فصل ۸

انتگرال معین و کاربردهای آن

در فصل ۷ با انتگرال نامعین آشنا شدیم. در این فصل به انتگرال معین می‌پردازیم و کاربردهای آن را ذکر می‌کنیم.

بخش (۱_۸) تعاریف

تعریف ۱_۱_۸. فرض کنید که $[a, b]$ یک بازه بسته باشد. یک افراز از بازه بسته $[a, b]$ مجموعه‌ای از زیرفاصله‌های $[x_{i-۱}, x_i]$ است که

$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < x_۳ < \cdots < x_i < x_{i+۱} < \cdots < x_n = b$$

این افراز را با Δ نشان می‌دهیم و طول بزرگترین زیرفاصله که یکی از $\Delta_i x = x_i - x_{i-۱}$ها است را نرم‌افراز Δ می‌نامیم و با نماد $\|\Delta\|$ نشان می‌دهیم.

مثال۱ : فرض کنید که $a = ۱$, $b = ۲$ یک افراز برای بازه بسته $[۱, ۲]$ به‌صورت زیر است اگر

$$\Delta_i x = \frac{۲ - ۱}{n} = \frac{۱}{n}$$

در نظر بگیریم آن گاه $x_\text{۱} = \text{۱} + \frac{\text{۱}}{n}\ ,\ x_\text{۲} = \text{۱} + \frac{\text{۲}}{n}, \cdots , x_n = \text{۱} + \frac{n}{n} = \text{۲}$ این افراز که طول تمام زیر فاصله‌هایش با هم برابر است را افراز منظم برای $[\text{۱}, \text{۲}]$ می‌نامیم. یک افراز دیگر برای $[\text{۱}, \text{۲}]$ می‌تواند به‌صورت زیر باشد.

$$x_\circ = \text{۱}, x_\text{۱} = \frac{\text{۵}}{\text{۴}}, x_\text{۲} = \frac{\text{۶}}{\text{۴}}, x_\text{۳} = \text{۲} \qquad \left[\text{۱}, \frac{\text{۵}}{\text{۴}}\right], \left[\frac{\text{۵}}{\text{۴}}, \frac{\text{۶}}{\text{۴}}\right], \left[\frac{\text{۶}}{\text{۴}}, \text{۲}\right]$$

طول این افراز $\frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\text{۶}}{\text{۴}} - \text{۲}$ است $\left(\left(\Delta_\text{۱} x = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}, \Delta_\text{۲} x = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}, \Delta_\text{۳} x = \frac{\text{۲}}{\text{۴}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)\right)$

تعریف ۲ـ۱ـ۸. فرض کنید که تابع $y = f(x)$ روی بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد و Δ یک افراز از بازه بسته $[a, b]$ مانند $a = x_\circ < x_\text{۱} < x_\text{۲} < \cdots < x_n = b$ باشد. فرض کنید c_i یک عدد دلخواه در $[x_{i-\text{۱}}, x_i]$ باشد. مقدار $\lim\limits_{||\Delta|| \to \circ} \sum_{i=\text{۱}}^{n} f(c_i)\Delta_i x$ در صورت وجود را انتگرال معین تابع f روی $[a, b]$ می‌نامیم و با $\int_d^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم. بنابراین در صورت وجود حد $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{||\Delta|| \to \circ} \sum_{i=\text{۱}}^{n} f(c_i)\Delta_i x$

در انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ نماد $f(x)$ را انتگران و b, a را به‌ترتیب حد پایین و حد بالای انتگرال و $\int$ را علامت انتگرال می‌نامیم.

تعریف ۳ـ۱ـ۸. تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ را انتگرال‌پذیر نامیم هرگاه $\int_a^b f(x)dx$ موجود باشد.

تبصره: اگر $\lim\limits_{||\Delta|| \to \circ} \sum_{i=\text{۱}}^{n} f(c_i)\Delta_i x$ موجود باشد. آن‌گاه وجود حد و مقدار حد به انتخاب c_iها در زیر فاصله $[x_{i-\text{۱}}, x_i]$ بستگی ندارد و همچنین وجود حد و مقدار حد به انتخاب افراز Δ بستگی ندارد.

وقتی که $||\Delta|| \to \circ$ بدیهی است که $\Delta_i x$ها کوچک می‌شوند یعنی بازه $[a, b]$ به تعداد زیادی زیر بازه تقسیم می‌شود.

