۴۴ـ نقطه برخورد خط $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ با صفحه $x + 2y - z + 1 = 0$ را بیابید:

حل: معادله پارامتری خط را در معادله صفحه قرار می‌دهیم و با یافتن t نقطه برخورد خط با صفحه بدست می‌آید:

$$x + 2y - z + 1 = 0 \Rightarrow (1 + 2t) + 2(4t) - (2 - 3t) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2t + 8t + 3t + 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow 13t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \boxed{(x, y, z) = (1, 0, 2)}$$

نقطه برخورد خط با صفحه

۴۷ـ عددهای هادی خط برخورد صفحه‌های $x + y + z = 1$ و $x + z = 0$ را بیابید (یعنی مؤلفه‌های بردار هادی خط).

حل: معادله خط را با روش حل دستگاه می‌یابیم

$$\begin{cases} x + z = 0 \Rightarrow x = -z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

با فرض $z = t$ داریم $x = -t$ و چون $y = 1 - x - z = 1$ پس $y = 1$

بنابراین $(1, 0, -1) = m$ پس عددهای هادی خط عبارتند از $1, 0, -1$.

۵۸ـ معادله‌های متقارن خط برخورد (فصل مشترک دو صفحه) صفحه‌های $4x + 3y = z + 5$ و $z + 5 = 2x - y$

حل: از روش حل دستگاه معادله پارامتری خط را می‌یابیم و سپس از روی آن معادله متقارن خط را می‌نویسیم:

$$z = t \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = t + 5 \\ 2x - y = t + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = t + 5 \\ 6x - 3y = 3t + 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کردن}}$$

$$10x = 4t + 20 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}t + 2} \Rightarrow y = 2x - t - 5 = 2\left(\frac{2}{5}t + 2\right) - t - 5 \Rightarrow$$

$$y = \frac{4}{5}t - t - 1 = -\frac{1}{5}t - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = -\frac{1}{5}t - 1 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x - 2}{\frac{2}{5}} = \frac{y + 1}{-\frac{1}{5}} = \frac{z}{1}}$$

معادلات متقارن خط

۷۱ـ فاصله میان دو صفحه موازی $2x - 3y + z = 4$ و $4x - 6y + 2z = 3$ را بیابید

حل:

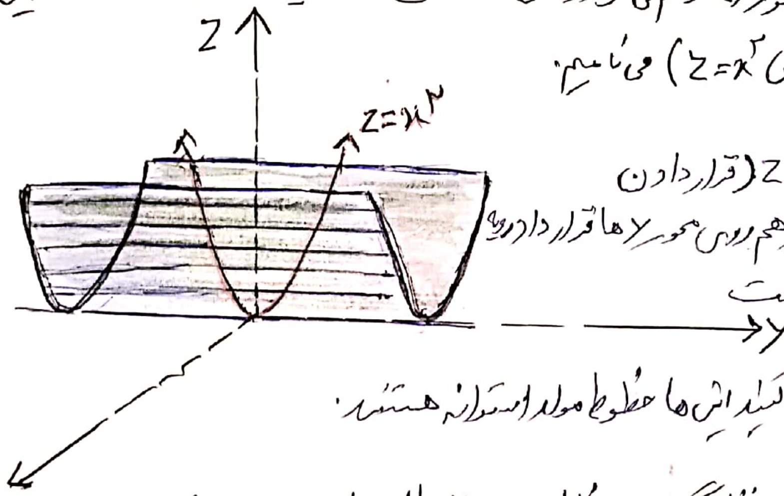
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ 2x - 3y + z - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d_1 = -4 \\ d_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix} \Rightarrow l = \frac{\left|-4 + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{5}{2\sqrt{14}}$$

یادآوری: هر معادله‌ای برحسب x و y و z در مختصات فضایی $\mathbb{R}^3$ (فضای مختصات سه بعدی) را یک رویه می‌نامیم مانند صفحه و کره - استوانه - مخروط و ...

توجه: نام دیگر رویه، سطح هم می‌باشد و برای رسم رویه‌ها می‌توان از منحنی‌های محل برخورد این رویه‌ها با صفحاتی که موازی صفحات مختصات xy و zy و zx (یا به ترتیب $z=0$ و $x=0$ و $y=0$) استفاده کرد این منحنی‌ها را مقطع یا ردها (اثرها) این رویه‌ها می‌نامیم.

استوانه‌ها: فرض کنید که c یک منحنی مسطح در صفحه باشد و L خطی باشد که در آن صفحه قرار ندارد و با منحنی c موازی نیست. اگر از هر نقطه روی c خطی موازی با خط L رسم کنیم مجموعه تمام این خطوط (خط کش‌ها) را یک استوانه می‌نامیم و معمولاً به منحنی c هادی استوانه و به خطوط رسم شده موازی با خط L را مولدهای استوانه نامیده می‌شود همچنین نام استوانه از روی منحنی هادی c گرفته می‌شود.

