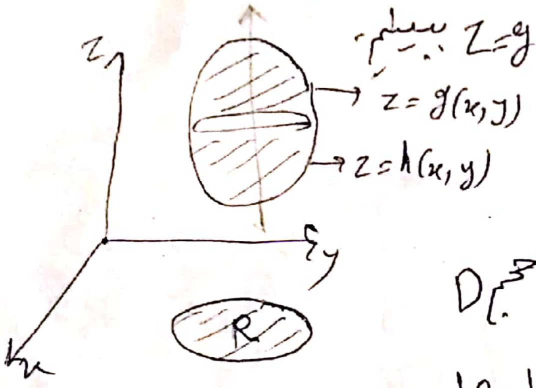
انتگرال سه گانه:

ناحیه انتگرال گیری سه گانه

الف) ناحیه بسته D در فضای xyz را یک ناحیه z-ساده (به طور قائم ساده) نامیم هرگاه

$$D=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid h(x,y)\le z\le g(x,y)\}$$

و تصویر D در صفحه xoy ناحیه دو بعدی مثل R (انتگرال ساده) باشد. یعنی اگر از پایین به بالا به ناحیه D نگاه کنیم اول رویه z=h(x,y) و سپس ناحیه z=g(x,y) را ببینیم.



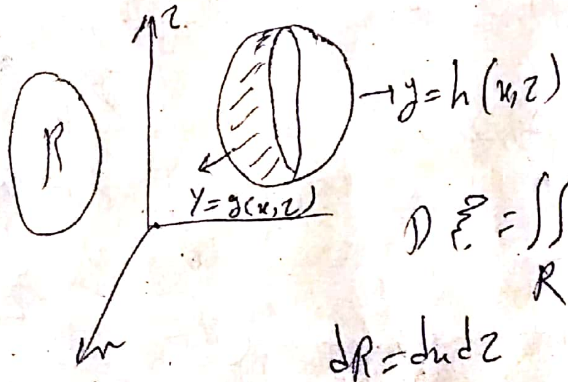
$$\text{حجم } D=\iint_R [g(x,y)-h(x,y)]\,dR=\iiint_{R\ h(x,y)}^{g(x,y)} dz\,dR$$

$$dR=dx\,dy=dy\,dx$$

ب) ناحیه بسته D در فضای xyz را یک ناحیه y-ساده (به طور افقی ساده) نامیم هرگاه

$$D=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid g(x,z)\le y\le h(x,z)\}$$

و تصویر D در صفحه xoz ناحیه دو بعدی مثل R (ساده) باشد یعنی اگر از چپ به راست به ناحیه D نگاه کنیم (از طرف y های منفی) اول رویه g(x,z)=y و سپس رویه y=h(x,z) را ببینیم.



$$\text{حجم } D=\iint_R [h(x,z)-g(x,z)]\,dR=\iiint_R \left[\int_{h(x,z)}^{g(x,z)} dy\right] dR$$

که در آن $dR=dz\,dx$ یا $dR=dx\,dz$

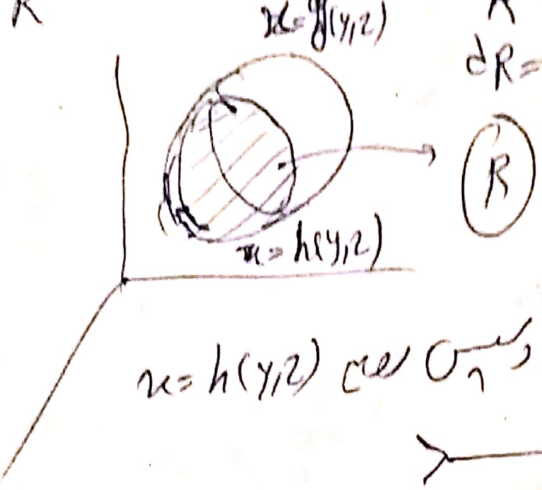
ج) ناحیه بسته D در فضای xyz را یک ناحیه x-ساده نامیم هرگاه

$$D=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid g(y,z)\le x\le h(y,z)\}$$

و تصویر D در صفحه yoz ناحیه مثل R است.

$$D \text{ حجم} = \iint_R [h(y,z) - g(y,z)]\, dR = \iint_R \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} dx\right] dR$$

که در آن $dy\,dz = dR$ یا $dR = dz\,dy$



اگر از طرف x ها ی منفی (روبرو و مقابل) به ناحیه D نگاه کنیم اول رویه $x = g(y,z)$ و سپس رویه $x = h(y,z)$ دیده میشود

[illegible]

ناحیه بسته D در فضای xyz را ساده نامیم هرگاه هم z-ساده و هم y-ساده و هم x-ساده باشد مانند بیضیگون ـ کره

