انتگرال نامعین وروشهای انتگرال گیری

بخش 1 انتگرال نامعین

تعریف: تابع F(x) راروی بازه(فاصله)I یک تابع اولیه ی(ضدمشتق)تابع f(x) نامیم هرگاه برای هر x در I

$F'(x) = f(x)$ به عبارت دیگر f(x) برابرمشتق F(x) باشد.

مثال1:تابع $F(x) = x^3 + 2x + 4$ یک تابع اولیه(ضدمشتق)برای تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ است زیرا $F'(x) = f(x)$

همچنین $F(x) = x^3 + 2x + c$ که درآن c یک عدد حقیقی دلخواه(مقدارثابت)است نیزیک تابع اولیه ی تابع f(x) است

مثال2:تابع F(x)=cosx یک تابع اولیه ی تابع f(x)=-sinx است زیرا $F'(x) = f(x)$

قضیه: اگر F(x) و G(x) دوتابع اولیه برای f(x) روی فاصله باشند.آنگاه عددثابت c وجود دارد بطوریکه G(x)=F(x)+c

نتیجه:اگرF(x) تابع اولیه برای f(x) باشد روی فاصله I آنگاه F(x)+c نیزیک تابع اولیه ی تابع f(x) روی فاصله Iاست که درآن c ثابت اختیاری است.

تعریف: اگر y=f(x) یک تابع مشتق پذیرباشد.دیفرانسیل تابع f را با df (dy)نمایش داده می شودبه صورت $dy = df = f'(x)dx$ تعریف می کنیم که در آن x عضو D_f است.

توجه:قوانین دیفرانسیل همانندقوانین مشتق می باشد زیراکافی است که $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ به صورت $dy = f'(x)dx$ بنویسیم.

مثال3:دیفرانسیل توابع $y = 5x^2 + e^x$ و y=sinx+Lnx و $y = x^4 + 10x + 5$ بدست آورید.

حل:

$$y = x^4 + 10x + 5 \rightarrow dy = (4x^3 + 10)dx$$

$$y = 5x^2 + e^x \rightarrow dy = (10x + e^x)dx$$

$$y=\sin x+\mathrm{Ln}x\rightarrow dy=(\cos x+\frac{1}{x})dx$$

تعریف:اگر f(x) یک تابع باشد عمل معکوس دیفرانسیل گیری یا یافتن تابع اولیه ی F(x) برای تابع f(x) را انتگرال نامعین تابع f(x) می نامیم وعلامت $\int$ رابرای انتگرال نامعین بکار می بریم و

می نویسیم $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

توجه:یافتن تابع اولیه یعنی انتگرال نامعین عکس عمل مشتق گیری(ضدمشتق)است وهمچنین انتگرال نامعین عکس عمل دیفرانسیل گیری است و c راثابت انتگرال گیری می نامیم.پس:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \leftrightarrow F'(x) = f(x) \qquad (\,d(F(x)) = f(x)dx\,)$$

مثال4: باتوجه به مثال3 انتگرالهای زیر نتیجه می شد.

$$\int (10x + e^x)dx = 5x^2 + e^x + c$$

$$\int (\mathrm{cosx} + \frac{1}{x})\mathrm{dx} \ = \mathrm{sinx} + \mathrm{Ln}|\mathrm{x}| + \mathrm{c}$$

$$\int (4x^3 + 10)dx = x^4 + 10x + c$$

مثال5: چون $(sinx)' = cosx$ پس $\int cosxdx = sinx$

وهمچنین $\int cosxdx = sinx + c$

مثل6:چون $(e^x)' = e^x$ پس $\int e^x dx = e^x$ وهمچنین $\int e^x dx = e^x + c$

مثال7: چرا $\int sinxdx = -cosx + c$, $\int x^5\, dx = \frac{1}{6}x^6 + c$

حل: زیرا $d(-cosx + c) = sinxdx$ و $d\left(\frac{1}{6}x^6 + c\right) = x^5 dx$

تبصره:چون دو عمل مشتق وانتکرال نامعین معکوس هم هستند برای یادگیری بیشتردو جدول که درآن قوانین مشتق وانتگرالهای مقدماتی قرار دارد درزیر می آوریم.

به کمک قضیه زیر می توان تعداد زیادی از انتگرالها را حل کرد.

قضیه (خواص انتگرال نامعین)

(1 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ $\quad a \in \mathbb{R}$

2) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)dx$

(3 $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

(4 $\int [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x)]\, dx =$

$$a_1 \int f_1(x)\, dx + a_2 \int f_2(x)\, dx + \cdots + \ a_n \int f_n(x)\, dx$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

مثال8: انتگرالهای زیر راحل کنید.

الف) $\int (sinx - 2cosx)\ \ dx$ ب) $\int (3e^x \ + 4sinx)\, dx$

حل :الف)

$$\int (sinx - 2cosx)dx = \int sinx\, dx - 2\int cosx\, dx = -cosx - 2sinx + c$$

ب)

$$\int (3e^x \ + 4sinx)\, dx = 3\int e^x\, dx + 4\int sinx\, dx = 3e^x \ - 4cosx + c$$

جدول شماره(1)قوانین مشتق

رقم	تابع	مشتق تابع	رقم	تابع	مشتق تابع
1	Y=c	$y' = 0$	18	Y=$\sec^{-1} x$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
2	Y=ax	$y' = a$	19	Y=$\csc^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
3	Y=ax^n	$y' = nax^{n-1}$	20	Y=f(u)	$y' = u'f'(u)$
4	Y=sinx	$y' = cosx$	21	Y=e^u	$y' = u'e^u$
5	Y=cosx	$y' = -sinx$	22	Y=a^u	$y' = (Lna)a^u$
6	Y=tanx=$\frac{sinx}{cosx}$	$y' = sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$	23	Y=Lnu	$y' = \frac{u'}{u}$
7	Y=cotgx= $\frac{cosx}{sicx}$	$y' = -csc^2(x) = -(1 + cotg^2 x)$	24	y= Log_a^u	$y' = \frac{u'}{u(Lna)}$
8	Y=secx = $\frac{1}{cosx}$	$y' = secxtanx$	25	Y=sinu	$y' = u' \ cosu$
9	Y=cscx= $\frac{1}{sinx}$	$y' = -cscxcotgx$	26	Y=cosu	$y' = -u' \ sinu$
10	Y=e^x	$y' = e^x$	27	Y=tanu	$y' = u' \ sec^2(u) = u' \ (1 + tan^2(u))$
11	Y=a^x	$y' = (Lna)a^x$	28	Y=cotgu	$y' = -u' \ csc^2(u) = - u' \ (1 + cotg^2 u)$
12	Y=Lnx	$y' = \frac{1}{x}$	29	Y=secu	$y' = u' \ secutanu$
13	y= Log_a^x	$y' = \frac{1}{x(Lna)}$	30	Y=cscxu	$y' = -u' \ cscucotgu$
14	Y=$\sin^{-1} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	31	Y=$\sin^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15	Y=$\cos^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	32	Y=$\cos^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16	Y=$\tan^{-1} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	33	Y=$\tan^{-1} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
17	Y=$\cot^{-1} x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$	34	Y=$\cot^{-1} u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

جدول شماره (2) انتگرال مقدماتی

1	$\int dx = x + c$
2	$\int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c & n \neq -1 \\ \int \dfrac{1}{x}\,dx = Ln\lvert x\rvert + c & n = -1 \end{cases}$
3	$\int sinx\ dx = -cosx + c$
4	$\int cosx\,dx = -sinx + c$
5	$\int (1 + tan^2 x)\,dx = \int sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tanx + c$
6	$\int (1 + cotg^2 x)\,dx = \int csc^2\,xdx = \int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = - - cotgx + c$
7	$\int secx\,tanx\,dx = secx + c$
8	$\int cscx\,cotgx\,dx = -cscx + \mathrm{c}$
9	$\int e^x\,dx = e^x\ + c$
10	$\int a^x\,dx = \frac{1}{Lna} a^x + c$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =\ \sin^{-1} x\ + c = -\cos^{-1} x\ + c$
12	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x\ + c = -\ \cot^{-1} x + c$

توجه:در ادامه روشهای انتگرال گیری جدول شماره2 را کاملترمی کنیم.

