صرفاً به مثابه‌ی رشد منطقی، مغالطه‌آمیز می‌باشد و ناشی از اشتباه میان دو رویکرد روان‌شناختی و منطقی در آموزش ریاضی است. به باور اسکمپ رویکرد

1. Young Loverdge

منطقی به محصول نهایی کشف و ابداع ایده‌های ریاضی توجه دارد و از یادگیرنده‌ها می‌خواهد که این یافته‌ها را آن‌گونه که هست یاد بگیرند. این رویکرد در واقع در صدد آموزش فکر (ایده‌های) ریاضی می‌باشد و نه تفکّر ریاضی.

در رویکرد منطقی دستکاری معنادار نمادهای ریاضی و استنتاج‌های منطقی روی صفحه‌ی کاغذ موردنظر است و هدف نهایی آن این است که افراد شکاک را متقاعد سازد.

رویکرد منطقی توانایی ایجاد و تبیین فرایندهایی را که موجب کشف یا ابداع مقولات ریاضی در ذهن و اندیشه‌ی فراگیران می‌شود، ندارد. در حالی که به اعتقاد اسکمپ در رویکرد روان‌شناختی، به دنبال تبیین درست مقوله‌ی فهمیدن هستیم. در این‌جا فرایندهای یادگیری و فعالیت‌های ذهنی، چگونگی پردازش اطلاعات علمی و نحوه‌ی ارتباط آن‌ها با دانش پیشین فرد محور بحث قرار می‌گیرد. در این دیدگاه ما در پی تبیین تفکّر ریاضی و چگونگی ایجاد و بسط و تقویت آن هستیم و تصویرهای ذهنی[1] فرد مورد توجه ما می‌باشد. ما معتقدیم که فراگیر با این تصویرهای ذهنی از مفاهیم و مقولات ریاضی است که آن‌ها را جذب و هضم می‌کند و نه با به خاطر سپردن تعریف‌های منطقی و روابط و فرمول‌های ریاضی! در این‌جا ارتباط و اعتماد متقابل معلم و شاگرد در آموزش و یادگیری ریاضی جنبه‌ی اساسی و حیاتی دارد و معلم باید شاگردان خود همچون آحاد انسانی با ویژگی‌های فردی‌شان مورد توجه قرار دهد نه به صورت موج انسانی و ویژگی‌های همسان و یکنواخت.

تفاوت‌های فردی در آموزش و یادگیری ریاضیّات

از آن‌جایی که تفاوت‌های فردی در عرصه بسیاری از فعالیت‌های بشری از جایگاه بالایی برخوردار، است در دهه‌های اخیر روان‌شناسان به ویژه روان‌شناسان شناختی به این مهم توجه جدی نموده‌اند. نقش تفاوت‌های فردی در یادگیری، مقوله‌ای شناخته شده در روان‌شناسی آموزش است (کرانباخ واسنو، ۱۹۷۷؛ جوناسن و گرابوسکی، ۱۹۹۳) و برخی معتقدند که تفاوت‌های فردی همان فیلترهای یادگیری هستند (به عنوان مثال، جوناسن و گرابوسکی، ۱۹۹۳).

نتیجه‌ی مطالعات پژوهشگران در این مورد طبعاً موجب پدیدار شدن دیدگاه‌های نوینی در عرصه‌ی یادگیری و آموزش علوم از جمله دانش ریاضیّات شده است. توجّه به تفاوت‌های فردی که از نظریه‌ی افتراق در روان‌شناسی برمی‌آید آمیخته با نام ویتکین آمریکایی و

---

1. Concept image

همکارانش می‌باشد. ویتکین و همکارانش به تفاوت‌های فردی فراگیران در قالب مطالعه در سبک‌های شناختی آنان توجه دارند و بر این اعتقادند که توجه معلمان و برنامه‌ریزان درسی به سبک‌های شناختی -یادگیری- افراد که ریشه در تفاوت‌های فردی آنان دارد، موجب تسهیل یادگیری و فرایندهای آموزشی خواهد شد وفراگیران را در انتخاب حرفه و موقعیت‌های مهم شغلی آینده‌شان یاری می‌دهد. به‌علاوه، با پرداختن به نیازهای یادگیرنده‌ها و توجه به تفاوت‌های فردی آنان، به منزله‌ی انسانی با انگیزش‌ها، ترجیح‌ها، قابلیت‌های ذهنی، جسمی و علمی متفاوت و نتایج مترتب بر آن‌ها، روابط میان معلمان و شاگردان را در مقاطع مختلف تحصیلی شکل می‌دهد. نگرش موجی به کلاس درس و غفلت از توجه به تفاوت‌های فردی شاگردان در ابعاد مختلف از سوی معلّمان و برنامه‌ریزان آموزشی، زیان‌های فراوانی را به بار خواهد آورد و بهره‌وری فعالیت‌های تحصیلی شاگردان و آموزشی معلّمان را کاهش می‌دهد. متأسفانه باید اذعان کرد که در عمل، نقش فراگیران در فرایند یادگیری ریاضیّات در حد بسیاری نادیده گرفته شده است. بسیاری از پژوهشگران آموزش ریاضی بر این باورند که فراگیران به مثابه‌ی آحاد انسانی نسبت به آنچه معلّم در کلاس درس می‌دهد و رفتارهایی که از او سر می‌زند واکنش‌های متفاوتی نشان می‌دهند. پیام عمده‌ی این دسته از پژوهشگران که در کتاب حاضر بسیار بر آن تأکید داریم این است که در کلاس ریاضی ما افرادی هستند که مانند ما (معلمان ریاضی) نمی‌اندیشند و یاد نمی‌گیرند و سبک یادگیری آنان با ما متفاوت است. آنچه را ما به عنوان معلم ریاضی، معنادار و مرتبط می‌یابیم چه بسا برای بسیاری از مخاطب‌های‌مان غیرمرتبط و مبهم باشد.

در معرفی یک مفهوم ریاضی، برخی فراگیران روش تحلیلی و نمادین و استنتاج‌های منطقی را می‌پسندند و عده‌ای روش تصویری و شیوه‌های مبتنی بر تفکر تصویری را ترجیح می‌دهند و گروهی هم روش‌های کلامی را انتخاب می‌کنند. پس ارائه شیوه‌هایی مبتنی بر تعادل مناسب میان روش‌های پیش‌گفته به ویژه در ریاضیّات مدرسه‌ای و حتی برخی از دروس دانشگاهی مانند ریاضیّات عمومی می‌تواند پاسخگوی نیازهای متفاوتی باشد که به لحاظ یادگیری و قابلیت‌های گوناگون در یک کلاس درس ریاضی موجودند.

گری والتر[1] (۱۹۶۱) معتقد است تقریباً از هر شش نفر دانش‌آموز، یک نفر از تفکر تصویری خوبی برخوردار است و بقیه توانایی‌های تصویری خود را در یادگیری مفاهیم به کار

1. Gray Walter

نمی‌بندند، مگر این که در وضعیتی قرار گیرند که آنان را به این بخش سوق دهد.

آدامارد[1] (۱۹۴۵) درکتاب روان‌شناسی "ابداع در ریاضیّات" درباره‌ی زندگی و نحوه‌ی کار برخی از ریاضی‌دانان معروف مطالعاتی انجام داده و توجّه خـود را معطـوف بـه تفـاوت‌های بزرگی می‌کند که این ریاضی‌دانان ظرفیّت‌ها و قابلیّت‌های ریاضی گوناگونی را از خـود بـروز داده‌اند.

در هر کلاس ریاضی شرایط محیطی گوناگونی برای یـادگیری و بـه‌کـارگیری شـیوه‌های مختلف آموزشی برای تأمین نیازهای متفاوت دانش‌آموزان ضرورت دارد. بسیاری از مشکلات یادگیری و آموزشی موجود در یک کلاس ریاضی از آن‌جا ناشی می‌شود که معلمان اغلب با توجه به ترجیحات خود و بدون توجه به تفاوت‌های فـردی مخاطبـان تنهـا بـرای دسته‌ای از دانش آموزان آموزش می‌دهند و جمع زیادی را با نیازهای مختلـف‌شـان نادیـده مـی‌انگارند. بنابراین، نظریه‌های قابل قبولی که بتواند به ما معلمان ریاضی در شناسایی تفاوت‌های فـردی و قابلیت‌ها و سبک‌های یادگیری شاگردان یاری دهد از جایگاه ارزشمندی در آموزش ریاضیّات برخوردار خواهد بود. به تجربه در می‌یابیم که برخی از دانش آمـوزان یـک مفهـوم ریاضـی را سریع‌تر می‌آموزند و برخی کندتر، عده‌ای انگیزه‌ی کـافی بـرای کـار ریاضـی دارنـد و عـده‌ی بیشتری فاقد هرگونه انگیزش برای کار و تلاش در عرصه‌ی ریاضیّات هستند و به سودمندی و کارآمدی ریاضیّات در زندگی روزمره با تردید می‌نگرند. کلاس و درس و امتحان ریاضی برای جمعی دلهره‌آور و اضطراب‌زاست، به گونه‌ای که به مانعی جدی در مسیر یـادگیری معنادار و بروز رفتار ریاضی مطلوب آنان مبدل می‌شود. گروهی از شاگردان مـستعدتر بـرای یادگیرهای تصویری و به‌کارگیری تفکر تصویری می‌باشند، در حالی که سایرین بـه روش‌هـای تحلیلی و نمادین علاقه‌مند هستند. به هرحال توانایی‌هـا، اسـتعدادها، سـبک‌هـای یـادگیری، تـرجیح‌ها، انگیزش‌ها، دانش قبلی مؤلفه‌های فرهنگی و خانوادگی و... در افـراد مختلـف متفـاوت است. وجود همین تفاوت‌ها ما را به عنوان معلمان و برنامه‌ریزان ریاضی ملزم می‌سازد که با توسل به شیوه‌های درست علمی و واقع‌گرایانه به مشکلات یاددهی- یادگیری در ریاضیّات بپـردازیم و با شناخت این تفاوت‌ها و واقعیت‌های انسانی ارتباط معقولی را با دانش آمـوزان خـود برقرار سازیم. پس برای نیل به این هدف‌های راهبردی باید از فراگیران، به عنوان آحاد و افراد انسانی، شروع کنیم و در نخستین گام‌ها نگرانی‌ها و بیم‌های آنـان را از کـلاس درس و معلم ریاضی