ناحیه بسته D را در فضای xyz را ایده‌آل نامیم هرگاه اجتماع چند ناحیه z-ساده یا x-ساده یا y-ساده باشد

انتگرال سه گانه روی ناحیه D ؛ فرض کنید که D یک ناحیه بسته ساده (ایده‌آل) باشد و تابع $f(x,y,z)$ روی D تعریف شده (یا پیوسته باشد) باشد با رسم صفحاتی موازی یا صفحات مختصات xy و yz و zx ناحیه D را به زیر ناحیه های کوچکی شبیه مکعب مستطیل تقسیم میکنیم و زیر ناحیه هایی که دقیقا مستطیل هستند را از یک تا n شماره گذاری میکنیم. فرض کنید که D_i مکعب مستطیل i ام باشد $D_i \text{ حجم} = \Delta D_i = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_i$ فرض کنید که (x_i,y_i,z_i) یک نقطه دلخواه در D_i باشد چون f روی D تعریف شده است پس $f(x_i,y_i,z_i)$ [illegible] تعریف شده است

حال اگر مقدار حد $\lim \sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i,y_i,z_i)\Delta D_i$ موجود باشد آنگاه انتگرال سه گانه تابع f روی ناحیه R موجود است و میگوییم که f روی D انتگرال پذیر است و آن را با $\iiint f(x,y,z)\, dD$ نمایش میدهیم.

$$\iiint f(x,y,z)\, dD \overset{D}{=} \lim \sum^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta D_i$$

در انتگرال سه گانه $dD = dz\,dy\,dx = dz\,dx\,dy = dx\,dz\,dy = dx\,dy\,dz = dy\,dz\,dx = dy\,dx\,dz$

برای dD شش حالت وجود دارد که با توجه به ناحیه D می‌توان از یکی از این شش حالت استفاده کرد.

توجه: اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه بدیهی است که

$$D \text{ حجم } = \iiint_D dD$$

محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint_D f(x,y,z)\,dD$

1) D یک مکعب (در واقع یک مکعب مستطیل) مستطیل باشد.

$$D\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y<d \\ e\le z\le L\end{cases} \qquad \iiint_D f\,dD = \int_a^b\int_c^d\int_e^L f\,dz\,dy\,dx = \int_a^b\int_e^L\int_c^d f\,dy\,dz\,dx$$

$$= \int_e^L\int_a^b\int_c^d f\,dy\,dx\,dz = \int_c^d\int_a^b\int_e^L f\,dz\,dy\,dx = \int_e^L\int_c^d\int_a^b f\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_c^d\int_e^L\int_a^b f\,dx\,dz\,dy$$

۲- اگر D یک ناحیه z-ساده باشد.

$$g(x,y)\le z\le h(x,y)$$

$$\iiint_D f\,dD = \iint_R\left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f\,dz\right]dR \qquad ① \qquad \begin{matrix} dR = dx\,dy \\ dR = dy\,dx\end{matrix}$$

و R تصویر ناحیه D در صفحه xoy است

۳- اگر D یک ناحیه y-ساده باشد یعنی

$$g(x,z)\le y\le h(x,z)$$

و تصویر D در صفحه zox باشد

$$\iiint_D f\,dD = \iint_R\left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f\,dy\right]dR \qquad \begin{matrix} dR = dx\,dz \\ dR = dz\,dx\end{matrix}$$

۴- اگر D یک ناحیه x-ساده باشد یعنی

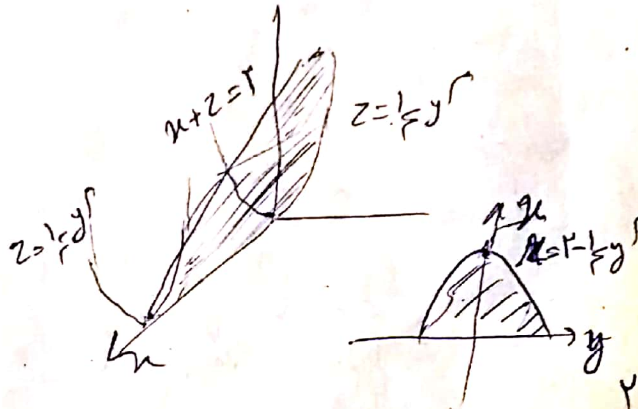
$$g(y,z)\le x\le h(y,z)$$

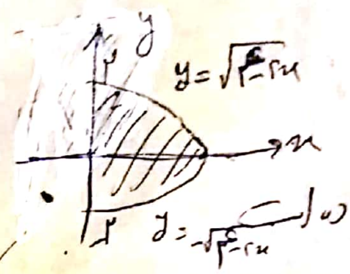
و تصویر D در صفحه zoy ناحیه R باشد

$$\iiint_D f\,dD = \iint_R\left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f\,dz\right]dR \qquad \begin{matrix} dR = dy\,dz \\ dR = dz\,dy\end{matrix}$$

بدیهی است که برای یک انتگرال سه گانه، شش انتگرال سه گانه می‌توان نوشت که به این انتگرالها را انتگرال مکرر می‌نامیم و نوشتن این شش انتگرال برای هر ناحیه ساده ممکن است. در مثال های زیر، این شش انتگرال مکرر را می‌نویسیم.