یعنی به‌جای $||\Delta|| \to \circ$ می‌توان نوشت $n \to +\infty$. بنابراین:

$$\lim_{||\Delta|| \to \circ} \sum_{i=\text{۱}}^{n} f(c_i)\Delta_i x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=\text{۱}}^{n} f(c_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$$

قضیه ۴ـ۱ـ۸. اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته باشد آن گاه تابع f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است.

قضیه ۵ـ۱ـ۸. (خواص انتگرال معین) فرض کنید که $f(x)$ و $g(x)$ روی فاصله $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشند آن گاه: ۱) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

۲) $\int_a^a f(x)dx = \circ$

۳) $f(x) = k \Rightarrow \int_a^b k dx = k(b-a)$

۴) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (\forall k \in \mathbb{R})$

۵) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

۶) برای هر c بین b, a آن گاه $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

۷) اگر روی $[a,b]$، $f(x) \geq g(x)$ آن گاه $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

۸) اگر $f(x) \geq ۰$ آن گاه $\int_a^b f(x)dx \geq ۰$

۹) اگر $f(x) \leq ۰$ آن گاه $\int_a^b f(x)dx \leq ۰$

۱۰) (تعمیم ۶) اگر f روی $[a,b]$ و $[a,c]$ و $[c,b]$ پیوسته باشد آن گاه برای هر c, b, a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

تذکر: محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ از روی $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta_i x = \lim\limits_{\|\Delta\|\to ۰} \sum_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta_i x$ خیلی آسان نیست. زیرا باید اطلاعاتی از مجموع یابی داشته باشیم و محاسبات زیادی انجام دهیم تا حد مجموع را حساب کنیم.

برای دوری از مجموع‌یابی و حدگیری به سراغ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌رویم تا یک روش کوتاه برای محاسبه انتگرال پیدا کنیم.

قضیه زیر که به مشتق‌گیری از انتگرال معروف است ارتباط بین تابع اولیه و انتگرال معین را بیان می‌کند.

قضیه ۸ـ۱ـ۶. (قضیه مشتق انتگرال) فرض کنید تابع f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته و x عددی دلخواه در فاصله $[a,b]$ باشد. اگر تابع $F(x)$ را به‌صورت $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ تعریف کنیم آن گاه $F'(x) = f(x)$ به عبارت دیگر $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

مثال ۲: مشتق انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int_۱^x \sqrt{۲+t}dt$ ب) $\int_x^۵ \sqrt{۱+t^۴}dt$

حل.

$$\text{(الف} \quad \frac{d}{dx}\int_۱^x \sqrt{۲+t}dt = \sqrt{۲+x}$$

$$\text{(ب} \quad \frac{d}{dx}\int_x^۵ \sqrt{۱+t^۴}dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_۵^x \sqrt{۱+t^۴}dt\right) = -\sqrt{۱+x^۴}$$

نتیجه ۸ـ۱ـ۷. $\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -f(x)$

قضیه ۸ـ۱ـ۸. فرض کنید که $U(x)$ و $V(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند آن گاه

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = U'(x)f(U(x)) - V'(x)f(V(x))$$

مثال۳ : مشتق انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید. (با فرض مثبت بودن $\sin x$ و $\cos x$)

$$\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}dt \qquad \int_{x}^{x^2}\frac{dt}{1+t^2} \qquad \int_{x^3}^{x^3+x^2}\frac{dt}{1+t^3}$$

حل.

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2}\frac{dt}{1+t^2} = 2x\left(\frac{1}{1+x^4}\right) - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}dt = (-\sin x)\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos x\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^3+x^2}\frac{dt}{1+t^3} = (3x^2+2x)\frac{1}{1+(x^3+x^2)^3} - 3x^2\left(\frac{1}{1+x^9}\right)$$

قضیه ۹ـ۱ـ۸. (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال): اگر تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه آن باشد یعنی $\forall x\in[a,b] \quad F'(x)=f(x)$ آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

تبصره: قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به راحتی انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را حل می‌کند به شرطی که $f(x)$ تابع اولیه داشته باشد. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

مثال۴ : انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{\pi}\sin x dx$ ب) $\int_0^{\pi}\cos^2 x dx$ ج) $\int_0^{4}(x^3-x^2)dx$

حل.