مثال 9: بااستفاده ازجدول مقدماتی انتکرالها(جدول2) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\int \sqrt[3]{x^2}\,dx \quad , \quad 2)\int \frac{1}{x^7}\,dx \quad , \quad 3)\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$,4)\ \int (5x+6)\,dx \quad , \quad 5)\ \int (x-3)(x+3)\,dx$$

حل:

$$1)\quad \int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$2)\quad \int \frac{1}{x^7}\,dx\ = \int x^{-7}\,dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = \frac{-1}{6} x^{-6} + c = \frac{-1}{6x^6} + c$$

$$3)\quad \int x^{\frac{-1}{2}}\,dx\ = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$4)\quad \int (5x+6)\,dx\ = 5\int x\,dx + 6\int dx = \frac{5}{2}x^2 + 6x + c$$

$$5)\ \int (x-3)(x+3)\,dx = \int (x^2-9)\,dx = \int x^2\,dx - 9\int dx = \frac{x^3}{3} - 9x + c$$

تمرین

انتگرالهای زیر رامحاسبه کنید.

$$1)\ \int(3x^4+2x-4)\,dx \qquad 2)\ \int(5e^{-x}-6e^{x})\,dx \qquad 3)\ \int(6sinx+9cosx)dx$$

$$4)\ \int(x^2-1)(x^2+1)\,dx \qquad 5)\ \int(x^4+\frac{5}{x^2})\,dx \qquad 6)\int(\sqrt{x}+x^2+8x)\,dx$$

$$7)\ \int(tan^2x+cotg^2x\ +2)\,dx \qquad 8)\ \int\left(\frac{3}{x}+3^x+2x^{-8}\right)dx$$

$$9)\int(x^2-4)(x^2+4)dx$$

$$10)\ \int\frac{(x^3+x^2+2x+2)}{\sqrt{x}}dx \qquad 11)\ \int(x-1)(x^2+x+1)\,dx \qquad 12)\ \int(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}})dx$$

روش های انتگرال گیری

برای محاسبه انتگرال نامعین روشهای زیادی وجود دارد.در این بخش وبخش های بعد به مهمترین آن ها می پردازیم.

قرارداد:برای راحتی بجای انتگرال نامعبن از کلمه انتگرال استفاده می کنیم.یکی ازروش های انتگرال گیری استفاده ازتعریف انتگرال وجدول مقدماتی وخواص انتگرال است.دراین روش انتگرال رابامحاسبه ساده (استفاده ازاتحادها ، مزدوج گیری،ضرب وتقسیم واضافهوکم کردن یک عبارت به تابه زیر علامت انتگرال گیری) به یک انتگرال موجود در جدول مقدماتی تبدیل می کنبم وسپس جواب انتگرال را می نویسیم.

مثال1: انتگرال $\int\frac{1}{sin^2(x)cos^2(x)}dx$ رامحاسبه کنید.

حل: (استفاده از اتحاد $sin^2(x)+cos^2(x)=1$)

$$\int\frac{1}{sin^2(x)cos^2(x)}dx=\int\frac{sin^2(x)+cos^2(x)}{sin^2(x)cos^2(x)}dx=\int\frac{1}{cos^2(x)}dx+\int\frac{1}{sin^2(x)}dx$$
$$=tanx-cotgx+c$$

مثال2 :انتگرالهای زیرراحل کنید.

$$1)\ \int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}dx \qquad 2)\int\frac{sin2x}{sinx}dx \qquad 3)\int tan^2(x)\,dx$$

حل :

$$1)\ \int\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2(x^2+1)+1}{x^2+1}dx=\int x^2\,dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\ \tan^{-1}x\ +c$$

$$2)\quad\int\frac{sin2x}{sinx}dx=\int\frac{2sinx\ cosx}{sinx}dx=2\int cosx\,dx=2sinx+c$$

$$3)\int tan^2(x)\,dx=\int(1+tan^2(x)-1)\,dx=\int(1+tan^2(x))\,dx-\int dx$$
$$=tanx-x+c$$

مثال3 :انتگرالهای زیرراحل کنید.

$$1)\quad\int\frac{x^2+3x+1}{x^4}dx\qquad 2)\int\frac{e^x+1}{e^x}dx$$

حل :

$$1)\quad\int\frac{x^2+3x+1}{x^4}dx=\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{dx}{x^4}=\int x^{-2}\,dx+3\int x^{-3}\,dx+\int x^{-4}\,dx=$$
$$-x^{-1}-\frac{3}{2}x^{-2}-\frac{1}{3}x^{-3}+c=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+c$$

$$2)\qquad\int\frac{e^x+1}{e^x}dx=\int dx+\int\frac{1}{e^x}dx=x+\int e^{-x}\,dx=x-e^{-x}+c$$

روش تغییر متغیریاروش جانشینی

یکی دیگرازروش های انتگرال گیری روش تغییر متغیریاروش جانشینی است.این روش درمحاسبه انتگرالها به کرار به کار برده می شود. این روش را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه (تغییر متغیر)فرض کنید که f(u) تابعی باشد که روی بازه I تعریف می شودوفرض کنید g(x) تابعی باشد که برد آن بازه (فاصله) I است. اگر تابع F(u)اولیه f(u) روی I و u=g(x) باشد آنگاه

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+c=F\big(g(x)\big)+c$$

که در آن du=g′(x)dx است. (U=g(x)→ du=g′(x)dx تغییرمتغیر)

در روش تغییر متغیرمعمولا تابعی که زیر رادیکال،درمخرج کسر،درتوان،درکمان مثلثاتی یاداخل پرانتز قراردارد رابه عنوان تغییر متغیر یعنی u درنظر می گیریم وسپس از u دیفرانسیل می گیریم و در انتگرال قرارمی دهیم تاانتگرال به یک انتگرال ساده یاانتگرال موجود در جدول تبدیل شودوبه کمک جدول مقدماتی آن راحل می کنیم.این گونه تغییرمتغیر زمانی به کارمی بریم که دیفرانسیل تغییرمتغیریعنی du درانتگرال موجود باشد یا بتوانآن رادرانتگرال ساخت.

مثال4: انتگرالهای زیرراحل کنید.

الف) $\int\sqrt{5x-3}\ \mathrm{dx}$ ب) $\int tanx\,dx$ ج) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ د) $\int cotgx\,dx$

حل:

الف) $\int\sqrt{5x-3}\ \mathrm{dx}=\frac{1}{5}\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{15}(5x-3)^{\frac{3}{2}}+c$

تغییرمتغیر : $\mathrm{u=5x-3\rightarrow\quad du=5dx\quad\rightarrow dx=\frac{1}{5}du}$

ب) $\int tanx\,dx=\int\frac{sinx}{cosx}dx=-\int\frac{du}{u}=-Ln|u|+c=-Ln|cosx|+c$

تغییرمتغیر U=cosx→ du=-sinxdx

ج) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int e^u\, du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

تغییرمتغیر U=$\sqrt{x}$ → du=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$dx → $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

د) $\int cotgx\, dx = \int \frac{cosx}{sinx} dx = \int \frac{1}{u} du = Ln|u| + c = Ln|cosx| + c$

تغییرمتغیر U=sinx→ du=cosxdx

مثال5: انتگرالهای زیرراحل کنید.

الف) $\int \frac{1}{xLnx} dx$ ب) $\int \frac{1}{x(Lnx)^2} dx$ ج) $\int \frac{(Lnx)^2}{x} dx$

حل: برای هرسه انتگرال ازتغییرمتغیر u=Lnxاستفاده می کنیم بنابراین داریم:du=$\frac{1}{x}dx$

الف) $\int \frac{1}{xLnx} dx = \int \frac{dx}{u} = Ln|u| + c = Ln|Lnx| + c$

ب) $\int \frac{1}{x(Lnx)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{Lnx} + c$

ج) $\int \frac{(Lnx)^2}{x} dx = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(Lnx)^3 + c$

مثال6: انتگرالهای زیرراحل کنید.

الف) $\int \sin(ax)\, dx$ ب) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ ج) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

حل: برای انتگرال الف) ازتغییرمتغیر u=ax استفاده می کنیم بنابراین داریم:du=adx

الف) $\int \sin(ax)\, dx = \frac{1}{a}\int sinu\, du = -\frac{1}{a}cosu + c = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$

برای انتگرال ب) وج) از تغییر متغیر $\frac{x}{a} = u$ کمک می گیریم پس داریم$\frac{dx}{a} = du$

ب) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{1}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)} dx = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

ج) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2})} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

مثال7: انتگرالهای زیرراحل کنید.