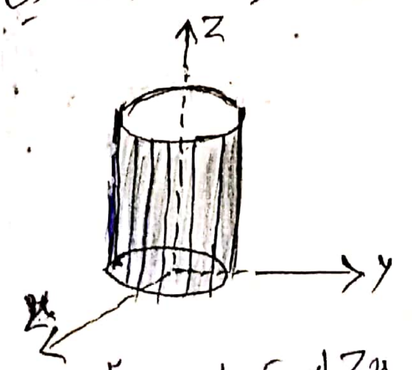
مثال ۱: اگر منحنی c را $z=x^2$ در نظر بگیریم و خط L را محور yها (یا هر خطی موازی با محور yها) در نظر بگیریم. در این صورت مجموعه تمام خطوطی که موازی با محور yها رسم می‌شود و منحنی c را قطع می‌کند یک استوانه است و این استوانه را استوانه سهموی (گرفته شده از روی سهمی $z=x^2$) می‌نامیم.



توجه: می‌توان چندین منحنی $z=x^2$ (قرار دادن چندین میل گرد شبیه $z=x^2$) کنار هم روی محور yها قرار داد رویه شبیه یک ورقه کاغذ تا خورده است

به خط‌های آبی (خط کش‌ها) نگاه کنید این‌ها خطوط مولد استوانه هستند.

مثال ۲: اگر منحنی c را $x^2+y^2=1$ در نظر بگیریم و خط L محور zها (موازی با محور zها) باشد در این صورت مجموعه تمام خطوطی که موازی با محور zها رسم می‌شود و منحنی c (دایره $x^2+y^2=1$) را قطع می‌کند یک استوانه است. این استوانه را یک استوانه دوار (گرفته شده از روی دایره $x^2+y^2=1$) می‌نامیم.



نکته ۱: طبق این دو مثال و بطور کلی هر معادله برحسب دو متغیر از سه متغیر x و y و z در فضا یک استوانه است

در مثال ۱ معادله $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ همان سهمی $z=x^2$ در صفحه zx است ولی معادله $z=x^2$ در فضا یک استوانه است

در مثال ۲ معادله $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ همان دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه xy است ولی معادله $x^2+y^2=1$ در فضا یک استوانه است.

نکته ۲ (رسم استوانه) از بی‌نهایت نسخه منحنی C استوانه در فضا رسم می‌شود. در مثال ۲ می‌توان تعداد زیادی دایره به اندازه
انتقال یافته
$x^2+y^2=1$ روی هم قرار داد تا شکل استوانه مشخص گردد (محور Z در این مثال محور تقارن استوانه است)

در مثال ۱، بی‌نهایت سهمی $z=x^2$ را (طوری که راس همه آنها روی محور y قرار دارد) رسم کرد تا استوانه سهموی مشخص گردد

تبصره: استوانه S با هادی C و خطوط جاری موازی با محور zها نمودار تنها معادله $F(x,y)=0$ است و به همین صورت معادله $F(x,z)=0$ و $F(y,z)=0$ در فضا استوانه‌هایی به ترتیب با خطوط جاری موازی محور yها و محور xها است.

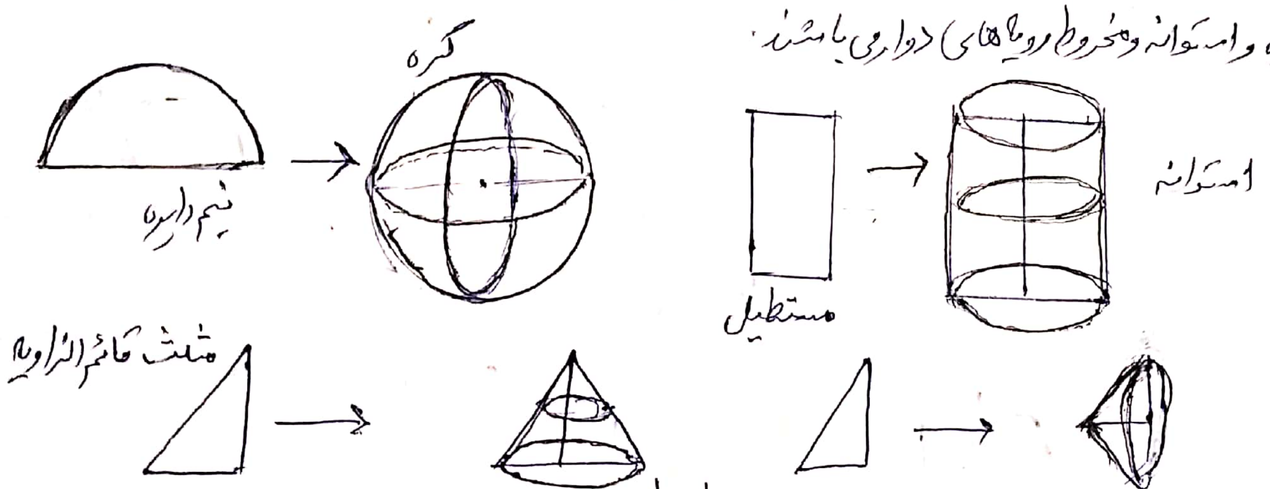
مثال ۳ الف) معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در فضا یک استوانه بیضوی است و محور zها همانند مثال ۲ محور تقارن استوانه است و همچنین خطوط مولد (جاری) آن محور zهاست. (تمرین آن را رسم کنید)

ب) معادله $xy=1$ در فضا یک استوانه هذلولوی است و خطوط جاری آن موازی با محور zها است. (رسم به عنوان تمرین)

ج) معادله $z=e^y$ در فضا یک استوانه است و خطوط جاری آن موازی با محور xها است (رسم به عنوان تمرین)

رویه (سطح) دوار: فرض کنید که C یک منحنی مسطح در یک صفحه باشد و L خطی باشد که در آن صفحه قرار دارد ولی منحنی C را قطع نمی‌کند (می‌تواند بر منحنی C مماس باشد و اگر C یک منحنی بسته باشد می‌تواند L یکی از مرزهای C باشد) از دوران منحنی C حول خط L یک رویه دوار (سطح دوار) بوجود می‌آید.