الف) $\int_0^{\pi}\sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2$

ب) $$\int_{\circ}^{\pi}\cos^{۲}x\,dx=\int_{\circ}^{\pi}\frac{۱+\cos ۲x}{۲}dx=\int_{\circ}^{\pi}\frac{۱}{۲}dx+\int_{\circ}^{\pi}\cos ۲x\,dx$$
$$=\frac{۱}{۲}[x]_{\circ}^{\pi}+\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right]_{\circ}^{\pi}=\frac{۱}{۲}\pi+\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲}\sin ۲\pi-\frac{۱}{۲}\sin \circ\right]=\frac{\pi}{۲}$$

ج) $$\int_{\circ}^{۴}(x^{۳}-x^{۲})dx=\int_{\circ}^{۴}x^{۳}dx-\int_{\circ}^{۴}x^{۲}dx=\left[\frac{۱}{۴}x^{۴}\right]_{\circ}^{۴}-\left[\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{\circ}^{۴}$$
$$=\frac{۱}{۴}(۴)^{۴}-\circ-\left[\frac{۴^{۳}}{۳}-\circ\right]=۴^{۳}-\frac{۴^{۳}}{۳}=۶۴-\frac{۶۴}{۳}=\frac{۱۹۲-۶۴}{۳}=\frac{۱۲۸}{۳}$$

مثال۵ : انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{۱}^{۲}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}}dx$ ب) $\int_{۱}^{۳}\sqrt{x}dx$

ج) $\int_{\circ}^{۲}e^{x}dx$ د) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\cot g x\,dx$

حل.

الف) $$\int_{۱}^{۲}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}}dx=\int_{۱}^{۲}dx+\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x^{۲}}=[x]_{۱}^{۲}+\left[-\frac{۱}{x}\right]_{۱}^{۲}$$
$$=(۲-۱)+\left(-\frac{۱}{۲}+۱\right)=\frac{۳}{۲}$$

ب) $$\int_{۱}^{۳}\sqrt{x}dx=\int_{۱}^{۳}x^{\frac{۱}{۲}}dx=\left[\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۱}^{۳}$$
$$\frac{۲}{۳}\left[۳^{\frac{۳}{۲}}-۱^{\frac{۳}{۲}}\right]=\frac{۲}{۳}[۳\sqrt{۳}-۱]$$

ج) $$\int_{\circ}^{۲}e^{x}dx=[e^{x}]_{\circ}^{۲}=e^{۲}-e^{\circ}=e^{۲}-۱$$

د) $$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\cot g x\,dx=-[\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$$
$$=-\ln|\sin\frac{\pi}{۲}|+\ln|\sin\frac{\pi}{۴}|=\circ+\ln|\frac{\sqrt{۲}}{۲}|=$$
$$\ln\sqrt{۲}-\ln ۲=\frac{۱}{۲}\ln ۲-\ln ۲=-\frac{۱}{۲}\ln ۲$$

تمرین بخش ۱ـ۸.

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin ۲x dx$

۲) $\int_{۱}^{۵} \sqrt{x}(x^{۲} - ۲)dx$

۳) $\int_{۱}^{۲} t^{۲}\sqrt{t^{۳} + ۱}dt$

۴) $\int_{\circ}^{۱۵} \frac{xdx}{(۱ + x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۵) $\int_{۱}^{۴} \frac{x^{۵} - x}{۴x^{۲}}dx$

۶) $\int_{\circ}^{۲} ۴^{(۳x)}dx$

۷) $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x + ۲\sin x)dx$

۸) $\int_{-۲}^{۱}(x + ۱)\sqrt{x + ۳}dx$

۹) $\int_{\circ}^{۳}(۵e^{-x} + ۶e^{x})dx$

۱۰) $\int_{۱}^{۳}(x - ۴)(x - ۵)dx$

۱۱) $\int_{۱}^{۲}(x^{۴} + \frac{۵}{x^{۴}})dx$

۱۲) $\int_{\circ}^{۲} xe^{-x^{۲}}dx$

۱۳) $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۲} xdx$

۱۴) $\int_{\circ}^{۱} \frac{۲xdx}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$