مثال: فرض کنید که T جسم محصور بین استوانه $z=\frac{1}{۲}y^۲$ و صفحات $x+z=۲$ و $x=0$ است هر شش انتگرال سه گانه‌ای که حجم این جسم را محاسبه می‌کند بنویسید.





اگر D درون T باشد

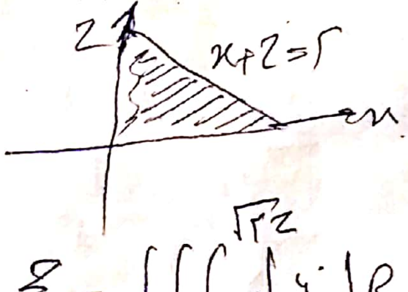
D یک ناحیه z- ساده است

یعنی $\frac{1}{۲}y^۲\le z\le ۲-x$

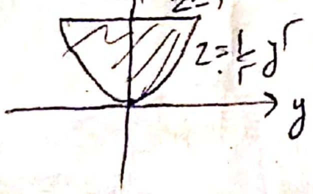
$$\text{حجم}=\iint_R\int_{\frac{1}{۲}y^۲}^{۲-x}dz\,dR=\begin{cases}\int_0^۲\int_{-\sqrt{۴-۲x}}^{\sqrt{۴-۲x}}\int_{\frac{1}{۲}y^۲}^{۲-x}dz\,dy\,dx & R\ \begin{cases}-\sqrt{۴-۲x}\le y\le\sqrt{۴-۲x}\\ 0\le x\le ۲\end{cases}\\ \int_{-۲}^{۲}\int_0^{۲-\frac{1}{۲}y^۲}\int_{\frac{1}{۲}y^۲}^{۲-x}dz\,dx\,dy & R\ \begin{cases}0\le x\le ۲-\frac{1}{۲}y^۲\\ -۲\le y\le ۲\end{cases}\end{cases}$$

D یک ناحیه y ساده است یعنی

$-\sqrt{۲z}\le y\le\sqrt{۲z}$



$$\text{حجم}=\iint_R\int_{-\sqrt{۲z}}^{\sqrt{۲z}}dy\,dR=\begin{cases}\int_0^۲\int_0^{۲-x}\int_{-\sqrt{۲z}}^{\sqrt{۲z}}dy\,dz\,dx\\ \int_0^۲\int_0^{۲-z}\int_{-\sqrt{۲z}}^{\sqrt{۲z}}dy\,dx\,dz\end{cases}$$



D یک ناحیه x- ساده است $0\le x\le ۲-z$ و

$$\text{حجم} = \iiint_{R}\int_{۰}^{۲-z} dx\, dR = \begin{cases} \int_{-۲}^{۲}\int_{\frac{۱}{۲}y^۲}^{۲}\int_{۰}^{۲-z} dx\, dz\, dy \\ \int_{۰}^{۲}\int_{-\sqrt{۲z}}^{\sqrt{۲z}}\int_{۰}^{۲-z} dx\, dy\, dz \end{cases}$$

$$\text{حجم} = \int_{-۲}^{۲}\left(\int_{\frac{۱}{۲}y^۲}^{۲}\left(\int_{۰}^{۲-z} dx\right) dz\right) dy = \int_{-۲}^{۲}\left(\int_{\frac{۱}{۲}y^۲}^{۲}(۲-z)\, dz\right) dy =$$

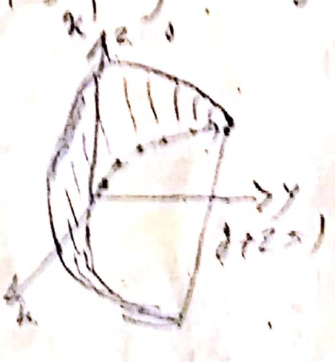
$$= \int_{-۲}^{۲}\left[۲z - \frac{z^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}y^۲}^{۲} dy = \int_{-۲}^{۲}\left[(۴-۲)-(y^۲-\frac{۱}{۸}y^۴)\right] dy$$

$$= \int_{-۲}^{۲}\left[۲-y^۲+\frac{۱}{۸}y^۴\right] dy = ۲\left[۲y - \frac{y^۳}{۳} + \frac{۱}{۴۰}y^۵\right]_{۰}^{۲}$$

$$= ۲\left[۴-\frac{۸}{۳}+\frac{\overset{۴}{\cancel{۳۲}}}{\underset{۵}{\cancel{۴۰}}}\right] = ۲\left[\frac{۶۰-۴۰+۱۲}{۱۵}\right] = ۲\left[\frac{۳۲}{۱۵}\right] = \frac{۶۴}{۱۵}$$