مثال ۴: از دوران نیم دایره حول قطرش یک کره بوجود می‌آید و از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاعش یک استوانه بوجود می‌آید و از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش یک مخروط بوجود می‌آید.
بنابراین کره و استوانه و مخروط رویه‌های دوار می‌باشند.



مسئله: چگونه می‌توان معادله رویه دوار را یافت و آن را رسم کرد؟

جواب: اگر معادله منحنی C در صفحه به صورت $F(y,z)=0$ (در صفحه yz) آنگاه از دوران این منحنی حول
الف) محور zها یک رویه دوار با معادله $F(\pm\sqrt{y^2+x^2}, z)=0$ بدست می‌آید. یعنی در معادله $F(y,z)=0$ نقش y را با $\pm\sqrt{y^2+x^2}$ عوض می‌کنیم و متغیر z تغییر نمی‌کند. (محور دوران به همراه متغیرش تغییر نمی‌کند)

ب) از دوران منحنی $F(y,z)=0$ حول محور yها یک رویه دوار به معادله $F(y, \pm\sqrt{z^2+x^2})=0$ بدست می‌آید یعنی نقش z را با $\pm\sqrt{z^2+x^2}$ تعویض می‌شود و متغیر y ثابت و تغییر نمی‌کند.

به عبارت دیگر: نوشتن معادله رویه دوار اگر z محور دوران است آنگاه در معادله $F(y,z)=0$ فقط به جای y قرار می‌دهیم $y=\pm\sqrt{y^2+x^2}$ و به همین صورت اگر محور y محور دوران است آنگاه در معادله $F(y,z)=0$ فقط به جای z قرار می‌دهیم $z=\pm\sqrt{z^2+x^2}$

بنابراین برای یادگیری بیشتر طبق جدول زیر عمل می‌کنیم.

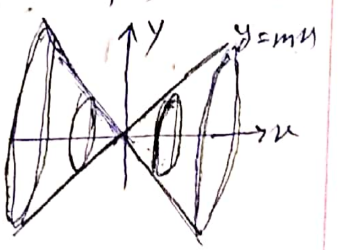
منحنی C	محور دوران	معادله رویه دوار
$F(x,y)=0$	محور x محور y	$F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ $F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$
$F(y,z)=0$	محور yها محور zها	$F(y, \pm\sqrt{z^2+x^2})=0$ $F(\pm\sqrt{y^2+x^2}, z)=0$
$F(x,z)=0$	محور xها محور zها	$F(x, \pm\sqrt{z^2+y^2})=0$ $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

مثال ۵: الف) دیدیم که از دوران نیم دایره $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$ حول محور xها (قطر نیم دایره) یک کره بدست می‌آید.

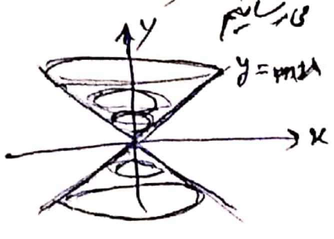
و معادله کره به صورت زیر بدست می‌آید: $x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=a^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2=a^2$

ب) از دوران خط $y=mx$ حول محور xها و همچنین حول محور yها یک رویه دوار به نام مخروط بدست می‌آید و معادله این رویه دوار و رسم آن به صورت زیر است.

$$y=mx \xrightarrow[\text{xها}]{\text{حول محور}} \pm\sqrt{y^2+z^2}=mx \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2+z^2=m^2x^2$$



$$y=mx \xrightarrow[\text{yها}]{\text{حول محور}} y=m(\pm\sqrt{x^2+z^2}) \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2=m^2(x^2+z^2)$$



مثال ۶: الف) منحنی (سهمی) $z=y^2$ حول محور zها دوران دهید و معادله رویه دوار را بیابید.

ب) منحنی (سهمی) $z=y^2$ حول محور yها دوران دهید و معادله رویه دوار را بیابید.

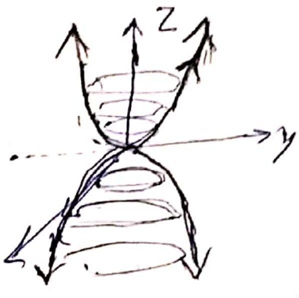
حل الف)

$$z=y^2 \Longrightarrow z=\left(\pm\sqrt{y^2+x^2}\right)^2 \Longrightarrow z=x^2+y^2$$