---

1. Adamard

بشناسیم، زمینه‌ی امنیت آنان را فراهم سازیم و نیازشان را برای محترم بودن درک کنیم. بنابراین، توجه جدی و نخستین به حالت‌های عاطفی و هیجانی دانش آموزان و نیاز آنان برای احساس امنیت از کار ریاضی در بروز رفتار ریاضی مطلوب توسط آنان یک ضرورت اساسی است.

رویکردهای متفاوت روان‌شناختی به یادگیری ریاضی

در یادگیری ریاضی نظریه‌های روان شناختی فراوانی موجود است که دو رویکرد ارتباط زیادی با آن دارند:

الف- رفتارگرایی

ب- شناخت‌گرایی

هر کدام از این دو دیدگاه باورهای متفاوتی از چیستی طبیعت دانش ریاضی؛ چگونگی یاددهی- یادگیری آن، حلّ مسأله و سنجش و ارزش‌یابی ریاضیّات دارند. اکنون به اجمال به این دو دیدگاه خواهیم پرداخت، هر چند که محور بحث‌های ما در درس آموزش ریاضی عمدتاً بر پایه نگرش شناختی استوار می‌باشد.

الف- رفتارگرایی

برای سالیان دراز رفتارگرایی با تسلط بر عرصه روان شناسی، بر روش‌ها و الگوهای آموزشی و تربیتی با شیوه‌های مختلف مؤثر افتاده است. موضوع مهم در مکتب رفتارگرا، بررسی رفتار آشکار موجود زنده از جمله انسان است و پدیده‌های دیگر روان شناختی از جمله ادراک، اندیشه، فرایندها و پردازش‌های ذهنی هنگام یادگیری مورد توجه نیست؛ بلکه تمام این مقولات در عرصه رفتار آشکار فرد مورد مطالعه و کنکاش قرار می‌گیرند. به علاوه، طرفداران این دیدگاه معرفت و شناخت انسان را به فعالیت‌های حسی محدود می‌سازند و شناخت را بازتاب امر خارجی در حواس تلقی می‌کنند. آنان یادگیری با شناخت و تفکر را مبتنی بر جریان شرطی دانند.

رفتارگرایان معتقدند دانش مجموعه‌ای از اطلاعات و مهارت‌هاست که به گونه‌ای انفعالی دریافت شده و توسط یادگیرنده در خلال شکل‌گیری تداعی‌های میان محرک[1] (S) و پاسخ[2] (R) انباشته می‌شود. به عنوان مثال ۱ و S:۱، R:۲ یا پاسخ‌هایی که بچه‌ها در یادگیری

1. Stimulus
2. Response

جدول‌ضرب می‌آموزند. هفت هشت تا :S، R:۵۶. در این دیدگاه یادگیری با شیوه‌ای نسبتاً یکنواخت در دانش آموز رخ می‌دهد و نتیجه‌ی کنترل‌های بیرونی (مانند تنبیه و پاداش) معلمان است. ذهن یادگیرنده همچون ظرفی تهی می‌ماند که توسط جریان یادگیری پر از اطلاعات می‌شود و مطالب درسی از معلم به دانش‌آموز انتقال می‌یابد. در این جریان، دانش آموز منفعلانه تنها اطلاعات را به صورت S - R دریافت می‌کند. تاکید در یک درس ریاضی بر ارائه محتوی و حفظ آن توسط دانش آموزان است تا توجه به چگونگی فرایندهای استدلال توسط آنان.

در این رویکرد یادگیری تکلیف‌های دشوار و پیچیده‌تر با تجزیه به قسمت‌های ساده‌تر صورت می‌گیرد و آموزش ریاضی با توجه به یادگیری سلسله مراتب مفهومی ارائه می‌شود؛ به‌طوری‌که یک مفهوم و مهارت برای دانش‌آموز از مفاهیم و مهارت‌های ساده‌تر به دشوارتر تدریس می‌شود. برنامه‌های آموزشی که ریاضی را به سطوح مختلف تقسیم می‌نماید و برای نیل از یک سطح به سطح دیگر موفقیت در آزمون‌های مهارتی را ضروری می‌سازد، در واقع از این دیدگاه پیروی می‌کند.

هدف‌های رفتاری در آموزش و یادگیری ریاضیّات

هدف‌های رفتاری از دیدگاه رفتارگرایان در عرصه کار ریاضی به رفتارهایی اطلاق می‌شوند که برنامه ریزان و معلمان انتظار دارند که پس از فراگیری یک درس یا مبحث ریاضی توسط شاگردان بروز کند. همین رفتارها هستند که در پایان به عنوان نتیجه کار یک درس ریاضی مورد سنجش قرار می‌گیرند. مثلاً پس از آموزش مفهوم حد انتظار داریم که «دانش آموزان بتوانند حد یک تابع دلخواه مانند f که با ضابطه‌ی $y=f(x)$ ارائه شده است را در نقطه‌ای مانند $x=x_0$ به دست آورند». یا پس از آموزش مبحث تعیین علامت چند جمله‌ای‌های درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ فراگیر قادر باشد با توجه به علامت Δ و در نتیجه تعداد ریشه‌های یک معادله درجه‌ی دوم، آن را تعیین علامت کند. طرفداران تعیین هدف‌های رفتاری عمدتاً بر این تصورند که این هدف‌ها در واقع هدف‌های اساسی آموزش و پرورش هستند و همه‌ی رفتارهای علمی خرد و کلان باید در قالب این هدف‌ها مورد توجه و کنکاش قرار گیرند. در حالی‌که مخالفان دیدگاه رفتارگرایی معتقدند که این مکتب در تبیین رفتار آدمی در عرصه‌ای محدود عمل می‌کند. بنابراین، باید در مطالعه هدف‌های رفتاری در عرصه علوم و در این دیدگاه تأمل و دقت بیشتری معمول شود.

برخی پژوهشگران در انتقاد از طرح هدف‌های رفتاری مواردی را ارائه کرده‌اند که به اختصار برخی از آن‌ها را در عرصه‌ی آموزش و یادگیری ریاضیّات مورد توجه قرار می‌دهیم.

۱- معرفی هدف‌های رفتاری، رفتار علمی دانش‌آموزان را در عرصه‌ای صرفاً قابل مشاهده و اندازه‌گیری محدود می‌سازد و به فرایندهای ذهنی و چگونگی تفکر فرد و پردازش اطلاعات توسط آنان توجهی ندارد. اصولاً رفتار ریاضی هر فرد شامل فعالیت‌های قابل رؤیت و غیرقابل رؤیتی است که چرایی‌های فراوانی در ورای آن وجود دارد. توجه به همین چراها و چگونگی‌های فرایندهای ذهنی وعمل تفکر فرد است که می‌تواند برای معلمان و برنامه‌ریزان درسی الهام‌بخش و رهگشا باشد. این‌که دانش‌آموزی بتواند فقط با کمک برخی از قاعده‌ها و فرمول‌ها معادله‌ی درجه‌ی دومی را حل کند یا مشتق و انتگرال تابعی را به دست آورد (هدف رفتاری) بر این امر دلالت ندارد که او مفهوم مشتق‌پذیری و انتگرال‌گیری را با برخی ریزه‌کاری‌ها و ظرافت‌های ریاضی درک کرده است و می‌تواند آن‌ها در موقعیت‌های مختلف کار ریاضی به درستی به‌کار گیرد. بسیارند شاگردانی که مثلاً با استفاده از تعریف حد نمی‌توانند حد یک تابع را به دست آورند؛ در حالی که با روش‌هایی مانند قاعده‌ی هوپیتال که معنا و کاربرد آن را به درستی نمی‌دانند چنین کاری را انجام می‌دهند.