مثال: دامنه انتگرال سه‌گانه $\int_{-۱}^{۱}\int_{x^۲}^{۱}\int_{۰}^{۱-y} dz\, dy\, dx$ را رسم کنید و به اشکال معادل آن را بنویسید.

$$\begin{cases} ۰ \le z \le ۱-y \\ x^۲ \le y \le ۱ \\ -۱ \le x \le ۱ \end{cases} \Rightarrow$$



D یک ناحیه z ساده است و

$$\text{حجم} = \int_{۰}^{۱}\left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{۰}^{۱-y} dz\, dx\right] dy$$

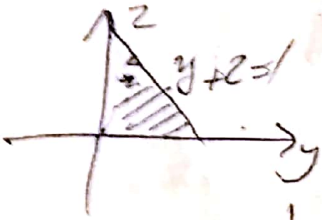
$z=۱-x^۲$ $x^۲ \le y \le ۱-z$

D یک ناحیه y ساده است و

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dz\,dx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dx\,dz$$

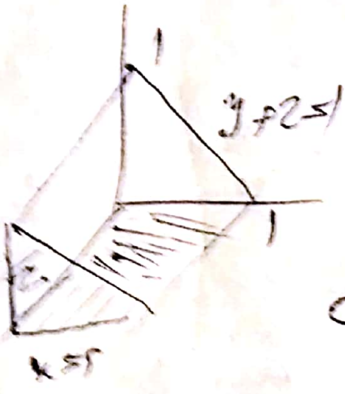
$$x^2 \le y \le 1-z$$

D یک ناحیه x-ساده است یعنی $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$ و تصویر D در صفحه yoz مثلث مقابل است



$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy\,dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$$

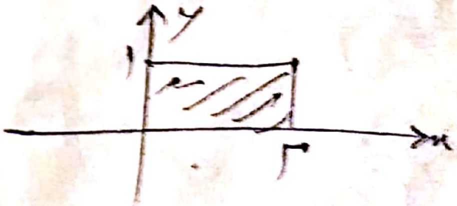
مثال: اگر D ناحیه محصور بین صفحه y+z=1 و صفحات x=۲ و x=0 و z=0 باشد مطلوب است هر شش انتگرال سه‌گانه‌ای که حجم را حساب می‌کنند.



D ناحیه z-ساده است

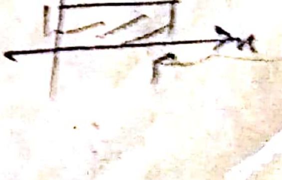
$$0 \le z \le 1-y$$

و تصویر D در صفحه xoy ناحیه مستطیل زیر است



$$\text{حجم} = \int_{0}^{1}\int_{0}^{۲}\int_{0}^{1-y} dz\,dx\,dy = \int_{0}^{۲}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-Z} dz\,dy\,dx$$

D یک ناحیه y-ساده است یعنی $0 \le y \le 1-z$ و تصویر آن در صفحه zox یک مستطیل است



$$\text{حجم} = \int_{0}^{1}\int_{0}^{۲}\int_{0}^{1-z} dy\,dx\,dz = \int_{0}^{۲}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z} dy\,dz\,dx$$

D یک ناحیه ساده است بین $0 \le x \le 2$ و تصویر آن در صفحه yoz

حل: [illegible]

$$\text{حجم} = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^2 dx\,dz\,dy$$

مثال: حجم جسم فضایی محصور بین دو رویه $z=1+x^2+y^2$ و $z=4-2x^2-11y^2$ را بیابید.

حل: D یک ناحیه z ساده است

$$\text{حجم} = \iint_R\int_{1+x^2+y^2}^{4-2x^2-11y^2} dz\,dR = \iint_R (4-2x^2-11y^2-1-x^2-y^2)\,dR$$

$$=\iint_R (3-3x^2-12y^2)\,dR = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3-3r^2)\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r$$

$$=(3\pi)\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{4}$$

$x^2+4y^2=1$ تصویر D در صفحه R ناحیه xy بیضی است

$x=r\cos\theta$
$y=\frac{1}{2}r\sin\theta$
$dx\,dy=\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta$

$z=4-2x^2-11y^2$
$z=1+x^2+y^2$ $\Rightarrow 4-2x^2-11y^2=1+x^2+y^2$
$\Rightarrow x^2+4y^2=1$