نام رویه دوار عبارت است از سهمیگون دوار

ب)

$$z=y^2 \Longrightarrow \pm\sqrt{z^2+x^2}=y^2 \Longrightarrow x^2+z^2=y^4$$

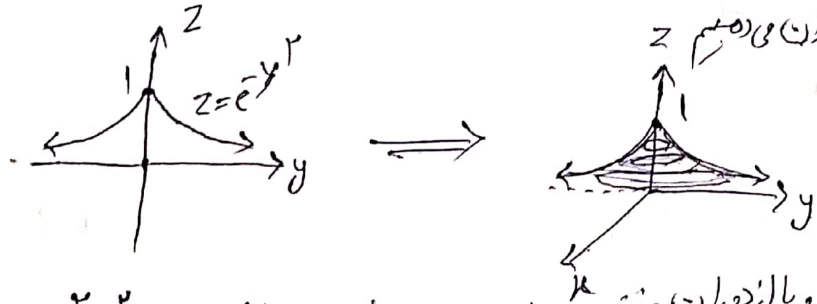


مثال ۷: الف) رویه $z=e^{-x^2-y^2}$ را توصیف کنید (نام رویه و رسم رویه)

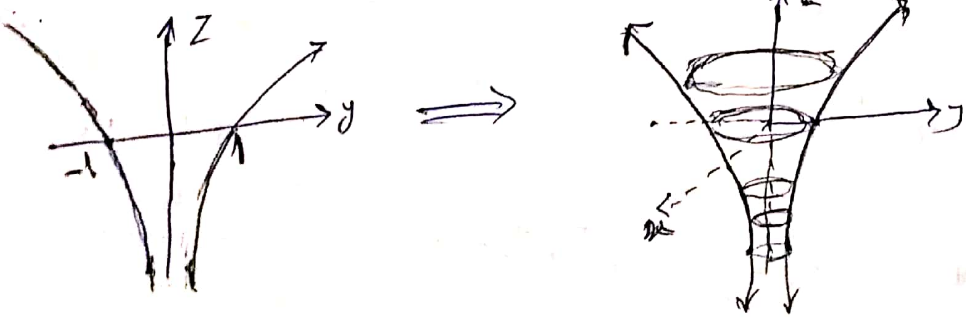
ب) رویه $z=\ln(x^2+y^2)$ را توصیف کنید. (نام رویه و رسم رویه)

حل الف) از دوران منحنی $z=e^{-x^2}$ حول محور zها یا از دوران منحنی $z=e^{-y^2}$ حول محور zها به رویه دوار $z=e^{-(x^2+y^2)}$ می‌رسیم پس نام رویه عبارت است از رویه دوار.

برای راحتی منحنی $z=e^{-y^2}$ را حول محور zها دوران می‌دهیم



حل ب) از دوران منحنی $z=\ln(x^2)$ حول محور zها و یا از دوران منحنی $z=\ln(y^2)$ حول محور zها به رویه دوار $z=\ln(x^2+y^2)$ می‌رسیم پس نام معادله رویه دوار است و رسم آن به صورت زیر است. برای راحتی منحنی $z=\ln(y^2)$ یعنی $z=2\ln y$ حول محور zها دوران می‌دهیم.



رویه‌های درجه ۲:

فرم کلی معادله رویه‌های درجه ۲ به صورت $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0$ است که در آن A و B و C و ... و I و J مقادیر ثابت هستند. با انتقال و دوران می‌توان این فرم کلی را ساده‌تر کرد و به کمک مقاطع (ردها) با صفحات مختصات می‌توان این رویه‌ها را رسم کرد.

در حالت‌های خاص (مقادیر دلخواه A و B و C و ... و I و J) با مربع کامل کردن هفت رویه درجه دوم را بررسی می‌کنیم.

اولین رویه درجه که قبلاً بررسی کرده‌ایم کره است که در بخش اول فصل یعنی مختصات فضایی به آن پرداختیم.

شش رویه درجه دوم دیگر عبارتند از

۱- بیضیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ۲- هذلولیگون بیضوی یک پارچه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

۳- هذلولیگون بیضوی دو پارچه $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ۴- سهمیگون بیضوی $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

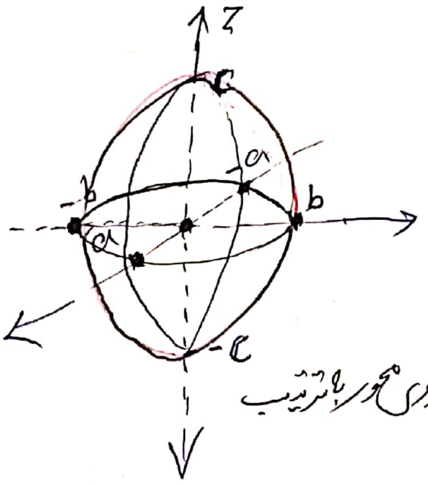
۵- مخروط بیضوی $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ ۶- سهمیگون هذلولوی $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

۱- بیضیگون (بیضیوار) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

مقاطع (ردها) این رویه با صفحات xy و yz و zx به ترتیب بیضی‌های زیر است

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad و \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad و \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

مبدأ مختصات مرکز این رویه است. اگر $a<b<c$ آنگاه نمودار بیضیگون به صورت زیر است

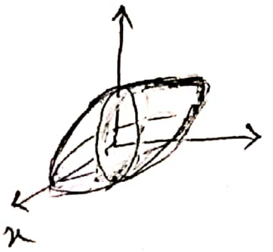


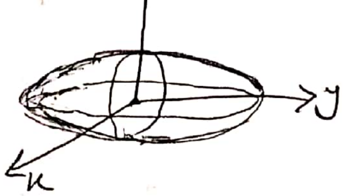
در حالت کلی‌تر معادله بیضیگون به صورت

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

است که در این صورت (α, β, γ) مرکز بیضیگون است.