۲- آنچه دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف آموزشی، یادگیری و حل مسأله از خود بروز می‌دهند مبتنی بر تصویرهای ذهنی و فعل و انفعال‌های عقلانی آنان است. در این میان ابهام‌ها و پنداشت‌های غلط مفهومی در ذهن هوشمند فراگیران و تلاش برای شفاف نمودن آن‌ها از جایگاه بالایی برخوردار است.

برخورد سطحی معلمان با این ابهام‌ها و پنداشت‌های غلط ذهنی و عدم کنکاش برای جستجوی ریشه‌های این نادرستی‌ها و عدم تصحیح آن‌ها می‌تواند به شدت برای یادگیری معنادار مفاهیم ریاضی زیان‌آور باشد. اصولاً حفظ یک قاعده و یا فرمول و حل مسأله توسط شاگرد بیانگر یادگیری معنادار و فراگیر آن نیست؛ هر چند که ارزیابی محفوظات آنان به مراتب آسان‌تر از ارزیابی انتقادی و فهم درست مطالب می‌باشد.

۳- هدف‌های رفتاری دانش آموزان را به همسان شدن سوق می‌دهند و از رشد توانایی خلاق و ایجاد تفکر نقاد در آنان می‌کاهد. تدوین هدف‌های رفتاری بر حسب مواد کاملاً معین مانع ارزیابی و قضاوت‌های منصفانه شاگرد و معلم می‌شود و جایی برای بروز نوآوری‌ها و ابتکارهای علمی در هر سطحی را باقی نمی‌گذارد.

۴- بیش از حد جزیی کردن هدف‌های رفتاری و انتظارت کلیشه‌ای از دانش آموزان موجب شرطی شدن یادگیری آنان در یک فعالیّت ریاضی می‌شود که در این فرایند شرطی، مجاورت، تکرار و روابط حاصل از آن‌ها پایه یادگیری را تشکیل می‌دهد. در واقع، فراگیر مطالب کتاب و کلاس درسی را می‌پذیرد و به ذهن خود می‌سپارد. این تکرار و تمرین است که موجب حفظ مطالب درسی می‌شود و شاگرد در موقعیت امتحان و ارزیابی تنها سپرده‌های خود را ارائه می‌دهد. نتیجه این نوع آموزش و یادگیری چیزی جز برخورد حافظه‌ای و یادگیری طوطی وار در ریاضیّات و شرطی شدن افراد نسبت به فرمول‌ها و قاعده‌ها نیست.

ب- شناخت‌گرایی

بر خلاف رفتارگرایان، شناخت‌گرایان رفتار آشکار یادگیرنده (فرد) را موضوع اصلی روان‌شناسی نمی‌دانند، بلکه به فرایند و پردازش‌های ذهنی او که رفتارها از آن‌جا ناشی می‌شود توجه خاصی دارند. در سال‌های اخیر شناخت گرایی جایگاه ویژه‌ای در عرصه فعالیت‌های روان‌شناختی پیدا کرده است و در باب آموزش و یادگیری ریاضیّات نیز با طرح نظریه‌های کارکردی به نتایج و توصیه‌های شفافی دست یافته است.

به‌طور کلی هدف‌های آموزش ریاضیّات را می‌توان در سه مقوله‌ی عمده دسته‌بندی کرد که عبارتند از:

۱- هدف‌های شناختی[1]؛

۲- هدف‌های عاطفی[2]؛

۳- هدف‌های مهارتی و یا مهارت‌های ریاضی.

۱- هدف‌های شناختی

این هدف‌ها در واقع مرتبط با معرفت شناختی و دانش نظری ریاضیّات می‌باشند و با ادراک فراگیران از محتوا و مطالب درس‌های ریاضی آمیخته هستند. مفاهیم و اصطلاحات و قراردادهای ریاضی، ساختمان‌ها و طبقه‌بندی‌های موجود در ریاضیّات، دانش روش‌ها و معیارها، مفاهیم و اصول و قواعد قابل تعمیم، شناخت و به کارگیری روش‌های مختلف حل مسأله، درک ارتباط‌های درون ساختاری مفاهیم و مهارت‌های ریاضی در حیطه‌ی هدف‌های

1. Cognitive aims
2. Affective aims

ریاضی قرار می‌گیرند.

۲- هدف‌های عاطفی

همه‌ی رفتارهایی که به نوعی با هیجان، احساس علاقه، نگرش‌ها و باورها، ترجیح‌ها و ارزش‌ها مرتبط می‌شوند در این عرصه می‌گنجند. اعتماد به نفس در کار ریاضی، وجود یا نبودن اضطراب ریاضی، تصمیم‌سازی و تصمیم‌گیری به هنگام حل مسائل ریاضی نمونه‌هایی از جنبه‌های عاطفی در کار ریاضی محسوب می‌شوند.

اثربخشی جنبه‌های عاطفی و احساسی در آموزش و یادگیری ریاضیّات مقوله‌ای جدی و انکارناپذیری است که امروزه مورد توجه بسیاری از متخصصان آموزش ریاضی و روان‌شناسان قرار گرفته و پژوهش‌هایی را نیز در بعد عاطفی یاددهی- یادگیری ریاضیّات به خود اختصاص داده است.

عوامل عاطفی هیجانی، وحشت زدگی و یا لذت از ریاضیّات، نگرش مثبت و یا منفی به دانش ریاضی، باورهای فرد درباره قابلیت و توانایی یادگیری ریاضیّات، امنیت در کلاس ریاضی و به‌طور کلی آنچه اصطلاحاً در حیطه عاطفی قرار می‌گیرد در ادامه‌ی این کتاب مجدداً مورد توجه و بررسی قرار خواهند گرفت.

۳- هدف‌های مهارتی یا مهارت‌های ریاضی

هدف‌های مهارتی در واقع مهارت‌هایی هستند که از آموزش ریاضیّات حاصل می‌شوند و فراگیران آن‌ها را عمدتاً در موقعیت‌های مختلف یادگیری و حل مسأله به کار می‌گیرند. مهارت‌هایی که فراگیر برای حل مسأله و تکلیف‌های ریاضی به‌دست می‌آورد، تسلطی که در استفاده از فرمول‌ها، قاعده‌ها و قضیه‌های ریاضی پیدا می‌کند، دانش اجرایی یا روندی او را تشکیل می‌دهد. گاه برخی از شاگردان در استفاده از روابط جبری به گونه‌ای خودکار عمل می‌کنند؛ در حالی بعضی دیگر در انجام چنین عملیاتی با دشواری‌هایی روبه‌رو هستند. پژوهشگران معمولاً مهارت‌های ریاضی را به انواع مختلفی تقسیم می‌کنند که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

الف- مهارت‌های ذهنی و پردازشی

این مهارت عمدتاً به قابلیت‌های تفکّر و تجسم (تصویرسازی ذهنی) فراگیر اطلاق می‌شود. تفکر ریاضی و تصویرسازی ذهنی مفاهیم، خمیرمایه‌ی فعالیت‌های ریاضی به‌ویژه در

عرصه‌های انتزاعی‌تر می‌باشد. فعال‌سازی ذهن و چگونگی پردازش مطالب در موقعیت‌های یادگیری و حل مسأله، مهارت‌های ذهنی فراگیر را به‌وجود می‌آورد. در واقع، هر فراگیری در برخورد با یک تعریف و یا یک مفهوم ریاضی تصویر ذهنی منحصر به فردی را در ذهن و اندیشه‌ی خود ضبط و پردازش می‌کند که می‌تواند با تصویر ذهنی دیگران از مفهوم موردنظر متفاوت باشد و یا ممکن است یک موجود ریاضی را در ذهن خویش تولید و پردازش کند.

ب- مهارت‌های عملکردی و اجرایی

توانایی تبدیل مهارت‌ها و پردازش‌های ذهنی به عمل رفتار ریاضی را مهارت‌های عملکردی یا اجرایی فراگیر گویند. انجام عملیات جبری، محاسبه حدها، مشتق‌ها، انتگرال‌ها، به‌کارگیری فرمول‌ها و قاعده‌ها، استفاده از استراتژی‌های کلاسیک و خودساخته در شمار این مهارت‌ها هستند.

ج- مهارت‌های فرایندی

مهارت‌های فرایندی بر دانستن چگونگی انجام دادن فعالیت‌های شناختی به‌ویژه در موقعیت‌های حل مسأله ناظر است. ارتباط دانش یا مهارت جدید فرد با دانسته‌ها و تجربه‌های پیشین و چگونگی تبدیل مهارت‌های ذهنی به مهارت‌های عملکردی در نتیجه‌ی اعمال مهارت‌های فرایندی صورت می‌پذیرد. به‌عنوان نمونه، توانایی رسم جدول و نمودار یک منحنی با استفاده از ضابطه‌ی تابع، یک مهارت فرایندی است. حرکت و انتقال از محسوس به مجرد و برعکس یک مهارت فرایندی است؛ مثلاً شاگردان در حل مسائل کلامی دوران مدرسه ناگزیر به انجام چنین حرکتی میان مفاهیم محسوس و مجرد هستند که غالباً در آن با مشکل مواجه‌اند.