الف) $\int secx\, dx$ ب) $\int cscx\, dx$

حل: برای این دو انتگرال تابع زیرعلامت انتگرال رادریک عبارت مناسب ضرب وتقسیم می کنیم سپس ازتغییرمتغیر کمک می گیریم.

الف) $\int secx\, dx = \int \frac{secx(secx+tanx)}{secx+tanx} dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c = Ln|secx + tanx| + c$

تغییر متغیر U=secx+tacx → $du = (secx + tanx)secxdx$

ب) $\int cscx\, dx = \int \frac{cscx(cscx-cotgx)}{cscx-cotgx} dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c =$

$Ln|cscx - cotgx| + c$

تغییر متغیر U=cscx-cotgx $\rightarrow du = (cscx - cotgx)cscxdx$

توجه: تغییرمتغیر دریک انتگرال منحصربفرد نیست به عبارت دیگربرای حل یک انتگرال می توان از چند تغییرمتغیر کمک گرفت.

مثال8: انتگرال $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ رابه کمک تغییر متغیرالف) u=x-1 ب) u=$\sqrt{x-1}$ محاسبه کنید.

حل: الف) تغییرمتغیر u=x-1 $\rightarrow du = dx$

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (u+1)\sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{3}{2}} du + \int u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

ب) تغییر متغییر u=$\sqrt{x-1} \rightarrow x-1 = u^2 \rightarrow dx = 2udu \;, x = u^2+1$

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (u^2+1)u2u\, du = 2\int u^4\, du + 2\int u^2\, du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + c =$$

$$\frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + c = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

تبصره: باتوجه به مثالهای4و5و6و7 می توان چند انتگرال به جدول شماره 2به صورت اضافه کرد.

ردیف	انتگرال نامعین
13	$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$
14	$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$
15	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$
16	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$
17	$\int secx\, dxdx = Ln|secx + tanx| + c$
18	$\int cscx\, dx = Ln|cscx - cotgx| + c$
19	$\int tanx\, dx = -Ln|cosx| + c$
20	$\int cotgx\, dx = Ln|cosx| + c$

تمرین

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\int x(x^2+3)^7\,dx$ 2) $\int x^2 e^{1+x^2}\,dx$ 3) $\int \frac{x+\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

4) $\int \frac{Lnx}{x}\,dx$ 5) $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$ 6) $\int xe^{x^2}\,dx$

7) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 8) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ 9) $\int cosxe^{sinx}\,dx$

10) $\int x\sin(10x^2)$ dx 11) $\int sinxe^{cocx}\,dx$

انتگرال گیری به روش جزء بجزء

یکی دیگرازروشهای انتگرال گیری روش جزء بجزء است. این روش ازفرمول دیفرانسیل

d (uv)=udv+vdu به صورت udv=d(uv)-vdu نتیجه می شود.باانتگرال گیری داریم $\int udv = uv - \int v\,du$.ازاین روش برای حل انتگرال $\int f(x)g(x)dx$ استفاده می کنیم که درآن f(x) و g(x) توابع مثلثاتی،چندجمله ای،نمایی،لگاریتمی ومعکوس مثلثاتی هستند.

دراین روش یکی ازتوابع f(x) و g(x) که مشتق آن ساده است(وبعد ازمشتق گیری درجه اش کم می شود) رابرابربا uانتخاب می کنیم وتابع دیگر همراه با dx رابرابربا dv انتخاب می کنیم از u دیفرانسیل گرفته وازdv انتگرال می گیریم وبه کمک دستور $\int udv = uv - \int v\,du$.از انتگرال $\int f(x)g(x)dx$ راحل می کنیم. به عبارت ریاضی:

$$\int f(x)g(x)dx = \int udv = uv - \int v\,du = f(x)\int g(x)\,dx - \int f'(x)\left(\int g(x)\,dx\right)dx$$

$$\begin{cases} f(x) = u \to du = f'(x)dx \\ g(x)dx = dv \to v = \int g(x)\,dx \end{cases}$$

مثال 1:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

الف) $\int \mathrm{x}\sin(x)\,dx$ ب) $\int xe^x\,dx$ ج) $\int xLnx\,dx$

حل: الف)

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ sinxdx = dv \to v = -cosx \end{cases}$$

$$\int \mathrm{x}\sin(x)\,dx = \int udv = uv - \int v\,du = -xcosx + \int cosx\,dx =$$

$$-xcosx + sinx + c$$

ب)

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ e^x dx = dv \to v = e^x \end{cases}$$

$$\int \mathrm{x}e^x\,dx = \int udv = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

ج)

$$\begin{cases} u = Lnx \to du = \dfrac{dx}{x} \\ xdx = dv \to v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int xLnx\,dx = \int udv = uv - \int v\,du = \frac{1}{2}x^2Lnx - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2Lnx - \frac{1}{4}x^2 + c$$

مثال 2:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

الف) $\int \mathrm{Lnx}\,dx$ ب) $\int \tan^{-1}x\,dx$

حل:

الف) $\int \mathrm{Lnx}\,dx = \int udv = uv - \int v\,du = xLnx - \int dx = xLnx - x + c$

$$\begin{cases} u = Lnx \rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{cases}$$

ب) $\int \tan^{-1}x\,dx = \int udv = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$

$$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + c$$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1}x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$z = 1 + x^2 \rightarrow z = 2xdx \quad \rightarrow \quad \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} =$$
$$= \frac{1}{2}Ln|z| + c\frac{1}{2}Ln(1+x^2) + c$$

توجه :دریک انتگرال ممکن است چندین باراز روش جزء بجزء استفاده شود تا انتگرال حل شود.(مثال زیر)

مثال3: انتگرال های زیر رامحاسبه کنید.

الف) $\int e^x\sin(x)\,dx$ ب) $\int e^x\,cosxdx$

حل:

1) $\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^xdx \\ dv = sinxdx \rightarrow v = -cosx \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^xdx \\ dv = cosxdx \rightarrow v = sinx \end{cases}$

طبق1) داریم:

الف) $\int e^x\sin(x)\,dx = \int udv = uv - \int v\,du = -e^xcosx + \int e^x\,cosxdx$

$$= -e^xcosx + e^xsinx - \int e^x\,sinxdx \quad \rightarrow 2\int e^x\,sinxdx = e^x(sinx - cosx) \rightarrow$$
$$\int e^x\,sinxdx = \frac{1}{2}e^x(sinx - cosx) + c$$

طبق 2) داریم:

ب) $\int e^x\cos(x)\,dx = \int udv = uv - \int v\,du = e^xsinx - \int e^x\,sinxdx =$

$$e^xsinx + e^xcosx - \int e^x\,cosxdx \quad \rightarrow 2\int e^x\,cosxdx = e^x(sin + cosx) \rightarrow$$
$$\int e^x\,cosxdx = \frac{1}{2}e^x(sinx + cosx) + c$$

تعمیم روش جزء بجزء:

فرض کنیدکه $g^{(n)}(x)$ مشتق مرتبه nام تابع g(x) باشدو f(x) تابعی باشدکه ازهرمرتبه ای دارای مشتق است.دراین صورت بااستفاده مکررازروش جزء بجزء داریم:

$$\int f(x)g^{(n)}(x)\,dx = f(x)g^{(n-1)}(x) - f'(x)g^{(n-2)}(x) + f''(x)g^{(n-3)}(x) - \cdots + (-1)^n \int g(x)f^{(n)}(x)\,dx$$

مثال4: انتگرال های زیر رامحاسبه کنید.

الف) $\int (3x^3 + x^2 + 1)\sin(x)\,dx$ ب) $\int x^5 e^x\,dx$

حل:

الف) $\int (3x^3 + x^2 + 1)\sin(x)\,dx =$

$(3x^3 + x^2 + 1)(-cosx) - (9x^2 + 2x)(-sinx) + (18x + 2)(cosx) - (18)(sinx) + c$

ب) $\int x^5 e^x\,dx = x^5e^x - (5x^4)e^x + (20x^3)e^x - (60x^2)e^x + (120x)e^x - 120e^x + c$

تمرین

انتگرال های زیر رامحاسبه کنید.