اگر $a>b>c$ یا $b>a>c$ باشد بیضیگون روی محور به ترتیب xها یا yها کشیده‌تر است.

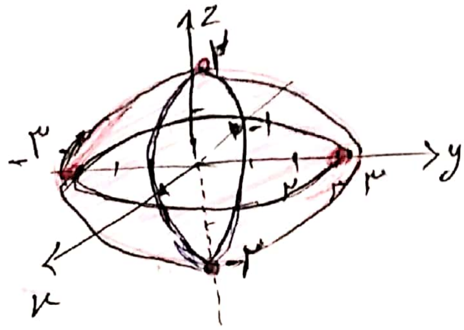




مثال ۸) رویه زیر را توصیف کنید (رسم نمودار و نام رویه)

الف) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ ب) $4x^2+y^2+4z^2-4y-24z+36=0$

حل الف) نام رویه بیضیگون با مرکز $(0,0,0)$ و $a=1$ و $b=3$ و $c=2$ است. رسم به صورت زیر است.

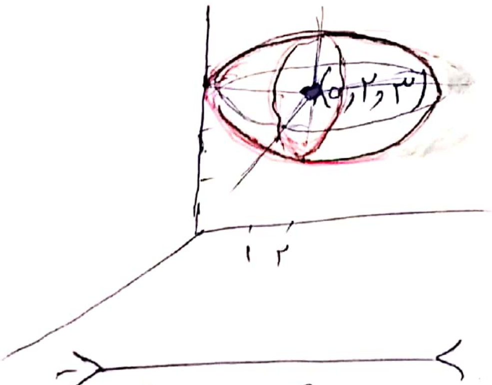


حل ب) با مربع کامل کردن داریم،

$$4x^2+(y^2-4y)+4(z^2-6z)+36=0 \Rightarrow 4x^2+(y^2-4y+4)+4(z^2-6z+9)+36=4+36$$

$$\Rightarrow 4x^2+(y-2)^2+4(z-3)^2=4 \Longrightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{(z-3)^2}{1}=1$$

نام رویه بیضیگون و مرکز آن $(0,2,3)$ و $a=1$ و $b=2$ و $c=1$ است.



یعنی بیضیگون $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ را طوری منتقل یا جابجا کنیم که مرکز آن $(0,2,3)$ باشد.

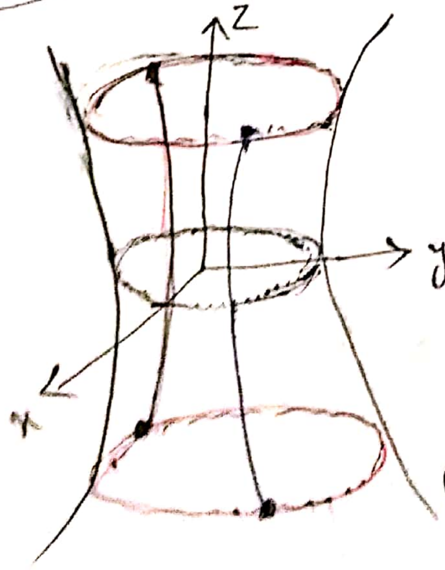
۲- هذلولیگون بیضوی (هذلولی‌وار بیضوی) یک پارچه (یک تکه) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

نام اولیه‌اش هذلولیگون است

مقاطع این رویه با صفحات $x=0$ و $y=0$ به ترتیب هذلولی‌های $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ است

مقاطع این رویه با صفحات $z=0$ و $z=k$ بیضی‌های زیر است.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{k^2}{c^2})}=1$$



پس نام اصلی رویه هذلولیگون بیضوی است

محور z محور تقارن رویه است و اگر $a=b$ باشد رویه را هذلولیگون دوار می‌نامیم (بجای بیضی دایره $x^2+y^2=a^2$ داریم)

اگر جای z و x را عوض کنیم محور xها محور تقارن رویه می‌شود

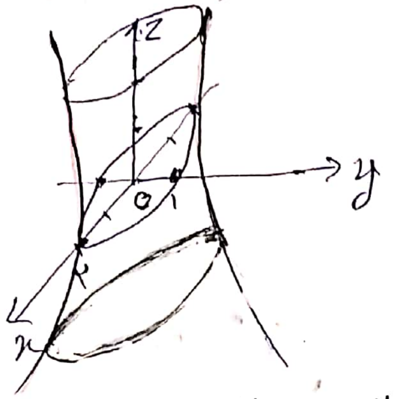
اگر جای z و y را عوض کنیم محور yها محور تقارن رویه می‌شود.

در حالت کلی معادله هذلولیگون بیضوی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$ است و (α,β,γ) جای مبداء را می‌گیرد (یعنی رویه انتقال یافته است.