به مسأله‌ی زیر توجه کنید. در این قبیل مسائل (کلامی)، فرایند تبدیل مفاهیم محسوس ‌به مجرد مورد توجه است که معمولاً شاگردان در حل آن‌ها دچار مشکل می‌باشند.

«قطعه زمین چمن بزرگی داریم که احمد می‌تواند چمن‌های آن را در ۱۲ ساعت کوتاه کند. علی هم به تنهایی قادر است همین چمن‌ها را در ۸ ساعت کوتاه کند. اگر هر دو نفر با هم کار کنند، در چه مدت می‌توانند چمن‌های زمین را کوتاه کنند؟»

پاسخ فوری شاگردان به این مسأله استفاده از میانگین ساده است؛ یعنی $\frac{۱۲+۸}{۲}=۱۰$. به عبارت دیگر، اگر دو نفر با هم کار کنند در مدّت ۱۰ ساعت کار چمن‌زنی تمام می‌شود!

[illegible] است؟ نظر شما چیست؟

[illegible]

جمع‌بندی

[illegible] دانش و مهارت‌های اجرایی در موقعیت‌های شناخته شده و ناشناخته [illegible] می‌باشد. از جمله فرمول و یا قضیه و یا تعریفی و در کجا و [illegible] مسئله [illegible] نیاز دارند [illegible] ریاضی به هنگام استفاده و تشخیص موقعیت و تصمیم‌گیری [illegible] قادر هستند و [illegible] به پاسخ پرسش و یا مسائل مورد نظر دست پیدا کنند.

[illegible] آموزش ریاضیات

[illegible] دیدگاه‌های مختلف روان‌شناسان شناختی الگوهای یادگیری متفاوتی وجود دارند [illegible] مشترک که یادگیرنده در موقعیت‌های مختلف آموزشی، یادگیری و حل [illegible] قرار دارند. در این میان می‌توان به نظریه‌هایی [illegible] که در حوزه‌ی کار ریاضی بسیار مهم قلمداد می‌شوند:

- مراحل رشد عقلانی پیاژه؛
- نظریه ساختن‌گرایی اجتماعی[1] ویگوتسکی؛
- نظریه [illegible] پیشین، آزوبل برای یادگیری معنادار؛
- [illegible] ناشی از محدودیت فضای حافظه‌ی فعال[2] فرد و الگوی پردازش اطلاعات؛
- الگوهایی که در حوزه‌ی یادگیری و آموزش علوم تجربی (ریاضی) بر مبنای الگوی پردازش اطلاعات (IPT) ارائه شده است که دربردارنده‌ی برخی از ویژگی‌های الگوهای دیگر هستند؛
- نظریه درک ابزاری[3] و درک رابطه‌ای[4] و طرحواره‌های اسکمپ؛
- نظریه ساختن‌گرایی[5] در آموزش ریاضیات.

---

1. social constructivism
2. working memory
3. instrumental
4. relational understanding
5. constructivism

☜ تمرین: درباره‌ی نظریات فوق در حوزه‌ی آموزش ریاضیّات مطالعه و تحقیق نمایید.

نگرش شناخت‌گرا بر این باور است که دانش ریاضی توسط یادگیرنده ساخته می‌شود، یعنی دانش‌آموز بر روی داده‌های دریافتی عمل می‌کند و با فرایندهای ذهنی به آن داده‌ها سازمان و نظم می‌بخشد و به این ترتیب معانی مفاهیم ساخته می‌شوند. از این رو، دانش‌آموز در جریان یادگیری ریاضی فعال است (نه منفعل) و در آموزش مشارکت دارد. البته توانایی‌های ذهنی‌ای که موجب ساختن دانش ریاضی است، از هر مرحله‌ای به مرحله‌ی دیگر تغییری کیفی و کمی می‌یابند و یادگیری تحت تأثیر این توانایی‌ها قرار می‌گیرد. نگرش شناختی با تأکید بر ساختن فعال دانش توسط دانش‌آموزان طبعاً معانی دیگری از آموزش و یادگیری به همراه خواهد داشت و در نتیجه کاربردهای متفاوتی را برای معلّمان و برنامه‌ریزان درسی دربردارد.

شناخت‌گرایان برخلاف دیدگاه رفتارگرایی بر این اعتقادند که یادگیری فرایندی است که به کمک آن اطلاعات جدید با دانش موجود فرد مرتبط می‌شود و در نتیجه دانش قبلی دانش‌آموز تغییر می‌کند و بصیرت لازم را در موقعیّت‌های مختلف کسب می‌کند. از این رو، ریاضیّات غیررسمی دوران کودکی فراگیران، پایه‌ای برای بنا نهادن ریاضیّات مدرسه‌ای شناخته می‌شوند. بارودی (۱۹۸۷) معتقد است سن فراگیران هر چه باشد، آموزش باید با توجه به میزان فهم و توان یادگیری فرد صورت پذیرد.

در این نوشتار دیدگاه‌های مختلف شناختی را در قالب الگوهای یادگیری مربوط در عرصه‌ی تعلیم و تربیت ریاضیّات مورد بحث قرار خواهیم داد. به هر حال هر یک از دو رویکرد پیش‌گفته می‌توانند در درک بیشتر ما از چگونگی یادگیری ریاضی در افراد مؤثر باشند. دیدگاه رفتارگرایی می‌تواند شکل‌های ساده‌تر یادگیری مانند به خاطر سپردن واقعیت‌های اعداد و عملیات روی آن‌ها را تبیین کند و مفاهیمی مانند تقویت، تقلید، الگوسازی و الگوریتم را که نه تنها در یادگیری ریاضی، بلکه در سایر موقعیت‌های یادگیری نیز دارای اهمیت هستند، به ما ارائه دهد. در عین حال به قول بارودی (۱۹۸۷) این دیدگاه شناختی است که قادر است شکل‌های پیچیده‌ی یادگیری و تفکر را مانند آنچه در وضعیت‌های مختلف حل مسأله اتفاق می‌افتد، تبیین کند.

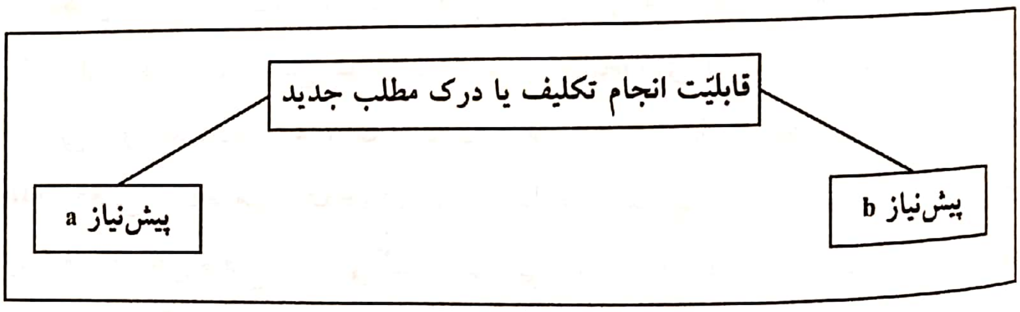
اکنون به بحث مهم آمادگی برای یادگیری ریاضی، به ویژه ریاضیّات مدرسه‌ای، در چارچوب دیدگاه رفتارگرا و شناخت‌گرا می‌پردازیم.

آمادگی برای یادگیری ریاضی

با توجه به تفاوت‌های موجود در نگرش رفتارگرا و شناخت‌گرا که به کوتاهی به ارائه‌ی دیدگاه‌های آنان پرداختیم، طبعاً مقوله‌ی آمادگی و آمادگی برای یادگیری ریاضیّات نیز برداشت‌های متفاوتی را در این دو نظریه خواهد داشت.