1) $\int x^2 Lnx\,dx$ 2) $\int \frac{sin2x}{e^x}dx$ 3) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

4) $\int \frac{\cot^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 5) $\int x\tan^{-1}x\,dx$ 6) $\int x^2 cosx\,dx$

7) $\int sinxLn(cosx)\,dx$ 8) $\int \cos(Lnx)\,dx$ 9) $\int \sin(Lnx)\,dx$

10) $\int \frac{x}{e^x}dx$ 11) $\int \frac{Lnx}{\sqrt{x}}dx$ 12) $\int Ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

انتگرال گیری ازتوابع مثلثاتی(توان های sinx و cosx)

برای محاسبه انتگرال های $\int cos^m(x)\,dx$ و $\int sin^n(x)\,dx$ و $\int sin^n(x)cos^m(x)\,dx$ روش های متفاوتی وجود دارد.یکی ازاین روش ها روش بازگشتی است که درتمرین های این فصل آمده است.روش دیگرکه به m و n بستگی دارد وبه صورت زیراست.

الف) اگر m و n دوعددزوج باشند می توان ازاتحادهای $cos^2(x) = \frac{1+cos2x}{2}$ و $sin^2(x) = \frac{1-cos2x}{2}$ استفاده کرد.بااستفاده ازاین اتحادها توان هایsinx و cosx کم می شود.

ب) اگر یکی از دو عدد m و n عددطبیعی فرد باشند ازتغییرمتغیرهای زیر کمک می گیریم.

اگر m فردباشدازتغییرمتغیر u=sinx استفاده می کنیم(به عبارت دیگراگرتوان cosx فردباشد u=sinx)و با جدا کردن عامل cosx از اتحاد $cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$ کمک می گیریم.

اگر n فردباشدازتغییرمتغیر u=cosx استفاده می کنیم(به عبارت دیگراگرتوان sinx فردباشد u=cosx)و با جدا کردن عاملsinx از اتحاد $sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$ کمک می گیریم.

مثال1:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

$$\text{الف}\,)\int cos^3(x)\,dx \qquad \text{ب}\,)\int sin^4(x)\,dx \qquad \text{ج}\,)\int sin^3(x)cos^2(x)\,dx$$

حل:

$$\text{الف}\,)\int cos^3(x)\,dx = \int cosx\left(1 - sin^2(x)\right)dx = \int(1 - u^2)\,dx =$$

$$u - \frac{u^3}{3} = simx - \frac{sin^3(x)}{3} + c$$

تغییرمتغیر U=sinx→ du=cosxdx

$$\text{ب}\,)\int sin^4(x)\,dx = \int\left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int[1 + cos^2 2x - 2cos2x]\,dx =$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{4}\int cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{4}\int\frac{1 + cos4x}{2}dx =$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sin4x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + c$$

$$\text{ج}\,)\int sin^3(x)cos^2(x)\,dx = \int sinx\,sin^2x cos^2x dx = -\int(1 - u^2)\,u^2 du =$$

$$-\int(u^2 - u^4)\,du = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c = -\frac{1}{3}cos^3x + \frac{1}{5}cos^5x + c$$

تغییرمتغیر U=cosx→ du=-sinxdx

مثال 2:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

$$\text{الف}\,)\int\frac{cos^4x - sin^4x}{cos^2x - sin^2x}cos^2xdx \qquad \text{ب}\,)\int sin^5x\,dx$$

حل:

$$\text{الف}\,)\int\frac{cos^4x - sin^4x}{cos^2x - sin^2x}cos^2xdx = \int\frac{(cos^2x + sin^2x)(cos^2x - sin^2x)cos^2x}{cos^2x - sin^2x}dx = \int cos^2x\,dx =$$

$$\int\frac{1 + cos2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin4x + c$$

$$\text{ب}\,)\int sin^5x\,dx = \int sinx(\,sin^2x)^2 dx = \int(1 - cos^2x)^2\,sinxdx = -\int(1 - u^2)^2\,du = -\int(1 + u^4 - 2u^2)\,du = -u - \frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + c = -cosx - \frac{1}{5}cos^5x + \frac{2}{3}cos^3x + c$$

تغییرمتغیر U=cosx→ du=-sinxdx

تبصره : انتگرال گیری ازتوانهای secx و cscx و tanx و cotgx

1) برای محاسبه انتگرال های $\int sec^p(x)\,dx$ و $\int tan^q\,(x)dx$ و $\int sec^p(x)tan^q(x)\,dx$

الف) اگر q فردباشدازتغییرمتغیر u=secx استفاده می کنیم(به عبارت دیگراگرتوان tanx فردباشد u=secx)و وبا جدا کردن عامل secxtanx از اتحاد $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ کمک می گیریم.

ب) اگر p زوج باشدازتغییرمتغیر u=tanx استفاده می کنیم(به عبارت دیگراگرتوان secx فردباشد u=tanx)و با جدا کردن عامل sec^2x از اتحاد $sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$ کمک می گیریم.

ج) برای محاسبه انتگرال $\int sec^p(x)\,dx$ می توان از رابطه باز گشتی زیر استفاده کرد(به کمک روش جزء به جزء رابطه باز گشتی بدست می آید)

$$\int sec^m x\,dx = \frac{1}{m-1} sec^{(m-2)}xtanx + \frac{m-2}{m-1}\int sec^{(m-2)}x\,dx$$

د) برای محاسبه انتگرال $\int tan^q(x)\,dx$ می توان از رابطه باز گشتی زیر استفاده کرد

$$\int tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1} tan^{(n-1)}x - \int tan^{(n-2)}x\,dx$$

2) برای محاسبه انتگرال های $\int csc^p(x)\,dx$ و $\int cotg^q\,(x)dx$ و $\int csc^p(x)cotg^q(x)\,dx$

الف) اگر q فردباشدازتغییرمتغیر u=cscx استفاده می کنیم(به عبارت دیگراگرتوان cotgx فردباشد u=cscx)و وبا جدا کردن عامل cscxcotgx از اتحاد $cotg^2(x) = csc^2(x) - 1$ کمک می گیریم.

ب) اگر p زوج باازتغییرمتغیر u=cotgx استفاده می کنیم(به عبارت دیگراگرتوان cscx فردباشد u=cotgx)و با جدا کردن عامل csc^2x از اتحاد $csc^2(x) = 1 + cotg^2(x)$ کمک می گیریم.

ج) برای محاسبه انتگرال $\int csc^p(x)\,dx$ می توان از رابطه باز گشتی زیر استفاده کرد(به کمک روش جزء به جزء رابطه باز گشتی بدست می آید)

$$\int csc^m\,xdx = -\frac{1}{m-1} csc^{(m-2)}xcotgx + \frac{m-2}{m-1}\int csc^{(m-2)}x\,dx$$

د) برای محاسبه انتگرال $\int cotg^q(x)\,dx$ می توان از رابطه باز گشتی زیر استفاده کرد

$$\int cotg^n x\,dx = -\frac{1}{n-1} cotg^{(n-1)}x - \int cotg^{(n-2)}x\,dx$$

مثال 3: انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

الف) $\int tan^3(x)\,dx$ ب) $\int tan^5(x)\,sec^7(x)dx$ ج) $\int tan^6(x)sec^4(x)\,dx$

حل :الف)

$$\int tan^3(x)\,dx = \int tanx\,tan^2xdx = \int tanx\,(sec^2x - 1)dx =$$

$$\int tanx\,sec^2xdx - \int tanx\,dx = \frac{tan^2x}{2} - Ln|secx| + c$$

$$u = tanx \to du = sec^2xdx$$

ب)

$$\int tan^5(x)\,sec^7(x)dx = \int tan^4x\,sec^6xsecxtanxdx =$$

$$\int (sec^2x - 1)^2\,sec^6xsecxtanxdx = \int (u^2 - 1)^2\,u^6du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6)\,du =$$
$$\frac{1}{11}u^{11} - \frac{2}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 = \frac{1}{11}sec^{11}x - \frac{2}{9}sec^9x + \frac{1}{7}sec^7x + c$$

$$u = secx \rightarrow du = secxtanxdx$$

ج) $$u = tanx \rightarrow du = sec^2xdx$$

$$\int tan^6(x)sec^4(x)\,dx = \int tan^6 xsec^2xsec^2xdx = \int tan^6 x(1+tan^2x)sec^2xdx =$$
$$\int u^6\,(1+u^2)du = \int(u^6+u^8)\,du = \frac{1}{7}u^7+\frac{1}{9}u^9+c = \frac{1}{7}tan^7x+\frac{1}{9}tan^9x+c$$

تبصره :برای محاسبه انتگرال الف) $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$ ب) $\int \sin(mx)\sin(\mathrm{nx})\,dx$
ج) $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ از اتحادهای متناظرشان به صورت زیر استفاده می کنیم.