مثال: حجم V ناحیه توپر T جدا شده از کره خامد $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ به وسیله استوانه مستدیر $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ را بیابید. چون T یک ناحیه z-ساده است

حل:

$$\text{حجم} = \iint_R\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dR = 2\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dR = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta$$

R تصویر V در صفحه xoy دایره $x^2+y^2=ax$ است که در مختصات قطبی $r=a\cos\theta$ است

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

مثال: مطلوب است حجم جسم محصور بین استوانه $x^۲+y^۲=۲۵$ و صفحه $x+y+z=۸$ و صفحه xy . حل: چون ناحیه z ساده است پس

$$حجم = \iint_R\int_۰^{۸-x-y} dz\, dR = \iint_R (۸-x-y)\, dR =$$

R ناحیه داخلی دایره $x^۲+y^۲=۲۵$ است

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۵} (۸ - r\cos\theta - r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\left[۸\frac{r^۲}{۲} - \frac{r^۳}{۳}\cos\theta - \frac{r^۳}{۳}\sin\theta\right]_۰^{۵} d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left[۱۰۰ - \frac{۱۲۵}{۳}(\cos\theta-\sin\theta)\right]d\theta$$

$$= ۲۰۰\pi - \frac{۱۲۵}{۳}\left[\sin\theta+\cos\theta\right]_۰^{۲\pi} = ۲۰۰\pi - ۰ = ۲۰۰\pi$$

مثال: اگر S مکعب مستطیل محصور بین صفحات $x=\pi$ و $y=\frac{\pi}{۲}$ و $z=\frac{\pi}{۳}$ و صفحات مختصات باشد، انتگرال سه‌گانه $\iiint_D xy\sin yz\, dD$ را بدست آورید.

حل:

$$\iiint_D xy\sin yz\, dD = \int_۰^{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} xy\sin yz\, dz\,dy\,dx = \int_۰^{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\left[-x\cos yz\right]_۰^{\frac{\pi}{۳}} dy\,dx$$

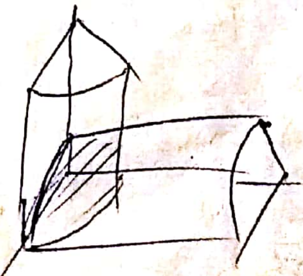
$$= \int_۰^{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} x\left[۱-\cos\frac{\pi}{۳}y\right]dy\,dx = \int_۰^{\pi} x\,dx\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\left(۱-\cos\frac{\pi}{۳}y\right)\right]dy =$$

$$\frac{\pi^۲}{۲}\left(\frac{\pi}{۲} - \sin\frac{\pi^۲}{۶}\right) = \frac{\pi}{۴}\left(\pi - \sin\frac{\pi^۲}{۶}\right)$$

مثال: حجم مشترک ناحیه داخلی استوانه $x^۲+y^۲=a^۲$ و $x^۲+z^۲=a^۲$ را بیابید.

حل: یک هشتم ناحیه به صورت زیر است. ناحیه z ساده است

$$حجم = ۸\iiint_D dD = ۸\int_۰^{a}\int_۰^{\sqrt{a^۲-x^۲}}\int_۰^{\sqrt{a^۲-x^۲}} dz\,dy\,dx$$



$$= ۸\int_۰^{a}\int_۰^{\sqrt{a^۲-x^۲}} \sqrt{a^۲-x^۲}\,dy\,dx = ۸\int_۰^{a}(a^۲-x^۲)\,dx$$

$$= ۸\left[a^۲x - \frac{x^۳}{۳}\right]_۰^{a} = ۸\left[\frac{۲}{۳}a^۳\right] = \frac{۱۶}{۳}a^۳$$

کاربرد فیزیکی انتگرال سه‌گانه

فرض کنید که D یک ناحیه بسته سه بعدی باشد که چگالی جرم هر نقطه در ناحیه D تابع پیوسته $\delta(x,y,z)$ باشد در این صورت

۱) $\iiint_D \delta(x,y,z)\, dD$ = جرم ناحیه D (حجم D)

۲- گشتاورهای مرتبه اول ناحیه D حول صفحات مختصات:

$$M_{xy}=\iiint_D z\,\delta\, dD \quad , \quad M_{xz}=\iiint_D y\,\delta\, dD \quad , \quad M_{yz}=\iiint_D x\,\delta\, dD$$

۳- مرکز جرم ناحیه D، $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M} \quad , \quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M} \quad , \quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}$$

۴- گشتاورهای مرتبه دوم ناحیه D (گشتاورهای ماند یا لختی) حول محورهای مختصات

$$I_x=\iiint_D (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\, dD \quad , \quad I_y=\iiint_D (x^2+z^2)\,\delta\, dD$$

$$I_z=\iiint_D (x^2+y^2)\,\delta\, dD$$

۵- اگر r فاصله نقطه (x,y,z) از ناحیه D تا خط L باشد آنگاه

$$I_L=\iiint_D r^2\,\delta\, dD$$

۶- شعاع چرخش ناحیه D حول خط L عبارت است از

$$R=\sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

مثال: مرکز جرم جسمی که چگالی جرم آن ثابت و از بالا به سهمیوار $z=۴-x^2-y^2$ و از پایین به قرص $x^2+y^2\leq ۴$ در صفحه $z=0$ محدود است را بیابید.