مشتق انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

۱۵) $\int_{e^{x}}^{\sin x} \sqrt{۱ - t^{۲}}dt$

۱۶) $\int_{\sqrt{x}}^{x^{۲}} \frac{dt}{۱ - t}$

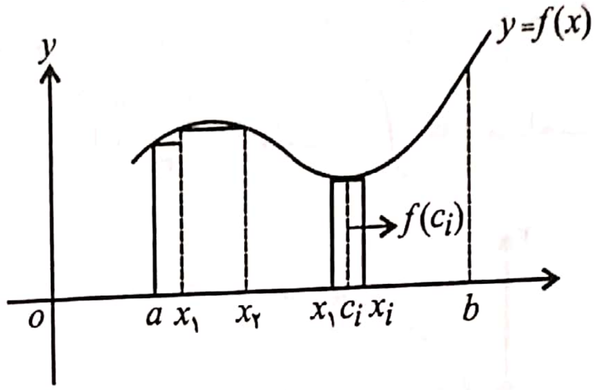
۱۷) $\int_{-x}^{x} \frac{dt}{۴ + t^{۲}}$

۱۸) $\int_{x}^{x^{۳}} \sqrt{\sin t}dt$

بخش (۲ـ۸) مساحت یک ناحیه

یکی از کاربردهای انتگرال معین محاسبه مساحت یک ناحیه در صفحه است. فرض کنید که تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و برای هر x در این بازه $f(x) \geq 0$ باشد. فرض کنید که A ناحیه محصور بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور xها باشد و Δ افراز دلخواه $[a,b]$ به‌صورت $a=a_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ باشد.

با این افراز ناحیه A را می‌توانیم به n تا مستطیل به طول $\Delta_i x$ و ارتفاع $f(c_i)$ تقسیم کنیم که در آن $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ است مانند شکل زیر:



اگر A_i مستطیل شماره i باشد، مساحت این مستطیل برابر $f(c_i).\Delta_i x$ است.

پس اگر مجموع مساحت‌های این n مستطیل را بیابیم داریم $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_i x$

بنابراین $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_i x =$ مساحت ناحیه A

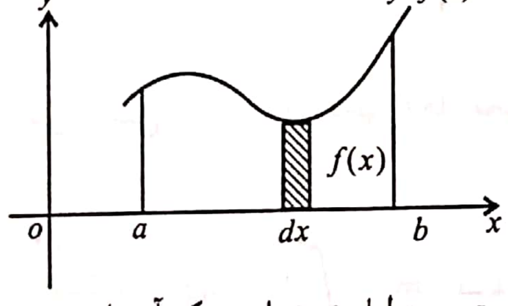
که در بخش قبل دیدیم که این حد مجموع برابر $\int_a^b f(x)dx$ است پس

$$A \text{ مساحت ناحیه } = \int_a^b f(x)dx$$

پس تعریف زیر را داریم:

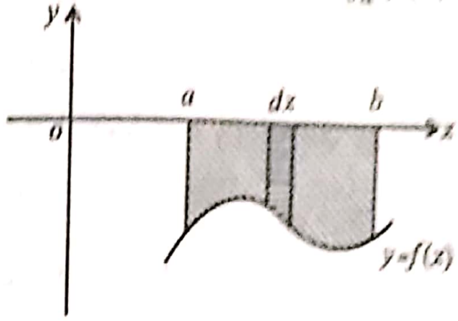
تعریف ۱ـ۲ـ۸. فرض کنید که تابع f روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و برای هر x در این بازه $f(x) \geq 0$ باشد. اگر A ناحیه محصور بین منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ و محور xها باشد.

در این صورت $\int_a^b f(x)dx =$ مساحت ناحیه A



طبق شکل $f(x)dx$ مساحت مستطیل نمونه است که آن را جزء مساحت می‌نامیم.

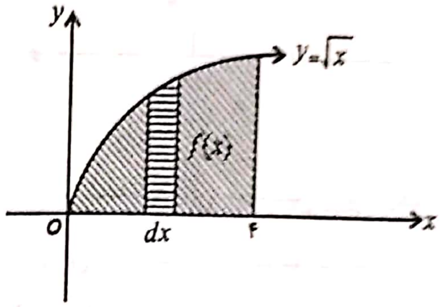
در تعریف قبل اگر $f(x) \le 0$ آن گاه طبق قضیه ۸ـ۱ـ۵ قسمت (۹) مقدار $\int_a^b f(x)dx$ منفی می‌شود پس طبق شکل زیر $-\int_a^b f(x)dx =$ مساحت ناحیه A



مثال ۱: مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=\sqrt{x}$ و خطوط $x=0$ و $x=4$ و محور x ها را بیابید.

حل.