الف) $sinaxcosbx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)\,x + \sin(a+b)\,x\,]$

ب) $sinaxsinbx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)\,x - \cos(a+b)\,x\,]$

ج) $cosaxcosbx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)\,x + \cos(a+b)\,x\,]$

تمرین

انتگرال های زیرراحل کنید.

1) $\int sin^3xcos^3x\,dx$ 2) $\int cos^6x\,dx$ 3) $\int sin^2ax\,dx$

4) $\int sin^5xcos^2x\,dx$ 5) $\int cos^2(\frac{x}{2})\,dx$ 6) $\int sin^3x\,dx$

7) $\int cosxcos3x\,dx$ 8) $\int \sqrt{cosx}sin^3x\,dx$ 9) $\int cosxsin^5x\,dx$

تغییرمتغیر های مثلثاتی

اگرتابع زیرعلامت انتگرال شامل عبارتهای $\sqrt{a^2+x^2}$ و $\sqrt{a^2-x^2}$ و $\sqrt{x^2-a^2}$ باشند که درآن $a>0$ است(انتگرال توابع رادیکالی) دراین صورت ازتغییرمتغیرهای مثلثاتی به صورت زیر کمک می گیریم.

الف)اگرانتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2+x^2}$ باشد ازتغییرمتغیر $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ x=atanθ
ویا $(0<\theta<\pi)$ x=acotgθ استفاده می کنیم. دراین صورت اگر x=atanθ
آنگاه $dx = a(1+tan^2\theta)d\theta$ و

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tan^2\theta} = a\sqrt{1+tan^2\theta} = a|sec\theta| = asec\theta$$
$$(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$$

زیرا$1+tan^2\theta = sec^2\theta$

ب)اگرانتگرال شامل عبارت $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد ازتغییرمتغیر $(\theta\epsilon[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}))$ x=asecθ استفاده می کنیم.
دراین صورت اگر x=asecθ آنگاه $dx = \mathrm{asec\theta}\,tan\theta\,d\theta$ و

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta-a^2} = a\sqrt{sec^2\theta-1} = a|tan\theta|$$
$$= \mathrm{atan}\theta \quad (\theta\epsilon[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}))$$

زیرا$tan^2\theta = sec^2\theta - 1$

ج)اگرانتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2 - x^2}$ باشد ازتغییرمتغیر $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le\le \frac{\pi}{2})$ x=asinθ ویا x=acosθ $(0 \le \theta \le \pi)$ استفاده می کنیم.

دراین صورت اگر x=asinθ آنگاه $dx = acos\theta d\theta$ و

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sin^2\theta} = a\sqrt{1 - sin^2\theta} = a|cos\theta| = acos\theta$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right)$$

زیرا$1 - sin^2\theta = cos^2\theta$

بطورخلاصه این تغییرمتغیرها درجدول زیر می آوریم.

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
x=asecθ $dx = \mathrm{a}\sec\theta\, tan\theta\, d\theta$ $\sqrt{x^2 - a^2} = \mathrm{a}\tan\theta$	x=atanθ $dx = a(1 + tan^2\theta)d\theta$ $\sqrt{a^2 + x^2} = asec\theta$	x=asinθ $dx = acos\theta d\theta$ $\sqrt{a^2 - x^2} = acos\theta$

مثال1:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

الف) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}dx$ ب) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}dx$ ج) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

حل:

الف)
$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}dx = \int \frac{sec^2\theta}{tan^2\theta sec\theta}d\theta = \int \frac{sec\theta}{tan^2\theta}d\theta = \int \frac{cos\theta}{sin^2\theta}d\theta$$
$$= -\frac{1}{sin\theta} + c = -\frac{xx}{\sqrt{1 + x^2}} + c$$

$$x = tan\theta \to dx = sec^2\theta d\theta \quad ,\sqrt{1 + x^2} = sec\theta \quad ,sin\theta = \frac{tan\theta}{\sqrt{1 + tan^2\theta}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\sin\theta = u \to du = cos\theta \quad \to\to \int \frac{cos\theta}{sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{sin\theta} + c$$

$$ب) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{2sec\theta tan\theta}{\sqrt{4sec^2\theta-4}}d\theta = \int \frac{2sec\theta tan\theta}{2tan\theta}d\theta = \int sec\theta\, d\theta$$
$$= Ln|sec\theta + tan\theta| + c = Ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + c$$

$$x = 2sec\theta \rightarrow dx = 2sec\theta tan\theta d\theta \quad , \sqrt{x^2-4} = 2tan\theta \quad , \frac{x}{2} = sec\theta$$

$$ج) \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int cos\theta cos\theta\, d\theta = \int cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{sin2\theta}{4} + c = \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$$

$$x = sin\theta \rightarrow dx = cos\theta d\theta \quad , \sqrt{1-x^2} = cos\theta \;, \theta = \sin^{-1}x \;\;, sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$$

مثال2:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

$$الف) \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx \qquad ب) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$$

حل:

$$الف) \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{9sin^2\theta 3cos\theta}{3cos\theta}d\theta = 9\int sin^2\theta\, d\theta = 9\int \frac{1-cos2\theta}{2}d\theta =$$
$$\int \frac{9}{2}d\theta - \frac{9}{2}\int cos2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}sin2\theta + c = \frac{9}{2}\sin^{-1}(\frac{x}{3}) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c$$

$$x = 3sin\theta \rightarrow dx = 3cos\theta d\theta \quad , \sqrt{1-x^2} = 3cos\theta \;, \theta = \sin^{-1}(\frac{x}{3}) \;\;, sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$$

$$ب) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{2sec\theta tan\theta}{2sec\theta\sqrt{4sec^2\theta-4}}d\theta = \int \frac{tan\theta}{2tan\theta}d\theta = \int \frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}\theta + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}(\frac{x}{2}) + c$$

$$x = 2sec\theta \rightarrow dx = 2sec\theta tan\theta d\theta \quad , \sqrt{x^2-4} = 2tan\theta \quad , \frac{x}{2} = sec\theta \;\;, \theta = \sec^{-1}(\frac{x}{2})$$

تمرین

انتگرال های زیرراحل کنید.

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0)$ 2) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx \quad (a>0)$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$ 4) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0)$

7) $\int x^3\sqrt{4-x^2}\, dx$ 8) $\int \frac{(Lnx)^3}{x\sqrt{(Lnx)^2-4}}dx$

9) $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}dx$ 10) $\int x^2\sqrt{25-x^2}\, dx$

انتگرال گیری از توابع گویا(روش تجزیه کسرها)

دراین بخش انتگرال توابع گویا به صورت $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ راکه درآن f(x) و g(x) دوچند جمله ای به صورت زیر هستندرا به روش تجزیه کسرها حل می کنیم.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

اگر درجه f(x) یعنی n بزرگترازدرجه g(x) یعنی m باشد بااستفاده ازتقسیم چندجمله ای ها، f(x) رابر g(x) تقسیم می کنیم.دراین صورت دوچندجمله ای p(x) و r(x) وجود دارندکه درجه r(x) ازدرجه g(x) کمتر است و

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \to \quad \int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int p(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}dx$$

برای حل $\int \frac{r(x)}{g(x)}dx$ که درجه r(x)کمتر ازدرجه g(x) است چندجمله ای g(x) رابه عبارتهای تجزیه ناپذیر ازدرجه1و2تجزیه می کنیم g(x) می تواند به صورت های زیر تجزیه شود.

الف) $g(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$

که در آنها a_i هااعداد حقبقی متمایزهستند.به عبارت دیگر g(x) ریشه های متمایز دارد.