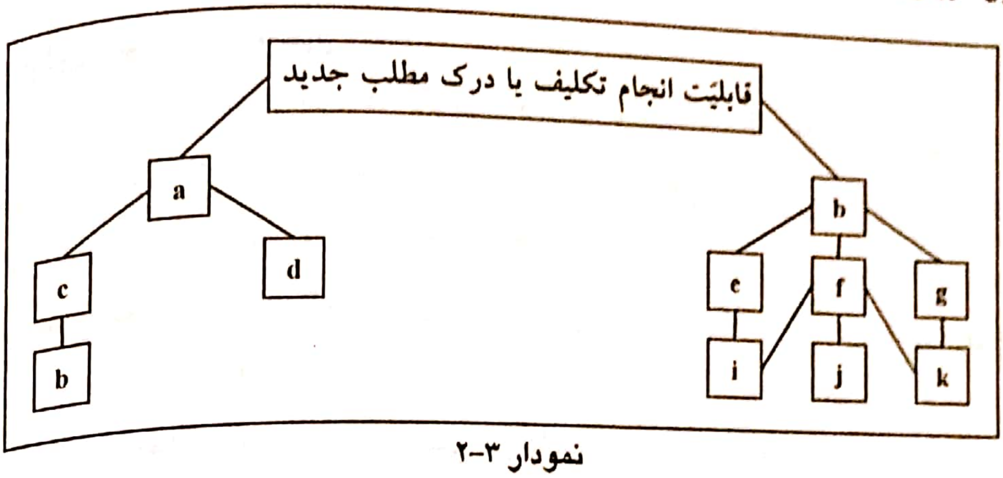
ضرب‌المثل معروفی است که شما می‌توانید اسبی را وارد رودخانه کنید، ولی نمی‌توانید آن را وادار به آب خوردن کنید. در عرصه‌ی کار ریاضی نیز ایجاد آمادگی‌های گوناگون در جذب و هضم روان‌تر ایده‌ها و مهارت‌های ریاضی در دانش‌آموزان بسیار واجد اهمیت است. هنگامی که بچه‌ها معنای جمع و تفریق عددهای طبیعی را یادگرفته‌اند و مهارت‌های لازم را نیز برای به‌کارگیری این دو عمل آموخته‌اند، معلمان به گونه‌ای طبیعی متوجه عمل ضرب می‌شوند. آیا هیچ دلیلی وجود دارد که باید بی‌درنگ به آموزش عمل ضرب بپردازیم؟ آیا بچه‌ها برای یادگیری مفهوم ضرب و پس از آن تقسیم آماده‌اند؟ وقتی دانش‌آموزان اعداد طبیعی و عملیات استاندارد روی آن‌ها را یاد گرفتند، چرا نباید بلافاصله به معرفی اعداد منفی و در نتیجه اعداد صحیح نسبی (Z) و عملیات روی آن‌ها بپردازیم؟ آیا به چیز بیشتری از آمادگی برای یادگیری مفاهیم جدید ریاضی غیر از تسلط بر ریاضیّاتی که باید مطالب نو بر آن‌ها استوار باشد، نیاز داریم؟

گانیه در دیدگاه رفتارگرایی، آمادگی در یادگیری را به وجود مهارت‌های عقلانی وابسته می‌داند. بدین معنا که قابلیت انجام یک تکلیف یا درک یک مطلب جدید بر طبق نمودار ۳-۱ نیازمند داشتن مهارت‌های پیش‌نیاز a و b است و a و b نیز به نوبه‌ی خود مهارت دیگری را می‌طلبد که در نمودار ۳-۲ مشخص شده است.



نمودار ۳-۱

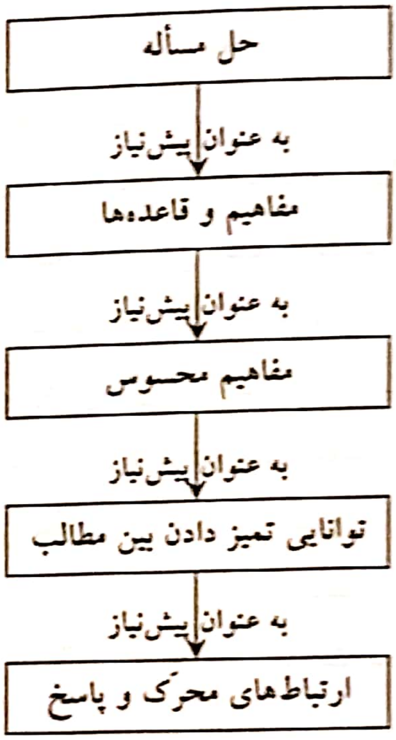
اکثر پژوهش‌هایی که گانیه و همکارانش انجام داده‌اند بر این پایه استوار می‌باشد که فرض وجود مهارت‌های پیش‌نیاز در دانش‌آموز شرط لازم و کافی برای داشتن قابلیت انجام یک



نمودار ۳-۲

تکلیف یا درک یک مطلب جدید است. اما نکته‌ی مهم این است که اگر دانش‌آموزان پیش‌نیازهای a و b را دارا باشند، آیا همیشه می‌توان قابلیت نهایی را به آنان آموزش داد؟ آیا چنانچه دانش‌آموزان فاقد پیش‌نیازهای a و b و یا هر دو باشند، باز هم می‌توان قابلیت نهایی انجام یک تکلیف را به آنان آموزش داد؟ برعکس، چنانچه دانش‌آموزان توانایی انجام یک تکلیف و یا قابلیت درک یک مطلب را کسب کرده باشند، آیا به این معناست که آنان لزوماً دارای پیش‌نیازهای a و b می‌باشند؟ گانیه آمادگی (از جمله آمادگی ریاضی) را بر اساس یادگیری سلسله‌مراتبی تعریف می‌کند و معتقد است که در صورتی دانش‌آموز آمادگی یادگیری یک قابلیت ویژه را در یک سلسله‌مراتب (مهارتی- مفهومی) دارد که بر همه‌ی قابلیت‌های پیش‌نیاز مسلط باشد و این آمادگی صرفاً وابسته به این مهارت‌های پیش‌نیاز می‌باشد. نمودار ۳-۳ بیانگر دیدگاه گانیه در این مورد است. در نمودار اخیر حل یک مسأله یا تکلیف نیازمند پیش‌نیازهایی است که بدون تحقق آن‌ها امکان دستیابی دانش‌آموز به آن فراهم نمی‌آید. به باور گانیه نمونه‌های زیادی از سلسله‌مراتب خطی یادگیری را در ریاضیّات می‌توان با این نوع نمودار ۳-۳ ارائه داد. پایین‌ترین سطح این الگو که ارتباط‌های محرک و پاسخ را نشان می‌دهد، شامل آشنایی‌ها و عملیات اولیه با اعداد است. مثلاً آشنایی با نام عددها، ترتیب آنها، عملیات روی اعداد، دانش ارتباط میان اعداد، آشنایی با نمادها شامل پارامترها (a، b، c و...) و متغیرها (x، y و...) و... در این سطح قرار می‌گیرند. توانایی تمیز میان مقولات و اشکال ریاضی نیز گام بعدی است. با بهره‌گیری از تجربه‌های زندگی روزمره و جهان محسوس، به عنوان مثال تمیز در شکل چندضلعی منتظم و مثلث قائم‌الزاویه قابل فهم است. در عین حال بسیاری از مفاهیم ریاضی، ما به ازای محسوسی ندارند، به ویژه هنگامی که در ریاضیّات پیشرفته‌تر کار می‌کنیم. به هر حال، توانایی تشخیص بین مفاهیم و مقولات در عرصه‌ی کار ریاضی نیز مانند سایر

علاوه مهم است. از اولین روزهای آشنایی با اعداد که تفاوت میان ۵ سیب و ۷ سیب مطرح می‌شود تا فرق میان ضرب و تقسیم و مفاهیم پیشرفته‌تر، همه و همه می‌توانند برای دانش‌آموزان مشکل‌آفرین باشند. ریاضیات سرشار از تفاوت‌ها و شباهت‌های ظریف و دقیق میان مفاهیم و نمادها است. به عنوان مثال، فرق میان Dx، dx، Δx با δ و ε در حدگیری و ده‌ها موضوع‌های دیگر که موجب پنداشت‌های غلط یادگیری در فراگیران می‌شوند.



نمودار ۳-۳

در مقابل نظریه‌ی آمادگی رفتارگرا، نظریه‌ی آمادگی شناخت‌گرا نیز مطرح است. نگرش‌های رشدی بیانگر این نکته است که یک دانش‌آموز فقط زمانی برای یادگیری آماده است که کیفیت مهارت‌های تفکر و پردازش ذهنی او هماهنگ با خواسته‌ها و گام‌های فکری[1] تکلیف با مسأله‌ی موردنظر باشد. به علاوه، چنین تفکر و پردازشی تا حدود زیادی نه تنها به رشد عقلانی و پرسش فراگیران وابسته است، بلکه به عامل‌های محیطی مانند مدرسه، نوع آموزش، زمینه‌های خانوادگی جامعه و فرهنگ کلی آن بستگی دارد. هر چند که پرسش عامل مهمی است، مهارت‌های موردنیاز تنها در خلال رشد و تحول به دست نمی‌آید، بلکه تعامل میان پرسش فراگیر و جنبه‌های محیطی، رشد مطلوب وی را ممکن می‌سازد. دیدگاه‌های رشد

1. Z- demands

عقلانی در خلال انتشار کارهای پیاژه[1] و همکارانش در ژنو از برجستگی خاصی برخوردار شد و دیگران کار او را تعدیل و اصلاح کرده‌اند.

این اندیشه‌ی پیاژه که فراگیر نیازمند داشتن توانایی‌های منطقی (مانند نگهداری ذهنی، دسته‌بندی و ردیف کردن) است، قبل از این‌که به یادگیری اعداد بپردازد، تأثیر زیادی بر برنامه‌های درسی ریاضی در سال‌های اولیه داشته است (برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به دیدگاه‌های پیاژه در کتاب‌های معتبر روان‌شناسی مراجعه کنید).