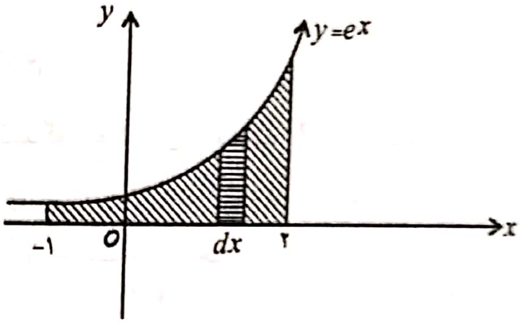
$$A \text{ مساحت } = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$



مثال ۲: مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=e^x$ و خطوط $x=-1$, $x=2$ و محور xها را بیابید.

حل.

$$A \text{ مساحت } = \int_{-1}^{2} e^x dx = [e^x]_{-1}^{2} = e^2 - \frac{1}{e}$$



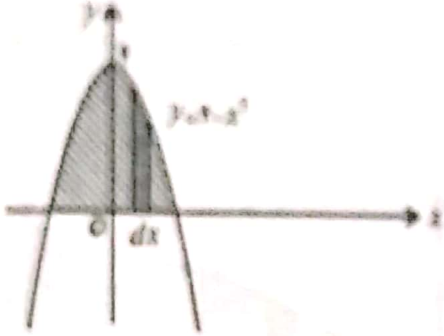
مثال ۳: مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=-x^2$ و محور xها و محور yها و خط $x=2$ را بیابید.

حل.

$$\text{مساحت } = -\int_0^2 -x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

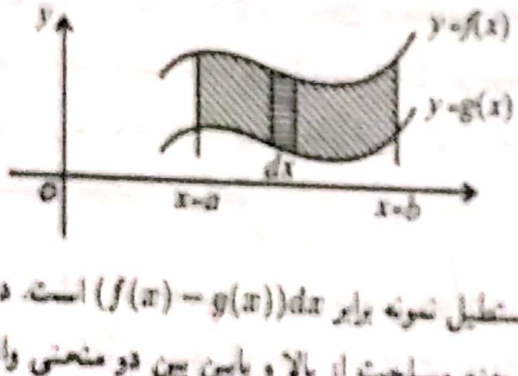
مثال ۴ : مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 4 - x^2$ و محور xها را بیابید.

$$\text{مساحت } A = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = 2\int_{0}^{2}(4 - x^2)dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$



تعریف ۲-۲-۸. اگر A ناحیه محصور بین دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد و روی $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq g(x)$ و $f(x)$ و $g(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشند آن گاه

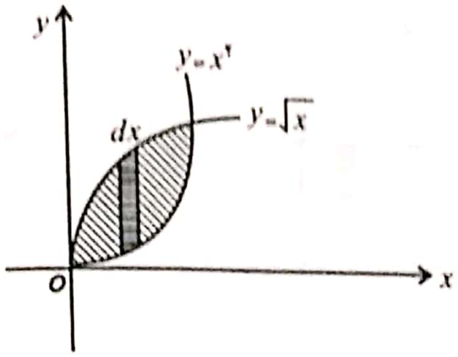
$$\text{مساحت } A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



طبق شکل مساحت مستطیل نمونه برابر $(f(x) - g(x))dx$ است. در این تعریف جزء مساحت عمود بر محور xها است و جزء مساحت از بالا و پایین بین دو منحنی واقع است.

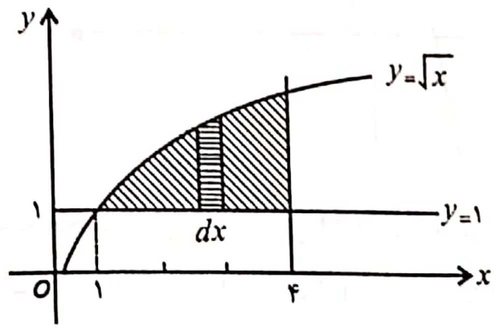
مثال ۵ : مساحت واقع بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ را بیابید.

$$\text{مساحت } A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



مثال۶ : مساحت واقع بین منحنی‌های $y = \sqrt{x}$ و $y = ۱$ و خطوط $x = ۱$ و $x = ۴$ را بیابید.

$$\text{مساحت} = \int_{۱}^{۴} (\sqrt{x} - ۱)dx = \left[\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - x\right]_{۱}^{۴} = \frac{۵}{۳}$$