ب) $g(x) = (x-a_1)^r(x-a_2)^s\ldots(x-a_l)^l$

یعنی g(x) ریشه های تکراری دلرد

ج) $g(x) = (ax^2+bx+c)(x-d)\ldots(x-t)$

درتجزیه g(x) عبارت درجه 2مانند $ax^2 - bx + c$ وجود دارد

د) $g(x) = (ax^2+bx+c)^r(x-d)(x-c)$

ئرتجزیه g(x) عبارت درجه 2مانند $ax^2 + bx + c$ چند بارتکرارشده است. همچنین ممکن استکه در تجزیه g(x) تمام حالت های بالا با هم موجود باشند.

روش تجزیه کسرها برای هرحالت جداگانه بیان می کنیم وبرای هرحالت مثال می آوریم.

حالت الف) $g(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$

$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1$ متمایز هستند.دراین حالت فرض می کنیم:

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a_m)}$$

که درآن A_1 و A_2 و...و A_mمقادیرثابتی هستند که بایدمقدارآنها راتعیین کنیم که بامخرج مشترک گیری ومتحدقراردادن صورت های دو طرف تساوی A_1 و A_2 و...و A_m را معین می کنیم سپس انتگرالهای زیر راحل می کنیم..

$$\int \frac{r(x)}{g(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}dx + \cdots + \int \frac{A_m}{x-a_m}dx$$
$$= A_1 Ln|x-a_1| + A_2 Ln|x-a_2| + \cdots A_m Ln|x-a_m| + c$$

مثال1:انتگرال $\int \frac{dx}{x-x^3}$ راحل کنید.

حل: $g(x) = x - x^3 = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} = \frac{(1-x^2)A + Bx(1+x) + Cx(1-x)}{x-x^3}$$

برای محاسبه A وB و C به دو روش وجود دارد.

1)با برابر قراردادن صورت های دو طرف تساوی وتشکیل یک دستگاه توسط ضرایب مجهول وحل آن

2) با برابر قراردادن صورت های دو طرف تساوی ودادن مقادیر دلخواه به x و یافتن A وB و C

پس طبق روش دوم داریم.

$$(1-x^2)A+Bx(1+x)+Cx(1-x)=1$$

$$x=0\rightarrow A=1 \quad , \quad x=1\rightarrow 2B=1\rightarrow B=\frac{1}{2}$$
$$, \quad x=-1\rightarrow -2C=1\rightarrow C=\frac{-1}{2}$$

باجایگذاری داریم:

$$\int \frac{1}{x-x^3}dx=\int \frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$=Ln|x|-\frac{1}{2}Ln|1-x|-\frac{1}{2}Ln|x+1|+c$$

مثال2:انتگرال $\int \frac{xdx}{x^2+2x-3}$ راحل کنید.

حل: $g(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{(x+3)A+B(x-1)}{x^2+2x-3}$$
$$(x+3)A+B(x-1)=x$$

$$x=1\rightarrow 4A=1\rightarrow A=\frac{1}{4} \quad , \quad x=-3\rightarrow -4B=-3\rightarrow B=\frac{3}{4}$$

باجایگذاری داریم:

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{3}{4}\int \frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{3}{4}Ln|x+3|+c$$

حالت ب) $g(x)=(x-a_1)^r(x-a_2)^s\ldots(x-a_l)^l$

دراین حالت بعضی ازعوامل درجه 1درتجزیه تکرار شده اند که به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(x-a_1)^r}+\cdots+\frac{B_1}{x-a_l}+\frac{B_2}{(x-a_l)^2}+\cdots+\frac{B_l}{(x-a_l)^l}$$

ومانند حالت الف)مقادیر A_i ها و B_j ها را می یابیم.

مثال3: انتگرال $\int \frac{x}{(x+2)^2(x+1)}dx$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)(x+2)+C(x+1)}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$A(x+1)^2+B(x+1)(x+2)+C(x+1)=x$$

x=0−1 $\rightarrow A=-1$, $x=-2\rightarrow -C=-2\rightarrow C=\ 2$ $x=0\rightarrow 4A+2B+C=0\rightarrow 2B=-4A-C=4-2=2\quad\rightarrow B=1$

باجایگذاری داریم:

$$\int\frac{x}{(x+2)^2(x+1)}dx=-\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x+2}dx+2\int\frac{1}{(x+2)^2}dx$$
$$=-Ln|x+1|+Ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+c$$

مثال4: انتگرال $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$1=Ax(x-1)+B(x-1)+cx^2$$

$x=0\rightarrow 1=-B\rightarrow B=-1$, $x=1\rightarrow C=1$, $x=2\rightarrow 1$ $=2A+B+4C\quad\rightarrow\quad 2A=1-B-4C=1+1-4=-2\rightarrow A$ $=-1$

باجایگذاری داریم:

$$\int\frac{dx}{x^3-x^2}=-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x-1}=-Ln|x|+\frac{1}{x}+Ln|x-1|+c$$

حالت ج)در تجزیه g(x) عبارت درجه 2 مانند ax^2+bx+c موجود باشد.

اگر $g(x)=(ax^2+bx+c)(x-d)\ldots(x-t)$ آنگاه

$$\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{D}{x-d}+\cdots+\frac{R}{x-r}$$

حالت د) در تجزیه g(x) عبارت درجه 2 مانند ax^2+bx+c تکرار شده باشد.یعنی

$$g(x)=(ax^2+bx+c)^r(x-d)(x-c)$$

در این صورت

$$\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}+\frac{D}{x-d}+\frac{E}{x-t}$$

برای دو حالت ج ود نیز همانند دو حالت الف وب مقادیر A_i هاو B_j ها وD و E و R را می یابیم.

مثال5:انتگرال های زیررامحاسبه کنید.

الف) $\int\frac{dx}{x^3+x}d$ ب) $\int\frac{dx}{(x+2)(x^2+1)}$

حل :الف)

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(\ x^2+1\ )}$$

$$A(x^2+1)+x(Bx+C)=1$$

$$x=0\to A=1 \quad ,x=\pm 1\to \begin{cases}2A+B+C=1\\ 2A+B-C=1\end{cases}\to C=0\ \ B=-1$$

$$\int \frac{dx}{x^3+x}=\int \frac{dx}{x}+\int \frac{-x}{x^2+1}dx=Ln|x|-\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+c$$

زیرا

$$\int \frac{-x}{x^2+1}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=-\frac{1}{2}Ln|u|+c=-\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+c \quad ,u=x^2+1 \to du=xdx$$

ب)

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)=1$$

$$x=-2\to 5A=1\to A=\frac{1}{5}$$
$$\begin{cases} x=0\to A+2C=1\ \to 2C=\frac{4}{5}\ \to C=\frac{2}{5}\\ x=1\to 2A+3B+3C=1\to 3B=-\frac{3}{5}\to B=-\frac{1}{5}\end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2}+\frac{1}{5}\int \frac{-x+2}{x^2+1}dx\ =\frac{1}{5}Ln|x+2|-\frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}dx+\int \frac{dx}{x^2+1}=$$
$$\frac{1}{5}Ln|x+2|-\frac{1}{10}Ln(x^2+1)+\frac{2}{5}\tan^{-1}x+c$$

زیرا

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}Ln|u|+c=\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+c$$

$$u=x^2+1\to du=xdx$$

مثال 6:انتگرال $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{1}{x(x^2+1\,)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1\,)^2}$$
$$=\frac{A(x^2+1\,)^2+(Bx+C)(x^2+1\,)x+(Dx+E)x}{x(x^2+1\,)^2}$$

$$A(x^2+1\,)^2+(Bx+C)(x^2+1\,)x+(Dx+E)x=1$$
$$\to (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+C)x^2+Ex+A=1$$

مقدار ثابت دوطرف تساوی: A=1   ضریب x^4 : A+B=0 پس B=-1

ضریب x^3 : C=0   ضریب x^2 : 2A+B+D=0 پس D=-1

ضریب x: C+E=0 پس E=0

بنابراین داریم:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^1+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = Ln|x| - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

زیرا:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}Ln|u| + c = \frac{1}{2}Ln(x^2+1) + c \quad ,u = x^2+1 \to du = xdx$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2u} + c = \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad ,u = x^2+1 \to du = xdx$$

مثال 7:انتگرال $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ راحل کنید.