برخی معلمان معتقدند ایده‌ی آمادگی بدین معناست که آنان باید از انجام فعالیت‌هایی که کودکان در آن سن قادر به فهم کامل آن نمی‌باشند، بپرهیزند و اگر هنوز رشد به سطح مطلوب نرسیده است کار چندانی برای شاگردان نمی‌توان انجام داد، بلکه باید منتظر ماند (رزنیک و فورد[2]، ۱۹۸۳). گاه معلمان ناامیدند که به معرفی جمع و تفریق اعداد و یا زبان نمادین ریاضی بپردازند، مگر این‌که دانش‌آموزان فهم لازم و پیش‌نیاز مناسب را کسب کرده باشند. البته لازم به ذکر است که برخی از یافته‌های پژوهش‌های اخیر بر این دلالت دارد که پیاژه، توانایی‌های ذهنی کودکان را کمتر از آنچه هست برآورد کرده است (مانند یانگ، لوریج، ۱۹۸۷). هرچند ممکن است نظریه‌ی پیاژه را نوعی نظریه‌ی آمادگی دانست، امّا آمادگی مهم‌ترین موضوعی نیست که پیاژه در خلال نوشته های خود به آن پرداخته باشد.

روان‌شناسان معتقدند (شعارنژاد، ۱۳٦٦) که در شناخت دانش‌آموز آنچه برای معلمان اهمیت داردشناخت‌وضع‌ومیزان «آمادگی» اواست،یعنی کشف پاسخ‌هایی برای پرسش‌های زیر:

۱- آیا دانش‌آموز رشدونمو بدنی لازم را کرده است؟ (آمادگی بدنی)

۲- آیا می‌تواند موضوع درس را بفهمد یعنی رشد فکری لازم را دارد؟ (آمادگی ذهنی)

۳- آیا از آرامش و امنیت خاطر برخوردار است؟ (آمادگی ذهنی)

٤- آیا دانش‌آموز از سلامت بدنی و روانی برخوردار است؟

۵- آیا مقدمات و یا تجربه‌های لازم برای یادگیری موضوع تازه را قبلاً آموخته است؟ (آمادگی تجربی)

تعریف آمادگی

آمادگی ریاضی، شناخت واقع‌گرایانه از وضعیتی است که در آن برای فراگیر، یادگیری

1. Piaget
2. Resnick & Ford

معنادار و لذت‌بخش (بارغبت) اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر، منظور از آمادگی در ریاضی این است که فراگیر بتواند از ظرفیت‌های ذهنی و ساختارهای مفهومی خود و رشد عقلانی‌اش در بروز رفتار ریاضی مطلوب، به ویژه در موقعیت‌های جدید آموزشی و حل مسأله بهره جوید. بنابراین، توجه به سه عنصر "چه چیز"، "چگونه" و "چه وقت" از سوی معلمان و برنامه‌ریزان ریاضی در آموزش دارای اهمیت جدی است. به نظر می‌رسد معلم ریاضی نباید منتظر بماند که دانش‌آموز به سن خاصی برای یادگیری مفاهیم و مهارت‌های ریاضی برسد، بلکه خود باید با اتخاذ راهبردهای آموزشی مناسب و شیوه‌های علمی مطلوب و بهره‌جویی از تجربه به پیدایش آمادگی لازم در فراگیر کمک کند.

این سخن عده‌ای از روان‌شناسان که اگر آموزش با انتخاب شیوه‌ها و راهبردهای متناسب همراه باشد، یعنی زبان علمی و تکنیکی منطبق با ظرفیت‌ها و قابلیت‌های فراگیران انتخاب شود، هر چیزی را می‌توان به هر سن و سالی آموزش داد، سخنی گزاف به نظر نمی‌آید!

شیوه‌های آموزش مفاهیم و مهارت‌های ریاضی چنانچه متناسب با آمادگی‌های ذهنی و مفهومی دانش‌آموزان نباشد و زبان علمی سازگار با این وضعیت‌ها انتخاب نشود، طبعاً موجب ایجاد بدفهمی و یادگیری‌های حافظه‌ای و غیرمعنادار در آنان خواهد شد. پس به‌جای گله از ضعف و ناتوانی بچه‌ها در یادگیری ریاضی و بروز رفتار ریاضی مطلوب، اندکی هم به شیوه‌های آموزشی و ارائه‌ی مطالب ریاضی توسط معلمان و برنامه‌ریزان بیندیشیم: آیا این شیوه‌هایی که گاه بدون توجه به ظرفیت‌های فراگیران و نامرتبط یا کم‌ارتباط با دانش پیشین و تجربه‌های آنان ارائه می‌شود، موجب اشکال و ناهنجاری نشده است؟ معلمان با توجه به دانش و تجربه‌ی خود و آگاهی از تفاوت‌های فردی فراگیران‌شان می‌توانند با اتخاذ شیوه‌های گوناگون به پیدایش آمادگی در آنان همت گمارند. در این‌جا به منظور آشنایی بیشتر خوانندگان با برخی از مفاهیم و واژگان مرتبط با مقوله‌ی آمادگی در ریاضی به تعریف اجمالی می‌پردازیم و در فصل‌های بعدی این کتاب الگوی آمادگی حل مسأله را ارائه خواهیم داد.

گام‌های فکری

بنابر تعریف برخی پژوهشگران (جانستون و همکارانش[1]، ۱۹۹۳) پیچیدگی یک تکلیف یا گام‌های فکری آن یعنی تعداد گام‌هایی که کم‌توان‌ترین فراگیر، بر اساس آموزش‌های قبلی خود برای حل موفقیت‌آمیز یک تکلیف طی می‌کند.

1. Johnstone & et. al

طرحواره‌های مفهومی[1] ساختارها و راه‌هایی که این ساختارها بر اساس آن ساخته می‌شوند و مطالعه‌ی ساختارهای ریاضی و یادگیری ریاضیّات قرار دارد. هنگامی که دانش و عمل می‌کنند، در کانون روان‌شناسی یادگیری ریاضیّات قرار دارد. هنگامی که دانش و خاصیت‌های جداگانه‌ی خازن‌ها، ترانزیستورها و مقاومت‌ها و چیزهایی از این قبیل به گونه‌ای مناسب به هم مرتبط شوند، دستگاهی به نام رادیو را می‌سازند که می‌تواند پخش‌کننده‌ی امواج صوتی باشد و ما را در جریان اخبار و برنامه‌های مختلف قرار دهد. در واقع تعامل نظام‌مند این ابزار و وسایل، ساختار جدیدی را در عرصه‌ی وسایل الکتریکی پدید می‌آورد که به رادیو ترانزیستوری موسوم است. در دانش ریاضی نیز مفاهیم و ایده‌ها چنین وضعیتی را دارند و مانند آنچه در مورد رادیو ترانزیستوری گفته شد در یک ارتباط و تعامل علمی و منسجم نام خاص خود یعنی ساختارهای مفهومی یا طرحواره‌ها را می‌یابند. بنابراین، در یک ساختار مفهومی مفاهیم مختلفی چه ساده چه مشکل می‌توانند شرکت داشته باشند. به عبارت دیگر، به یک ساختمان ذهنی که در آن دانش و تجربه‌های مرتبط فرد سازمان می‌یابند، طرحواره‌ی مفهومی گفته می‌شود.

از مهم‌ترین عمل‌های طرحواره‌ی مفهومی این است که یادگیری و کسب دانش جدید را در یک موقعیت آموزشی آسان‌تر می‌نماید. مثلاً چنانچه قبلاً مطالبی را در مورد یک عنوان و مفهوم ریاضی مانند مفهوم تابع بدانیم، دانش جدید ما در این مقوله می‌تواند به نحو مناسبی به طرحواره‌ی مفهومی موجود یعنی تابع افزوده شود و موجب بسط یکپارچه و معنادار آن توسط فراگیر شود. اما در صورتی که دانش پیشین ما بر پایه‌ی یک طرحواره‌ی مفهومی منسجم و کارآمدی استوار نباشد، اطلاعات بعدی مثلاً مفهوم تابع‌های یک‌به‌یک و یا پوششی، معکوس تابع و... نمی‌توانند به گونه‌ای طبیعی و هماهنگ با خود مفهوم تابع در جایگاه واقعی‌شان قرار گیرند و توسعه‌ی مفهومی و بصیرت بیشتر یادگیرنده را فراهم آورند.

ضمناً با رشد طرحواره‌های مفهومی از جمله در آموزش و یادگیری ریاضیّات، این طرحواره‌ها طبعاً برای توسعه‌ی خود نیازمند به جایگاه بیشتری از ظرفیت ذهنی (فضای حافظه‌ی فعال) فرد هستند. بنابراین، چنانچه با شیوه‌های درست علمی و آموزشی به بسط ساختارهای مفهومی در آموزش ریاضیّات نپردازیم، دانش‌آموزان دچار مشکلات کم‌فهمی یا بدفهمی مطالب و مفاهیم ریاضی خواهند شد. در واقع، توسعه‌ی مناسب طرحواره‌های مفهومی موجب استفاده‌ی بهینه‌ی فرد از ظرفیت‌های ذهنی و تسهیل عمل پردازش اطلاعات توسط وی

1. Schemata

می‌شود که این امر در بروز یادگیری معنادار و رفتار ریاضی مطلوب دخالت جدی دارد. به علاوه اسکمپ (۱۹۸۶)، معتقد است فعالیت‌های علمی‌ای که بر پایه‌ی رشد طرحواره‌های مفهومی صورت می‌پذیرد، موجب نوعی احساس مسرت و لذت‌بخشی در شاگردان می‌شود که خود یادگیری را روان‌تر می‌سازد.