مثال ۹: رویه‌های زیر را توصیف کنید: الف) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{4}=1$

ب) $x^2-y^2+z^2-4x-2y-2z=0$

حل الف) رویه یک هذلولیگون بیضوی یکپارچه است و محور zها محور تقارن رویه است و $c=2$ و $b=1$ و $a=2$



ب) با مربع کامل کردن داریم:

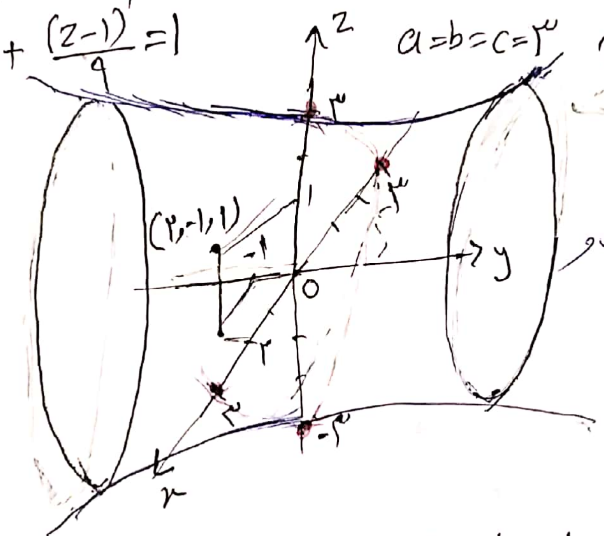
$$(x^2-4x)-(y^2+2y)+(z^2-2z)-5=0 \Rightarrow$$

$$(x^2-4x+4)-4-(y^2+2y+1)+1+(z^2-2z+1)-1-5=0$$

$$(x-2)^2-(y+1)^2+(z-1)^2=9 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{9}+\frac{(z-1)^2}{9}=1$$

نام رویه هذلولیگون دوار یکپارچه $a=b=c=3$



نقطه $(2,-1,1)$ مرکز رویه است

محور تقارن رویه موازی با محور yها است و از نقطه $(2,-1,1)$ می‌گذرد.

شکل تقریبی است

۳ـ هذلولیگون بیضوی (هذلولیوار بیضوی) دوپارچه

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

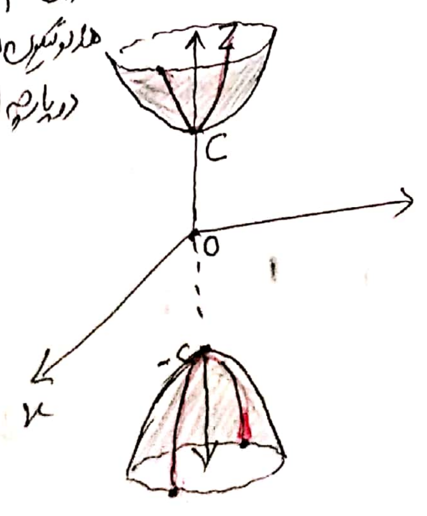
مقاطع این رویه با صفحات $x=0$ و $y=0$ به ترتیب هذلولی‌های $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ است

نام اولیه رویه هذلولیگون است

اگر $|c|<|z|$ باشد (یعنی z نمی‌تواند بین c و $-c$ باشد) آنگاه مقاطع این رویه با صفحه $z=k$ $(-c<k<c)$ بیضی‌های

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{k^2}{c^2}-1)}+\frac{y^2}{b^2(\frac{k^2}{c^2}-1)}=1$$

است. محور zها محور تقارن رویه است. پس نام اصلی رویه هذلولیگون بیضوی دوپارچه است



اگر $a=b$ باید رویه را هذلولیگون دوپارچه دوار می‌نامیم.

اگر جای z را با x یا y عوض کنیم محور تقارن این رویه به ترتیب محور xها و محور yها می‌شود. این رویه از دو قسمت تشکیل شده است

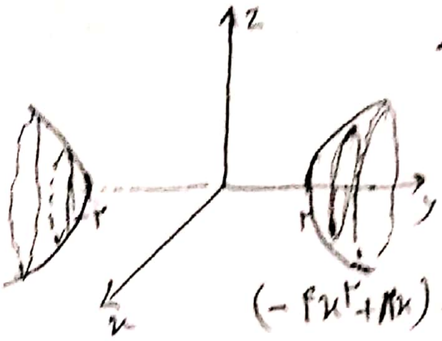
در حالت کلی معادله هذلولیگون بیضوی دوپارچه به صورت زیر است

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

و در واقع مبدأ مختصات را به نقطه (α,β,γ) انتقال می‌دهیم.

مثال ۱۰: رویه های زیر را توصیف کنید. الف) $-x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{2}=1$

ب) $-4x^2+y^2+z^2+8x-2y-4z=-2$



حل الف) نام رویه هذلولیگون بیضوی دو پارچه و $a=1$ و $b=2$ و $c=\sqrt{2}$

محور yها محور تقارن رویه است.