حل: چون جسم متقارن است و محور z ها محور تقارن جسم است پس $\bar{x}=\bar{y}=0$ و باید $\bar{z}$ را حساب کنیم.

$$M=\iiint_R^{۴-x^2-y^2} \delta\, dz\, dy\, dx = \delta\iint_R (۴-x^2-y^2)\, dR =$$

$$= \delta \int_0^{۲\pi}\int_0^{۲} (۴-r^۲)\, r\,dr\,d\theta = \delta \int_0^{۲\pi} d\theta \int_0^{۲} (۴r - r^۳)\,dr = ۲\pi\delta \left[۲r^۲ - \frac{r^۴}{۴}\right]_0^{۲} =$$

$$= ۲\pi\delta\,[۸-۴] = ۸\pi\delta .$$

$$M_{xy} = \iint_R \int_0^{۴-x^۲-y^۲} \delta z\,dz\,dR = \delta \iint_R \left[\frac{z^۲}{۲}\right]_0^{۴-x^۲-y^۲} dR = \frac{\delta}{۲}\iint_R (۴-x^۲-y^۲)^۲$$

$$= \frac{\delta}{۲}\int_0^{۲\pi}\int_0^{۲} r(۴-r^۲)^۲\,dr\,d\theta = \pi\delta\left[-\frac{۱}{۶}(۴-r^۲)^۳\right]_0^{۲} = \frac{۳۲\pi}{۳}\delta$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{\frac{۳۲}{۳}\cancel{\pi}\cancel{\delta}}{۸\ \cancel{\pi}\cancel{\delta}} = \frac{۴}{۳}$$

مثال: الف) مطلوب است مرکز جرم جسم همگنی که از پایین با سهمیگون $z=x^۲+y^۲$ و از بالا با صفحه $z=۴$ محدود است.

ب) صفحه‌ای معین $z=c$ را بیابید که جسم را به دو قسمت با احجام مساوی تقسیم می‌کند. (این صفحه از مرکز جرم نمی‌گذرد)

حل: الف) بدیهی است که $\bar{x}=\bar{y}=0$ زیرا جسم همگن و محور z محور تقارن جسم است.

$$R\{x^۲+y^۲=۴$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_R\int_{x^۲+y^۲}^{۴} \delta z\,dz\,dR}{\iint_R\int_{x^۲+y^۲}^{۴} \delta\,dz\,dR} = \frac{\frac{۱}{۲}\iint_R\left[۱۶-(x^۲+y^۲)^۲\right]dR}{\iint_R(۴-x^۲-y^۲)\,dR} = \frac{\frac{۱}{۲}\int_0^{۲\pi}\int_0^{۲}(۱۶-r^۴)\,r\,dr\,d\theta}{۸\pi}$$

$$= \frac{۲\pi\left[۸r^۲-\frac{۱}{۶}r^۶\right]_0^{۲}}{۱۶\pi} = \frac{\left[۳۲-\frac{۳۲}{۳}\right]}{۸} = \frac{۶۴}{۸\times۳} = \frac{۸}{۳}$$

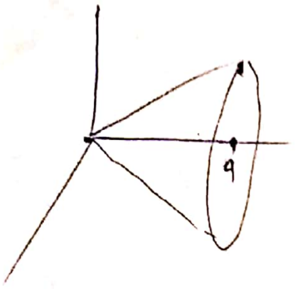
ب) چون حجم جسم $= ۸\pi$ پس باید

$$\iint_R\int_{x^۲+y^۲}^{c} dz\,dR = ۴\pi$$

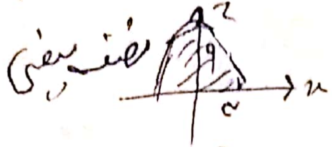
$$۴\pi = \int_0^{۲\pi}\int_0^{\sqrt{c}}(c-r^۲)\,r\,dr\,d\theta = ۲\pi\left[\frac{cr^۲}{۲}-\frac{r^۴}{۴}\right]_0^{\sqrt{c}} = ۲\pi\left[\frac{c^۲}{۲}-\frac{c^۲}{۴}\right]$$

$$۲ = \frac{۱}{۴}c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

مثال: مطلوب است جرم جسم واقع در بالای صفحه xy و محصور بین مخروط $۹x^۲+z^۲=y^۲$ و صفحه $y=۹$ در صورتی که اندازه چگالی حجمی در هر نقطه دلخواه (x,y,z) از جسم متناسب با اندازه فاصله آن نقطه از صفحه xy باشد.