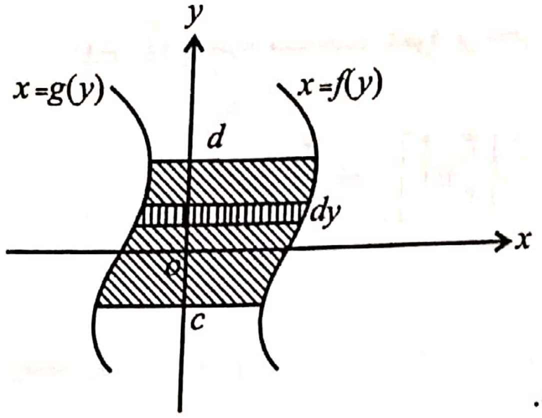


تبصره: در تعاریف ۱ـ۲ـ۸ و ۲ـ۲ـ۸ و مثال‌های ۱ تا ۶ ناحیه‌ها طوری بودند که جزء مساحت آنها عمود بر محور xها و از بالا به منحنی $y = f(x)$ و از پایین به منحنی $y = g(x)$ (یا $y = ۰$ محور xها) محدود بود و برای محاسبه مساحت، تابع زیر علامت انتگرال برحسب x بود و برحسب x هم انتگرال گرفته شد. در تعریف زیر ناحیه‌ها را طوری در نظر می‌گیریم که جزء مساحت عمود بر محور yها باشد و انتگرال را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

تعریف ۳ـ۲ـ۸. فرض کنید که A ناحیه محصور بین دو منحنی $x = g(y)$ و $x = f(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ باشد که در آن برای هر y در $[c, d]$ $\quad f(y) \geq g(y)$ است.

در این صورت

$$A \text{ مساحت } = \int_{c}^{d} [f(y) - g(y)]dy$$

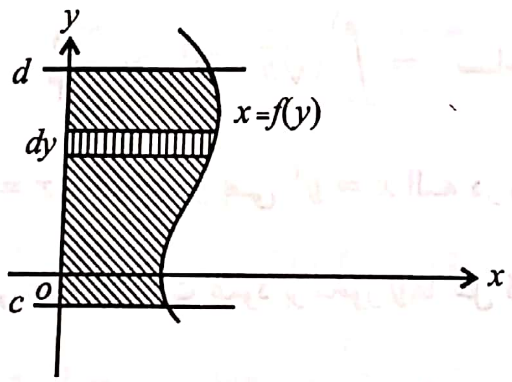


مساحت مستطیل نمونه برابر $[f(y)-g(y)]dy$ است.

در این تعریف جزء مساحت عمود بر محور yها است.

اگر $g(y) = 0$ = x باشد (یعنی A ناحیه محصور بین منحنی $x = f(y)$ و خطوط $y = c, y = d$ و محور yها است) آن گاه

$$A \text{ مساحت } = \int_c^d f(y)dy$$

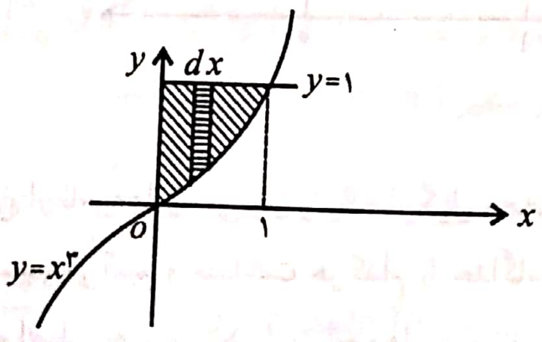


جز مساحت عمود بر محور yها است.

مثال۷ : مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = x^3$ و خطوط $y = 1$ و $x = 0$ و $x = 1$ را بیابید.

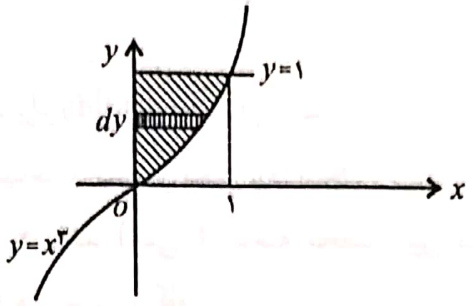
حل. روش اول: جزء مساحت عمود بر محور xها

$$A \text{ مساحت } = \int_0^1 [1 - x^3]dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



روش دوم: جزء مساحت عمود بر محور yها

$$\text{مساحت } A = \int_{۰}^{۱} \sqrt[۳]{y}\ dy = \left[\frac{۳}{۴} y^{\frac{۴}{۳}}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۴}$$



مثال۸ : مثال ۵ را به روش جزء مساحت عمود بر محور yها حل کنید.