حل

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a=x} = \frac{A(a+x)+B(a-x)}{a^2-x^2}$$

$$A(a+x) + B(a-x) = 1$$

x=-a→ $2B = 1 \to B = \frac{1}{2a}$, $x = a \to 2A = 1 \to A = \frac{1}{2a}$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x} = -\frac{1}{2a}Ln|a-x| + \frac{1}{2a}Ln|a+x| + c = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

تمرین

1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ 2) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$

3) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ 4) $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$

5) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$ 6) $\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$ 8) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)}$

9) $\int \frac{dx}{x^2(1+x)^2}$ 10) $\int \frac{4xdx}{(1-x^2)^2(1+x^2)}$

11) $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$ 12) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

13) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

راهنمایی درتمرین 12و13 ازتغییرمتغیر u=x^6 کمک بگیرید.

انتگرال گیری ازتوابع گویای مثلثاتی

دراین بخش به حل انتگرال گویا برحسب sinx و cosx معروف به توابع گویای مثلثاتی که با R(sinx ,cosx) نمایش می دهیم می پردازیم.

دو روش برای حل این انتگرالها یعنی $\int R(sinx\,, cosx)\,dx$ وجود دارد .

روش تغییرمتغیر عمومی(کلی) وروش تغییرمتغیرخصوصی(جزئی).

روش تغییرمتغیر عمومی:این تغییرمتغیر $z=\tan(\frac{x}{2})$ است که معادل آن $x=2\tan^{-1}z$ است.دراینصورت با محاسبه داریم

$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}\quad ,cosx=\frac{1-z^2}{1+z^2}\quad ,sinx=\frac{2z}{1+z^2}$$

باجایگذاری dx و sinx و cosx در انتگرال به یک انتگرال گویا برحسب z می رسیم وبه کمک روش تجزیه کسرها آن راحل می کنیم.

مثال1:انتگرال $\int\frac{dx}{2+2sinx+cosx}$ را حل کنید.

حل: با تغییرمبغیر عمومی $z=\tan(\frac{x}{2})$ داریم

$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}\quad ,cosx=\frac{1-z^2}{1+z^2}\quad ,sinx=\frac{2z}{1+z^2}$$

باجایگذاری در انتگرال داریم

$$\int\frac{dx}{2+2sinx+cosx}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2+\frac{4z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{2+2z^2+4z+1-z^2}$$
$$=\int\frac{2dz}{z^2+4z+3}=2\int\frac{dz}{(z+2)^2-1}=-Ln\left|\frac{1+(z+2)}{1-(z+2)}\right|+c$$
$$=-Ln\left|\frac{3+\tan(\frac{x}{2})}{-1-\tan(\frac{x}{2})}\right|+c=-Ln\left|\frac{3+\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan(\frac{x}{2})}\right|+c$$

زیرا طبق مثال7بخش6.7داریم (a=1 ,x=z+2)

$$\int\frac{dz}{(z+2)^2-1}=-\frac{1}{2}Ln\left|\frac{1+(z+2)}{1-(z+2)}\right|+c$$

مثال2:انتگرال $\int\frac{dx}{1-sinx+cosx}$ را حل کنید.

حل: باتغییرمتغیرعمومی$z=\tan(\frac{x}{2})$داریم:

$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}\quad ,cosx=\frac{1-z^2}{1+z^2}\quad ,sinx=\frac{2z}{1+z^2}$$

باجایگذاری در انتگرال داریم

$$\int\frac{dx}{1-sinx+cosx}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{1+z^2-2z+1-z^2}=\int\frac{2dz}{2-2z}=\int\frac{dz}{1-z}=-Ln|1-z|=$$
$$-Ln|1-\tan(\frac{x}{2})|+c$$

توجه:روش تغییرمتغیر عمومی اغلب طولانی است ولی همواره می توان از آن استفاده کرد.

روش تغییرمتغیر خصوصی(جزئی) درانتگرال مثلثاتی : می توان ازسه شرط زیر کمک گرفت:

1) اگر (R(-sinx,-cosx) = R (sinx ,cosx آنگاه ازتغییرمتغیر z=tanx استفاده می کنیم در ای صورت بامحاسبه داریم :

$$dx = \frac{dz}{1+z^2} \quad , \quad sinx = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad , \ cosx = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad , \quad x = \tan^{-1} z$$

2) اگر R(-sinx,=cosx) =- R (sinx ,cosx) آنگاه ازتغییرمتغیر z=cosx استفاده می کنیم

3) اگر R(sinx,-cosx) =- R (sinx ,cosx) آنگاه ازتغییرمتغیر z=sinx استفاده می کنیم

مثال3: انتگرال $\int \frac{dx}{1+sin^2x}$ را حل کنید.

حل: حالت 1) برقراراست بنابراین ازتغییرمتغیر z=tanx کمک می گیریم و

$$dx = \frac{dz}{1+z^2} \quad , \quad sinx = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad , \ cosx = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad , \quad x = \tan^{-1} z$$

$$\int \frac{dx}{1+sin^2x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \int \frac{dz}{1+\left(\sqrt{2}z\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}z) + c$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}tanx\right) + c$$

مثال4:نشان دهید که $\int secxdx = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right| + c$

حل:

$$\int secx\, dx = \int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{cosx}{cos^2x}dx = \int \frac{cosx}{1-sin^2x}dx = \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + c = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right| + c$$

ازحالت 3)استفاده ازتغییرمتغیر z=cosx کمک گرفته ایم.

نکته:در مثال زیر اگر ازتغییرمتغیر عمومی استفاده کنیم به انتگرالی می رسیم که محاسبه آن طولانی است. ولی بااستفاده از جدول مقدماتی (ضرب صورت ومخرج تابع زیرعلامت انتگرال در مزدوج عبارت واقع در مخرج)به یک انتگرال ساده می رسیم.

مثال5: انتگرال $\int \frac{sinx}{1-sinx}dx$ راحل کنید.

حل: صورت ومخرج تابع زیرعلامت انتگرال در مزدوج 1-sinx ضرب می کنیم.

$$\int \frac{sinx}{1-sinx}dx = \int \frac{sinx}{1-sinx} \times \frac{1+sinx}{1+sinx}dx = \int \frac{sinx+sin^2x}{1-sin^2x}x\, dx$$
$$= \int \frac{sinx+sin^2x}{coc^2x}dx = \int \frac{sinx}{cosx^2x}dx + \int tan^2x$$
$$= -\frac{1}{cosx} + \int (1+tan^2x)\, dx - \int dx = -secx + tanx - x + c$$

درپایان چند انتگرال می آوریم که مرجعی برای برخی ازانتگرال ها هستند.

.1) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c \qquad a > 0$

2) $\int sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}sin^{(n-1)}xcosx + \frac{n-1}{n}\int sin^{(n-2)}x\, dx$

3) $\int cos^n\, xdx = \frac{1}{n}cos^{(n-1)}xsinx + \frac{n-1}{n}\int cos^{(n-2)}x\, dx$

4) $\int tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1}tan^{(n-1)}x - \int tan^{(n-2)}x\, dx$

5) $\int cotg^n\, xdx = -\frac{1}{n-1}cotg^{(n-1)}x - \int cotg^{(n-2)}x\, dx$

6) $\int sec^m x\, dx = \frac{1}{m-1}sec^{(m-2)}xtanx + \frac{m-2}{m-1}\int sec^{(m-2)}x\, dx$

7) $\int csc^m\, xdx = -\frac{1}{m-1}csc^{(m-2)}xcotgx + \frac{m-2}{m-1}\int csc^{(m-2)}x\, dx$

8) $\int cscx\, dx = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{1-cosx}{1+cosx}\right| + c$

9) $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{(n-1)}e^x\, dx$

تمرین

انتگرال های زیرراحل کنید.

$$1)\int\frac{dx}{8-4sinx+7cosx}\qquad 2)\int\frac{dx}{1+sinx}\qquad 3)\int\frac{dx}{1-sinx}$$

$$4)\int\frac{dx}{1+cosx}\qquad 5)\int\frac{dx}{1-cosx}\qquad 6)\int\frac{dx}{tanx-1}$$

$$7)\int\frac{dx}{1+3cos^2x}\qquad 8)\int\frac{dx}{cosx+2sinx+3}\qquad 9)\int\frac{cosx}{1+cosx}dx$$

$$10)\int\frac{dx}{sinx+tanx}\qquad 11)\int\frac{dx}{4sinx-3cosx}\qquad 12)\int\frac{dx}{4sin^2x-3cos^2x}$$

انتگرال مجازی (ناسره)

یادآوری :برای تعریف انتگرال معین$\int_a^b f(x)dx$ دیدیم که I=[a,b} یک بازه بسته وتابع f(x) روی این بازه بسته باید تعریف شده باشد (بهتر بود که تابع f(x) روی این بازه پیوسته باشد).حال اگر بازه I بسته نباشد ویا اینکه تابع f(x) روی بازه I ناپیوسته باشد آیا انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ تعریف می شود یا خیر؟

جواب :بله چنین انتگرالی را انتگرال مجازی (ناسره) می نامیم (یعنی بازه I بسته نباشد ویا اینکه تابعf(x روی بازه (بسته یاباز) I ناپیوسته باشد)

برای حل انتگرال ناسره،این انتگرال را به دونوع نوع اول ونوع دوم تقسیم بندی می کنیم .