$$R\left\{ ۹x^۲+z^۲=۸۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۹}+\frac{z^۲}{۸۱}=۱ \right.$$



حل: ناحیه D یک ناحیه y-ساده است

چگالی جرم جسم $= KZ$.

$$M = \text{جرم} = \iiint_D KZ\, dD = \iint_R \int_{\sqrt{۹x^۲+z^۲}}^{۹} KZ\, dy\, dR = \iint_R \left[۹KZ - KZ\sqrt{۹x^۲+z^۲}\right] dR$$

$$x = ۳r\cos\theta$$
$$z = ۹r\sin\theta \Rightarrow dR = ۲۷r\,dr\,d\theta$$

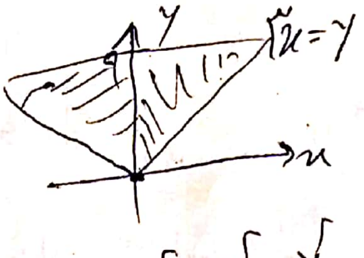
$$= K\int_0^{\pi}\int_0^{۱} \left[۸۱r\sin\theta - ۸۱r^۲\sin\theta\right] ۲۷r\, dr\, d\theta$$

$$= ۲۷\times۸۱K \int_0^{\pi} \sin\theta \left[\frac{r^۳}{۳} - \frac{r^۴}{۴}\right]_0^۱ d\theta = \frac{۲۷\times۸۱}{۱۲}K\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{۲۷\times۲۷}{۲}K$$

$$= \frac{۷۲۹}{۲}K$$

ناحیه D یک ناحیه Z-ساده نیز می‌باشد

تصویر D در صفحه xoy عبارت است از مثلث زیر



$$\text{جرم} = ۲\int_0^۹\int_0^{\frac{۱}{۳}y}\int_0^{\sqrt{y^۲-۹x^۲}} KZ\, dZ\, dx\, dy$$

$$= ۲K\int_0^۹\int_0^{\frac{۱}{۳}y} \frac{۱}{۲}(y^۲-۹x^۲)\, dx\, dy$$

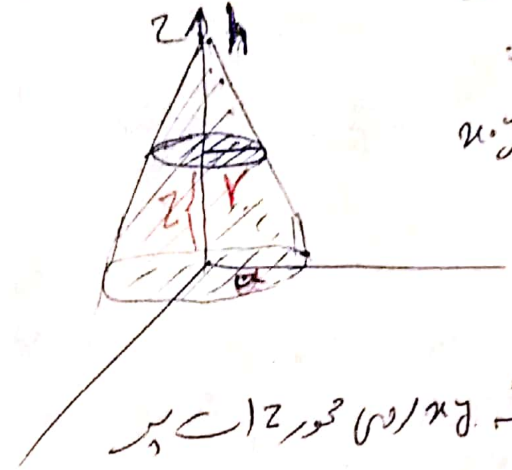
$$= \frac{۲}{۲}K\int_0^۹ \left[y^۲x - ۳x^۳\right]_0^{\frac{۱}{۳}y} dy$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۹x^۲+z^۲=y^۲ \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} y=۳x \\ y=-۳x \end{array}$$

$$= \frac{۲}{۲}K\int_0^۹ \left[\frac{۱}{۳}y^۳ - \frac{۱}{۹}y^۳\right] dy = \frac{۲}{۲}K\int_0^۹ \frac{۲}{۹}y^۳\, dy$$

$$= \frac{۲}{۹}K\left[\frac{y^۴}{۴}\right]_0^۹ = \frac{۷۲۹}{۲}K$$

مثال: مرکز جرم مخروط مستدیر قائم توپر T به ارتفاع h و شعاع قاعده a را در صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه از T با فاصله آن تا قاعده T متناسب باشد.



حل: برای راحتی مخروط را طوری قرار می‌دهیم که قاعده آن در صفحه xy و محور z محور تقارن آن باشد. پس $\rho(x,y,z) = cz$ که در آن c مقدار ثابت است: $(c>0)$

چون مرکز جرم هر مقطع عرضی مخروط T با صفحات موازی صفحه xy روی محور z است پس همین امر هم در مورد خود T صدق می‌کند یعنی $\bar{x}=\bar{y}=0$ پس

$$\bar{Z}=\frac{\iiint_D z\rho\, dD}{\iiint_D \rho\, dD}$$

برای محاسبه انتگرال سه گانه از مقطع عرضی استفاده می‌کنیم.