این طرحواره‌ها علاوه بر این‌که مشخصه‌ها و خواص جداگانه و تک‌تک مفاهیم موجود در خود را دارا می‌باشند، از سه مشخصه‌ی دیگر نیز برخوردارند:

۱- دانش موجود فراگیر را یکپارچه و هماهنگ می‌سازند؛

۲- به عنوان ابزاری برای تسهیل یادگیری‌های بعدی عمل می‌کنند؛

۳- موجب فهم معنادار و بهتر مطالب می‌گردند.

در فصل هشتم کتاب، با ویژگی‌ها و اهمیت بیشتر طرحواره‌ها در یاددهی- یادگیری ریاضیات و حلّ مسأله آشنا خواهیم شد.

انتخاب راهبرد Y

انتخاب راهبرد مناسب باید به مثابه‌ی عاملی جدی در آموزش و یادگیری ریاضی و حل مسأله، مورد توجه معلمان ریاضی قرار گیرد. فراگیر با تصمیم‌سازی خود در انتخاب راهبردهای مناسب می‌تواند در کاهش پیچدگی‌های یک تکلیف بکوشد و از ظرفیت‌های ذهنی و علمی خویش به گونه‌ای مؤثرتر بهره جوید. فراگیر ممکن است دارای راهبرد توسعه‌یافته‌ای باشد که او را قادر سازد تا با دسته‌بندی و سازمان‌دهی اطلاعات دریافتی، آن‌ها را به سهولت قابل پردازش و فهم کند. کیس و گلبرسون[1] (۱۹۷٤)، معتقدند مشکلاتی که دانش‌آموزان عمدتاً در تکلیفی ویژه با آن مواجه هستند، دلایل چندی دارد:

الف- طرحواره‌ای که در دسترس آنان است؛

ب- تعداد طرحواره‌های مفهومی که دانش‌آموز همزمان قادر است برای انجام تکلیف موردنظر آن‌ها را فعال سازد (فعال‌سازی طرحواره‌ها)؛

ج- راهبرد موردنیاز برای انجام یک تکلیف.

همه‌ی این موارد به گونه‌ای با یکدیگر در ارتباط هستند و راهی را که آنها، خودشان را مشخص می‌سازند عملاً مشخصه‌های ویژه‌ی ارائه‌ی یک تکلیف می‌باشند. برای انجام موفقیت‌آمیز تکلیف‌های مختلف ریاضی، به طرحواره‌های مفهومی متعددی نیاز است. ولی

1. Case & Globerson

مسائل پیچیده‌تر که برای حل به گام‌های فکری بیشتری (Z) نیاز دارند، با اتخاذ راهبردهایی (Y) که همزمان بتوانند نیاز به تعداد طرحواره‌های مفهومی را کاهش دهند، قابل انجام و حل هستند.

البته کشف یا ابداع یک راهبرد، قابلیت ذهنی بالاتری را در مقایسه با به‌کارگیری آن راهبرد در موقعیت‌های مختلف بروز رفتار ریاضی می‌طلبد. آموزش چنین راهبردهایی به افرادی با ظرفیت کمتر، حافظه‌ی فعال را یاری می‌دهد تا تکلیف‌های دشوارتر را روان‌تر انجام دهند. آموزش راهبردها به همراه تشویق فراگیران به این‌که خود راهبردهای یادگیری و حل مسأله را ساخته و بسط دهند، باید جزء اصلی فرایند آموزش و یادگیری ریاضی باشد؛ به ویژه هنگامی که آنان در مقابله با یک وضعیت یادگیری و حل مسأله‌ای قرار می‌گیرند که پیچیدگی‌های آن بالاتر از ظرفیت‌های ذهنی و عقلانی‌شان می‌باشد. در واقع می‌توان ادعا کرد فردی قادر است رفتار ریاضی مطلوب‌تری را از خود نشان دهد که توانسته باشد با مجموعه‌ای از راهبردهای مختلف بر محدودیت‌های ذهنی و ظرفیت حافظه‌ی فعال خود و سبک یادگیری‌اش غلبه نماید. فراگیر باید یاری شود تا خود راهبردهایش را بسط دهد و فرصت‌هایی به او داده شود تا در عمل با تجزیه‌ی یک تکلیف به اجزای مناسب، کار کردن با اطلاعاتی با بار زیاد و جداسازی اطلاعات مربوط از نامربوط، این راهبردها در عرصه‌های مختلف ریاضی مورد تجربه قرار گیرند. اکنون ضمن این‌که بحث بیشتر درباره‌ی نقش و ضرورت به‌کارگیری راهبردها را در موقعیت‌های آموزش، یادگیری و حل مسأله‌ی ریاضی به آینده موکول می‌کنیم، به این پرسش پاسخ می‌دهیم که اصولاً تعریف راهبرد چیست؟ گانیه راهبردهای شناختی را مهارت‌هایی عقلانی می‌داند که به گونه‌ای درونی سازمان یافته‌اند و کارکردشان نظم‌بخشی و کنترل بهره‌جویی از مفاهیم و قاعده‌ها و فرمول‌ها است.

ساختمان ذهنی و پردازش اطلاعات

بحث پیرامون ساختمان ذهنی و سبک‌های یادگیری دانش‌آموزان و چگونگی پردازش اطلاعات توسط آنان را به آینده موکول خواهیم کرد. اکنون به نمونه‌هایی از ریاضیّات مقدماتی می‌پردازیم که می‌توانند مقوله‌ی آمادگی ریاضی را اجمالاً تبیین کنند.

اصولاً به عنوان یک معلم ریاضی (و احتمالاً کم‌تجربه) با رویکرد کاملاً برنامه‌ای موافقیم و یا به دلیل نبود وقت کافی برای تعمیق مباحث ریاضی مشتاقیم که پس از تدریس یک مبحث بلافاصله به عنوان جدیدی بپردازیم؛ در حالی‌که احتمالاً بسیاری از شاگردان ما آمادگی

زمینه‌ی لازم را برای این کار ندارند. در واقع آنان هنوز به دلیل عدم تثبیت مطالب قبلی بصیرت کافی نسبت به آموخته‌های حاضر را ندارند و به عبارتی یادگیری در حد تسلط برای آنان اتفاق نیفتاده است. مثلاً مفاهیم و مهارت‌های جبری را زود و به سرعت، یکی پس از دیگری به آنان آموزش دهیم و یا بلافاصله پس از کار کردن با مجموعه‌های (N) و (Z) کار با عددهای کسری (Q) را آغاز می‌کنیم؛ به ویژه این‌که کسرها و نسبت‌ها از جمله قسمت‌هایی هستند که به خوبی می‌توانند منعکس‌کننده‌ی مشکلات مفهومی و مهارتی بسیاری از شاگردان در عرصه‌ی ریاضیّات مقدّماتی باشند. در این میان به نظر می‌رسد چند مشکل عمده در درک نسبت‌ها و کسرها وجود دارند که یادگیری آن‌ها نیازمند آمادگی‌های ذهنی و مفهومی از سوی فراگیران می‌باشد. از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- کسرها را نمی‌توان به مثابه‌ی عناصری مستقل و جدا آموزش داد؛ زیرا آن‌ها در واقع جزئی از یک کل محسوب می‌شوند و زمانی دارای معنا هستند که در ارتباط با کل خود در نظر گرفته شوند، یعنی برای درک کسری از یک چیز باید تصور درستی از کل آن چیز در نظر داشت. مثلاً $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۱}{۳}$ سیب آسان است ولی تصور تمام کیلوگرمی که شما از آن $\frac{۱}{۵}$ یا $\frac{۲}{۵}$ برداشته‌اید یا تمام ساعتی که $\frac{۱}{۴}$ آن گذشته است یا ترکیب مواد شیمیایی در آزمایشگاه به نسبت کسرهایی از عناصری خاص طبعاً به آسانی درک $\frac{۱}{۴}$ یک سیب نمی‌باشد.

۲- درک نمادی که کسرها با آن نمایش داده می‌شوند نیز خالی از دشواری نیست. اصولاً مخرج کسر معنا و عملی کاملاً متفاوت با معنا و عمل صورت کسر دارد. مثلاً مخرج کسر $\frac{۳}{۵}$ به ما می‌گوید که کل ما به پنج جزء مساوی تقسیم شده است و صورت می‌گوید که سه قسمت از آن پنج قسمت مورد توجه است. یا فهم کسرهایی مانند $\frac{۹}{۸}$ که دارای مفهومی غیر از $\frac{۳}{۵}$ است، برای دانش‌آموزان مشکل‌زا می‌باشد.