ب) با تربیع کامل کردن داریم.

$$(-4x^2+8x)+(y^2-2y)+(z^2-4z)=-2$$

$$-4(x^2-2x+1-1)+(y^2-2y+1-1)+(z^2-4z+4-4)=-2$$

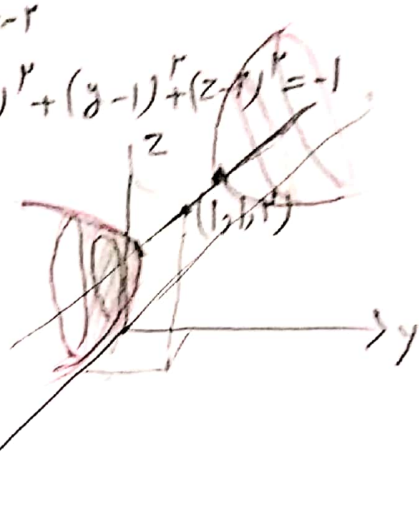
$$-4(x-1)^2+4+(y-1)^2-1+(z-2)^2-4=-2 \Rightarrow -4(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=-1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-1)^2}{1}-\frac{(z-2)^2}{1}=1$$

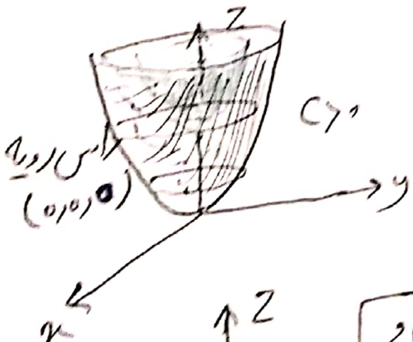
نام رویه هذلولیگون دو پارچه ($c=b=1$)

محور تقارن رویه موازی با محور xها است.

$a=\frac{1}{2}$

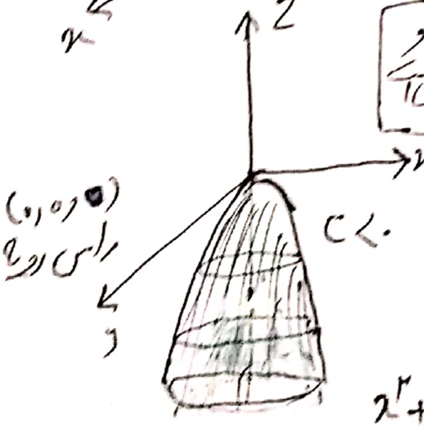


۴- سهمیگون بیضوی $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



مقاطع این رویه با صفحات $x=0$ و $y=0$ به ترتیب سهمی های $\frac{z}{c}=\frac{y^2}{b^2}$ و $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}$ است و مقاطع این رویه با صفحه $z=k$ بیضی $\frac{x^2}{a^2(\frac{k}{c})}+\frac{y^2}{b^2(\frac{k}{c})}=1$ است

نام اولیه رویه سهمیگون و نام اولیه سهمیگون بیضوی است



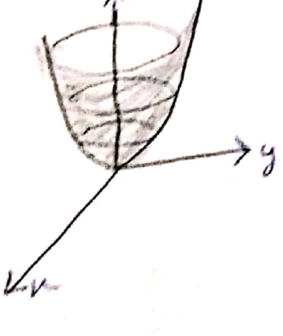
محور zها محور تقارن رویه است و اگر c مثبت باشد دهانه سهمیگون به سمت بالا و اگر $c<0$ باشد دهانه سهمیگون رویه پایین است

فرم کلی سهمیگون بیضوی به صورت $\frac{z-\gamma}{c}=\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}$ است

مثال ۱۱: رویه های زیر را توصیف کنید

الف) $z=4x^2+y^2$ ب) $x^2+2z^2-6x-y+10=0$

حل الف) نام رویه سهمیگون بیضوی



$c=4>0$

$\frac{z}{4}=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}$

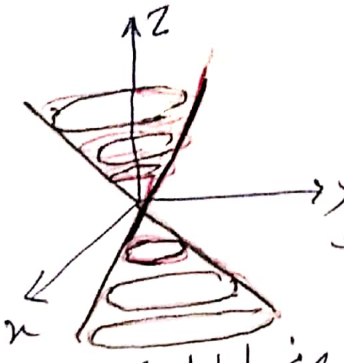
$c=4$ و $a=1$ و $b=2$

محور zها محور تقارن رویه است

راس نقطه $(0,0,0)$ است

قسمت ب) تمرین

۵- مخروط بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$



مقاطع این رویه با صفحات $x=0$ و $y=0$ به ترتیب خطوط متقاطع $\frac{z}{c}=\pm\frac{y}{b}$ و $\frac{z}{c}=\pm\frac{x}{a}$ است. نام اولیه رویه مخروط است

(به این خطوط متقاطع مخروط تباهیده یعنی تباه شده می‌گویند)

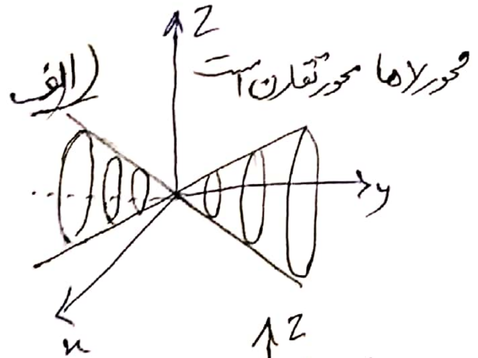
مقاطع این رویه با صفحه $z=k$ بیضی $\frac{x^2}{a^2(\frac{k^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(\frac{k^2}{c^2})}=1$ است پس نام رویه مخروط دوار است.

محور zها محور تقارن مخروط بیضوی است. [اگر $a=b$ رویه را مخروط دواری نامیم]

اگر جای z و x عوض شود محور xها محور تقارن رویه است و اگر جای z و y عوض شود محور yها محور تقارن رویه است.