$A(z)$ مساحت مقطع عرضی T در z در سطح مربع یعنی مساحت قرص مستدیر به شعاع $r=r(z)$ که مقطع صفحه مار بر نقطه $(0,0,z)$ و موازی با صفحه xy با T است، بنابر تشابه مثلث‌ها

$$\frac{r}{a}=\frac{h-z}{h} \Rightarrow r=\frac{a}{h}(h-z) \Rightarrow A(z)=\frac{a^2}{h^2}(h-z)^2\pi$$

$$\bar{Z}=\frac{\iiint_D \cancel{c}z^2\, dD}{\iiint_D \cancel{c}z\, dD}=\frac{\int_0^h \frac{\pi a^2}{h^2}(h-z)^2 z^2\, dz}{\int_0^h \frac{\pi a^2}{h^2}(h-z)^2 z\, dz}=\frac{\int_0^h (h^2z^2-2hz^3+z^4)\, dz}{\int_0^h (h^2z-2hz^2+z^3)\, dz}$$

$$=\frac{\frac{1}{30}h^5}{\frac{1}{12}h^4}=\frac{2}{5}h$$

مثال: در مثال قبل اگر چگالی جرم حجمی جسم ثابت باشد آنگاه مرکز گوار (مرکز جرم) عبارت است از:

$$\bar{x}=\bar{y}=0$$

$$\bar{Z}=\frac{\iiint z\, dD}{\iiint dD}=\frac{\frac{1}{12}\pi a^2h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h}=\frac{1}{4}h$$

مثال: گشتاورهای ماند و شعاع‌های چرخش چهاروجهی T در یک هشتم اول و محدود با صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=a$ که $a>۰$ را حول محورهای مختصات پیدا نمایید.

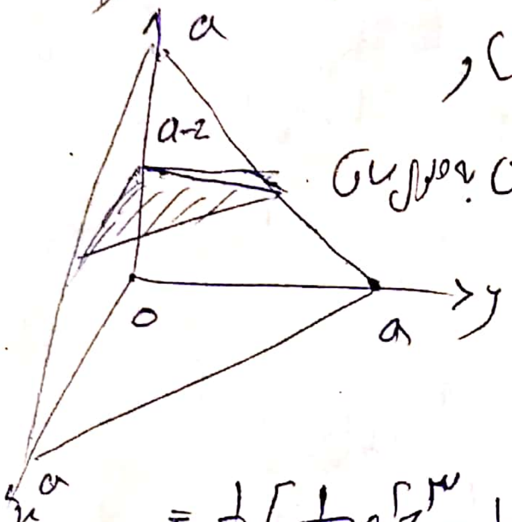
حل: فرض می‌کنیم $\rho(x,y,z)=1$ پس

$$I_z=\iiint_D (y^۲+x^۲)\,dD$$

$$I_y=\iiint_D (x^۲+z^۲)\,dD \quad , \quad I_x=\iiint_D (y^۲+z^۲)\,dD$$

چون ناحیه D متقارن است پس

$$\iiint_D x^۲dD=\iiint_D y^۲dD=\iiint_D z^۲dD$$



مقطع عرضی T در z یعنی فصل مشترک صفحه مار بر نقطه $(۰,۰,z)$ و موازی صفحه xy با T، یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به طول ساق‌های $a-z$ و مساحت $A(z)=\frac{1}{۲}(a-z)^۲$ است پس

$$\iiint_D z^۲dD=\int_۰^a z^۲A(z)dz=\frac{1}{۲}\int_۰^a z^۲(a-z)^۲dz$$

$$=\frac{1}{۲}\left[\frac{1}{۳}a^۲z^۳-\frac{1}{۲}az^۴+\frac{1}{۵}z^۵\right]_۰^a=\frac{1}{۶۰}a^۵$$

پس $\iiint_D y^۲dD=\iiint_D x^۲dD=\frac{1}{۶۰}a^۵$ بنابراین

$$I_x=I_y=I_z=\frac{1}{۶۰}a^۵+\frac{1}{۶۰}a^۵=\frac{1}{۳۰}a^۵$$

$$M=\iiint_D dD=\frac{1}{۲}\int_۰^a(a-z)^۲dz=\frac{1}{۲}\left[a^۲z-az^۲+\frac{1}{۳}\cancel{z}^۳\right]_۰^a=\frac{1}{۶}a^۳$$

در نتیجه شعاع‌های چرخش چهاروجهی $K_x=\sqrt{\frac{I_x}{M}}=\frac{a}{\sqrt{۵}}=K_y=K_z$

Scanned by CamScanner