انتگرال ناسره نوع اول(بازه I بسته (کراندار)نیست)

تعریف (انتگرال ناسره نوع اول)

الف) اگر به ازای هر عدد مانند t که $t \geq a$ انتگرال $\int_a^t f(x)dx$ وجود داشته باشد (یعنی تابع f(x) روی این بازه بسته [a,t] تعریف شده باشد) آنگاه $\int_a^b f(x)dx \ = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ به شرطی که حد $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ موجود باشد (در واقع I=[a,+∞))

ب)) اگر به ازای هر عددt مانند که $t \leq b$ انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ وجود داشته باشد (یعنی تابع f(x) روی این بازه بسته [t,b] تعریف شده باشد) آنگاه $\int_a^b f(x)dx \ = \lim_{t\to+\infty}\int_t^b f(x)dx$ به شرطی که حد $\lim_{t\to+\infty}\int_t^b f(x)dx$ موجود باشد (در واقع $I\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \ = (-\infty, b]$)

و انتگرالهای ناسره $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ را همگرا نامیم به شرطی که حدهای قبل موجود باشد در غیر ابن صورت این دو انتگرال ناسره واگرا می نامیم.

ج) اگرانتگرالهای ناسره $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ هردوهمگرا باشند آنگاه

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ که درآن a عدد حقیقی دلخواهی است.

مثال 1:همگرایی ویا واگرایی انتگرالهای زیر رابررسی کنید وآنها را تعبیر هندسی کنید.

الف) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ و $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

حل: الف) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ واگرا است زیرا

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} [Lnx]_1^b = \lim_{b\to+\infty} Lnb = +\infty$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} [-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to+\infty} [-\frac{1}{b}+1] = 1$$

پس$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ همگرا است وطبق شکل (1)مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x}$ در فاصله $[1,+\infty)$ برابر بایک واحد مربع است.ولی طبق شکل (2)مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ در فاصله $[1,+\infty)$ خیلی عدد بزرگی است.

حل :ب) چون $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ پس باید هر دو انتگرال $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$ و $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ رابررسی کنیم.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{+b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} [\tan^{-1} x]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} [\tan^{-1} x]_a^0 = -\lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} a$$
$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

بنابر این $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$ یعنی مساحت قسمت هاشور خورده شکل (3) برابر π است.

تعریف (انتگرال ناسره نوع دوم)فرض کنید که تابع f(x) روی بازه$I=[a,b]$ در نقطه $c \in I$ناپیوسته باشد و $\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty$ به عبارت دیگرخط x=c مجانب قائم نمودار f(x) باشد .در این صورت هر سه نمونه انتگرال $\int_{c}^{b} f(x)dx$ و $\int_{a}^{c} f(x)dx$ و $\int_{a}^{b} f(x)dx$ به انتگرال نوع دوم معروف هستند وبه صورت زیر تعریف می شوند.

الف) $\int_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to c^+} \int_{t}^{b} f(x)dx$ (به شرط وجود حد)

ب) $\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{t\to c^-} \int_{a}^{t} f(x)dx$ (به شرط وجود حد)

انتگرالهای ناسره $\int_{c}^{b} f(x)dx$ و $\int_{a}^{c} f(x)dx$ همگرا نامیم هر گاه حدهای متناظر آنها موجود باشند درغیر این صورت آنها را واگرا می نامیم.

ج) اگرf(x) در c ناپیوسته باشد و $a < c < b$ و $\int_{c}^{b} f(x)dx$ و$\int_{a}^{c} f(x)dx$ هر دو همگرا باشند آنگاه $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$همگرااست .

مثال2: همگرایی ویا واگرایی انتگرالهای زیر رابررسی کنید.

الف) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ ب) $\int_{0}^{1} Lnx\,dx$ ج) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

حل :الف) تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ درx=2 ناپیوسته است.

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} 2[\sqrt{t-2}]_t^5 = \lim_{t\to 2^+}[2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}]$$
$$= 2\sqrt{3} - \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{t-2} = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}$$

پس انتگرال $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ همگرا است.

ب) تابع f(x)=Lnx درx=0 ناپیوسته است.

$$\int_0^1 Lnx\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 Lnx\,dx = \lim_{t\to 0^+}[xLnx - x]_0^t = \lim_{t\to 0^+}[-1 = tLnt + t]$$
$$= (\text{طبق } *)[-1 - 0 + 0] = -1$$

$$\begin{cases} u = Lnx & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}$$

$$\int Lnx\,dx = xLnx - \int dx = xLnx - x + c$$

$$\lim_{t\to 0^+} tLnt = \lim_{t\to 0^+}\frac{Lnt}{\frac{1}{t}} = (\ \ )\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t\to 0^+} t = 0 \qquad (*)$$

پس انتگرال $\int_0^1 Lnx\,dx$ همگرا است.

ج) تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ درx=1 ناپیوسته است. انتگرال $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ واگرا است زیرا

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-}[\frac{-1}{x-1}]_0^t = -\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{t-1} + 1 = +\infty$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^+}[\frac{-1}{x-1}]_t^2 = -1 + \lim_{t\to 1^+}\frac{1}{t-1} = +\infty$$

آزمون مقایسه برای انتگرالهای ناسره

محاسبه برخی از انتگرالهای ناسره ممکن است آسان نباشد ولی تعین همگرایی ویا واگرایی این انتگرالهااز اهمیت خاصی برخوردار است.به کمک آزمون مقایسه می توان همگرایی وبا واگرایی برخی از انتگرالهای ناسره رامعین کرد.این آزمون برای انتگرال ناسره نوع اول به صورت قضیه زیربیان می کنیم وقضیه مشابه آن برای انتگرال ناسره نوع دوم هم بر قرار است.

قضیه(آزمون مقایسه) فرض کنید که توابع f(x) وg(x) روی بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد وبرای$x \geq a$ نامساوی $f(x) \geq g(x) \geq 0$ درست باشد.

الف) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ همگرا است.

ب) اگر $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ واگرا است.

مثال 3 : نشان دهید که $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ همگرا است.

(در ریاضی 2نشان می دهیم که $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

حل :می توان نوشت: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ یک انتگرال معین معمولی است وهمگرا است (هرچند که حل آن آسان نیست) برای انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ از آزمون مقایسه استفاده می کنیم

$$\forall x \geq 1 : x^2 \geq x \to -x^2 \leq -x \to e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} e^{-x}\,dx = -\lim_{b\to+\infty}[e^{-x}]_1^b = -\lim_{b\to+\infty} e^{-b} + e^{-1} = 0 + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه قسمت الف) چون $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ همگرااست و چون $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ آنگاه $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ همگرا است وبنابراین چون مجموع دو انتگرال همگرا ،همگرااست پس $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ همگرااست.

مثال 4: نشان دهید که $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ واگرا است.

حل : چون برای $x \geq 1$ نامساوی $0 < \frac{1}{x} < \frac{1+e^{-1}}{x}$ بر قرار است وطبق مثال 1 چون $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ واگرا است پس طبق آزمون مقایسه قسمت ب) $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ واگرااست.