مثال ۱۲: رویه‌های زیر را توصیف کنید: الف) $y^2=x^2+z^2$

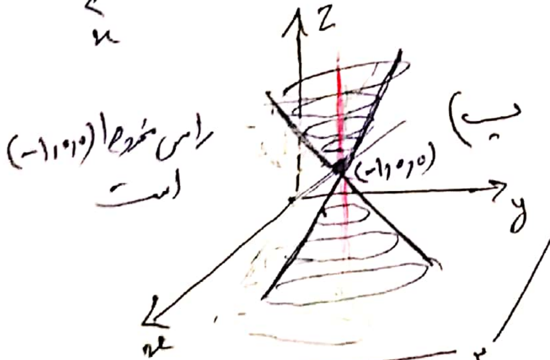
ب) $z^2=4x^2+8x+4y^2+4$



حل: نام هر دو رویه در الف و ب مخروط دوار است

$z^2=4x^2+8x+4+4y^2=4(x+1)^2+4y^2 \Longrightarrow$

$\frac{z^2}{4}=\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{y^2}{1}$ محور تقارن مخروط دوار موازی با محور zها است

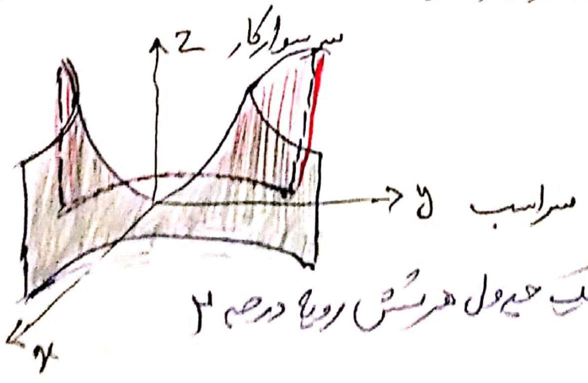


فرم کلی مخروط بیضوی به صورت $\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{c^2}$ است

۶- سهمیگون هذلولوی $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

مقاطع این رویه با صفحات $x=0$ و $y=0$ به ترتیب سهمی‌های $z=-\frac{cy^2}{b^2}$ و $z=\frac{cx^2}{a^2}$ است بنابراین نام اولیه این رویه سهمیگون است. مقاطع این رویه با صفحه $z=k$ هذلولی $\frac{x^2}{\frac{a^2}{c}}-\frac{y^2}{\frac{b^2}{c}}=1$ است، پس نام رویه سهمیگون هذلولوی است. رسم این رویه به c بستگی دارد.

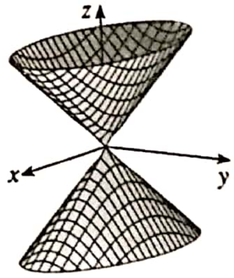
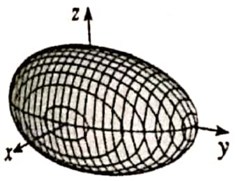
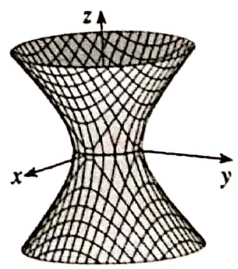
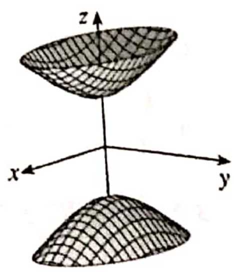
چون به این رویه زین اسبی هم می‌گویند برای $c>0$ می‌توان یک اسب در نظر گرفت که سرش به طرف محور yها است (چون y^2 ضریبش منفی است) و سوارکاری روی اسب سوار است و سر سوارکار به طرف محور zهای مثبت است و زینی که زیر پای سوارکار روی اسب قرار دارد نمودار این رویه است.



اگر c منفی باشد سر اسب به طرف محور xها قرار می‌گیرد

در صفحه بعد که قسمتی از صفحه ۸۵۶ کتاب است یک جدول هر شش رویه درجه ۲ آمده است

جدول ۱ نمودار رویه‌های دوبعدی

معادله	رویه	معادله	رویه
$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ردهای افقی بیضی‌اند. اگر $k \neq 0$ ردهای قائم در صفحه‌های $x = k$ و $y = k$ هذلولی‌اند اما اگر $k = 0$ یک جفت خط‌اند.	**مخروط** 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ همهٔ ردها بیضی‌اند. اگر $a = b = c$، بیضی‌وار کره است.	**بیضی‌وار** 
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ردهای افقی بیضی‌اند. ردهای قائم هذلولی‌اند. محور تقارن متناظر با متغیری است که ضریبش منفی است.	**هذلولی‌وار یک تکه** 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ردهای افقی بیضی‌اند. ردهای قائم سهمی‌اند. متغیری که به توان یک رسیده محور سهمی‌وار را مشخص می‌کند.	**سهمی‌وار بیضوی** 
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ اگر $k > c$ یا $k < -c$ ردهای افقی در $z = k$ بیضی‌اند. ردهای قائم هذلولی‌اند. دو علامت منفی دو تکه را مشخص می‌کنند.	**هذلولی‌وار دو تکه** 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ردهای افقی هذلولی‌اند. ردهای قائم سهمی‌اند. حالتی را که $c < 0$ رسم کرده‌ایم.	**سهمی‌وار هذلولوی**