۳- درک این‌که نسبت دو مقدار یک عدد مطلق است و بنابراین بر حسب واحد معینی بیان نمی‌شود، برای بچه‌ها خالی از ابهام نیست و یا تمایز بین کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها بر حسب یک واحد اندازه‌گیری بیان می‌شوند. مانند $\frac{\text{۳۲کیلومتر}}{\text{۶۴کیلومتر}}=۰/۵$ و میزان‌های تغییری که همچون یک کسر $\frac{\text{۶۰کیلومتر}}{۰/۵}=۱۲۰\ k/h$ در نظر گرفته می‌شوند، ولی صورت و

مخرج آن‌ها واحدهای متفاوتی اندازه گرفته شده‌اند از جمله نکات دیگری است که مشکل‌آفرینند.

۴- کار کردن با کسرها (چهار عمل اصلی)، تشخیص میان بزرگتری و کوچکتری و معادل‌سازی کسرها از زمره‌ی مواردی هستند که برای دانش‌آموزان گرفتاری‌های مهارتی و مفهومی به وجود می‌آورند.

۵- نقش زبان همچون سایر عرصه‌های آموزش و یادگیری ریاضی در فهم کسرها به ویژه برای بسیاری از دانش‌آموزان تازه‌کار هم از اهمیت بالایی برخوردار است. به عنوان مثال استفاده از واژه‌های ربع، ثلث و حتی نصف گاه می‌تواند مشکل‌ساز باشد؛ مگر این‌که ارتباط میان این قبیل واژه‌ها و نمادهای $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ در موقعیت‌های محسوس برای بچه‌ها به خوبی توضیح داده شده باشد. همچنین اشتباه‌های معنایی میان عبارت‌هایی مانند: «نصف عددی ۳۶ است، تمام عدد چقدر است؟» و «نصف عدد ۳۶ چه مقدار است؟» غالباً دیده می‌شوند.

بدیهی است که معلمان ریاضی برای غلبه بر دشواری‌هایی نظیر موارد پیش‌گفته، به مقتضای دانش و تجربه‌ی خویش و وضعیت دانش‌آموزان عمل خواهند کرد. در عین حال، برای غلبه بر دشواری مورد اول، باید در مراحل اولیه‌ی آموزش کسرها، مرتباً به کلی که کسرها جزئی از آن هستند اشاره شود و به‌طور مجرد از نمادهایی مانند $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۳}$ و یا $\frac{۱}{۲}$ کمتر صحبت کنیم، بلکه $\frac{۱}{۴}$ و یا $\frac{۱}{۳}$ سیب و $\frac{۳}{۵}$ متر و یا حتی $\frac{۱}{۳}$ از ۱۲ استفاده کنیم که فهم دانش‌آموزان را روان‌تر می‌سازد. برای غلبه بر مشکلات مطرح شده در موارد دوم و سوم و پنجم به نظر می‌رسد که باید از به‌کارگیری نمادها برای نمایش کسرها تا قبل از توسعه‌ی مفاهیم (ریاضی) نزد کودکان خودداری شود. در مورد عملیات میان کسرها مثلاً در مراحل اولیه‌ی آموزش جمع و تفریق آنها، به جای نوشتن (*) $\frac{۲}{۳}\pm\frac{۳}{۵}=\frac{۱۰\pm۹}{۱۵}$ آموزش دو مرحله‌ی زیر مورد توجه و تمرین قرار گیرند.

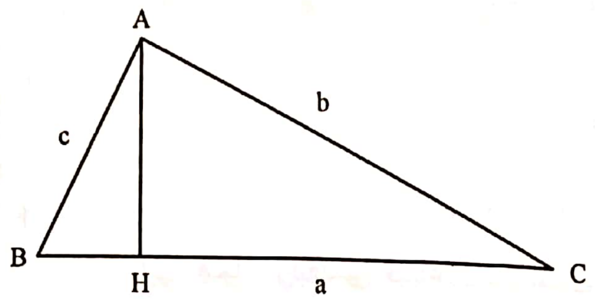
در مرحله‌ی اول، معادل‌سازی کسرها مورد توجه قرار گیرد، یعنی بچه‌ها تشویق شوند که با یافتن کسرهای معادل، مخرج‌ها را یکی کنند و در مرحله‌ی دوم ایده‌ی جمع و یا تفریق کسرها را به کار گیرند، یعنی $\frac{۲}{۳}\pm\frac{۳}{۵}=\frac{۱۰}{۱۵}\pm\frac{۹}{۱۵}$. اگر دانش‌آموزان این دو مرحله و ایده‌های آن را به خوبی درک کنند، تکنیک جمع و تفریق کسرها با روش (*) برای آنان شفاف‌تر

خواهد شد.

دیگر این‌که درک نسبت‌های طولی پاره‌خط، قضایای تالس و یا روابط طولی در مثلث از جمله قضیه‌ی فیثاغورث در یک مثلث قائم‌الزاویه و سیر قضایای هندسه اقلیدسی و فهم اثبات آن‌ها نیازمند آمادگی‌های ذهنی و توسعه‌ی برخی مفاهیم نزد دانش‌آموزان می‌باشد. به مثال زیر توجه نمایید.

قضیه (قضیه‌ی فیثاغورس): در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازه‌ی وتر برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر.

برای قضیه‌ی معروف فوق با توجه به نوع آمادگی ریاضی دانش‌آموزان می‌توان به یکی از شیوه‌های زیر عمل کرد:



۱- روش تحلیلی معمول در هندسه‌ی اقلیدسی

اثبات به این روش نیازمند فراگیری قضیه‌ی دیگری می‌باشد که عبارت است از «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه برابر است با حاصل ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی تصویر آن ضلع بر وتر». یعنی با توجه به شکل بالا داریم:

$$AB^2 = BC.BH$$

$$AC^2 = BC.CH$$

برای اثبات این قضیه‌ی کمکی نیز فهم مفاهیمی چون تصویر قائم بر یک خط و تصویر یک پاره‌خط و استفاده از تشابه مثلث‌ها ضروری است. در حالیکه با شیوه‌های ملموس‌تر و بدون استفاده از قضیه‌ی کمکی بالا و مفاهیمی چون تشابه مثلث‌ها، بلکه با استفاده از برخی از اطلاعات معمولی فرد و چند عمل ساده‌ی جبری و بهره‌جویی از تصویر (مربع) می‌توان ساده‌تر به نتیجه‌ی موردنظر رسید. در واقع می‌توان ادعا کرد که در مقابل شیوه‌ی اثبات بالا که آمادگی‌ها و پیچیدگی‌های ذهنی و استدلالی بیشتری را می‌طلبد، روش زیر آمادگی‌های کمتری را از سوی شاگردان می‌طلبد و برای مقاطع پایین‌تر تحصیلی توصیه می‌شود.

۲- روش دوم

مربعی را به طول ضلع (a+b) رسم نمایید و نقاط متناظر را مطابق شکل به یکدیگر وصل

کنید. اکنون چهار مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت با اضلاع a، b و c و مربعی با طول ضلع c پدید می‌آید. مساحت مربع اولی (مربع بزرگتر) هم‌نهشت را می‌توان به دو صورت نوشت. چون طول ضلع این مربع a+b می‌باشد؛ پس:

$$S = (a+b)^۲ \qquad (۱)$$

$$S = S_۱ + S_۲ \qquad (۲)$$

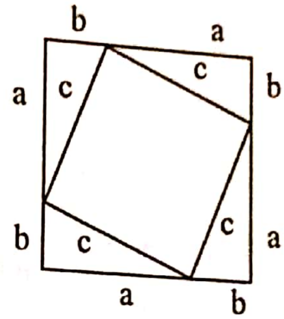
که $S_۱$ عبارت است از مجموع مساحت‌های چهار مثلث قائم‌الزاویه یعنی $S_۱ = ٤(\frac{ab}{۲})$ و $S_۲ = C^۲$ مساحت مربع به طول ضلع c می‌باشد. بنابراین از تساوی (۱) و (۲) داریم:

$$S = S_۱ + S_۲ = ٤(\frac{ab}{۲}) + C^۲$$

$$(a+b)^۲ = ۲ab + c^۲$$

$$a^۲ + ۲ab + b^۲ = ۲ab + c^۲$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$



این همان رابطه‌ی فیثاغورس است. می‌بینید که به آسانی و بدون توسل به شیوه‌ها و اثبات‌های پیچیده‌تر ریاضی، تنها به کمک برخی از عملیات جبری و دانسته‌های معمولی فرد و کمک از تفکر تصویری او می‌توان به نتایج مطلوب رسید. هر چند که در این‌جا این موضوع که چرا چهارضلعی c خود یک مربع است، احتمالاً برای برخی دشوار می‌باشد.

به هر حال اثبات را به ملایمت و آرامی ارائه دهید و از ذکر نکات غیرضروری خودداری کنید تا دانش‌آموزان با آمادگی‌های کمتر ریاضی نیز از آن بهره جویند.

تمرین زیر نیز نمونه‌ای است که در آن برای اثبات احکام خواسته شده می‌توان تنها از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کرد و هیچ اشاره‌ای به بحث نسبت‌ها و تشابه در مثلث نکرد.

✍ **تمرین:** مثلث ABC در رأس B قائمه است. از B، پاره‌خط BP را بر AC عمود می‌کنیم. ثابت کنید:

$$PB^۲ = AP.PC$$

$$AB^۲ = AP.AC$$