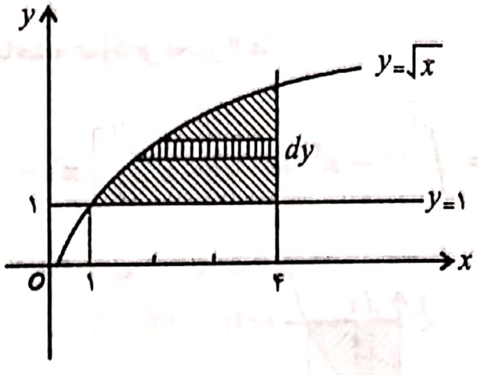
حل.

$$\text{مساحت} = \int_{۰}^{۱} (\sqrt{y} - y^{۲})dy = \frac{۱}{۳}$$

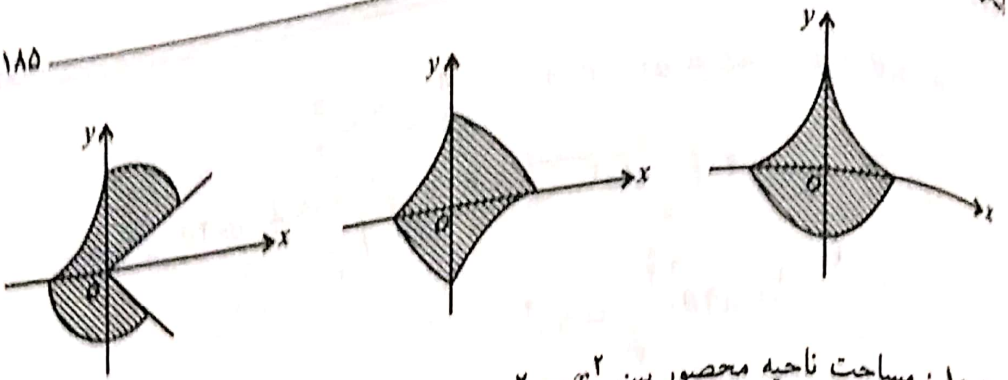
($y = x^{۲}$ یعنی $x = \sqrt{y}$ و $y = \sqrt{x}$ یعنی $x = y^{۲}$ البته در ربع اول که x و y مثبت هستند.)

مثال۹ : مثال ۶ را به روش جزء مساحت عمود بر محور yها حل کنید.

$$\text{مساحت} = \int_{۱}^{۲} (۴ - y^{۲})dy = \left[۴y - \frac{y^{۳}}{۳}\right]_{۱}^{۲} = \frac{۵}{۳}$$



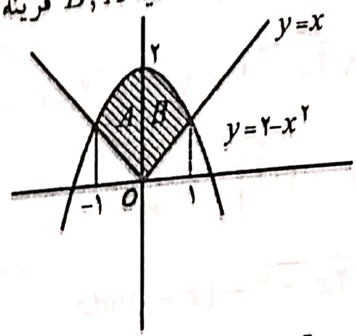
تبصره: مساحت بعضی از ناحیه‌ها را نمی‌توان با یک انتگرال محاسبه کرد. این ناحیه‌ها را معمولاً به چندین ناحیه کوچکتر تقسیم می‌کنیم و مساحت هر کدام را جداگانه محاسبه می‌کنیم و آنها را جمع می‌زنیم تا مساحت ناحیه اصلی به‌دست آید. این ناحیه‌ها می‌توانند به صورت زیر باشند.



مثال۱۰ : مساحت ناحیه محصور بین $y = ۲ - x^{۲}$ و $y = x$ و $y = -x$ واقع در بالای محور xها را بیابید.

حل. ناحیه را به دو ناحیه A, B تقسیم می‌کنیم.

A محصور بین منحنی $y = -x$ و $y = ۲ - x^{۲}$ و محور yها است و B محصور بین منحنی $y = x$ و $y = ۲ - x^{۲}$ و محور yها است (البته ناحیه A, B قرینه می‌باشند)



$$\text{مساحت } A = \int_{-۱}^{۰} [۲ - x^{۲} - (-x)]dx = \left[۲x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۲}}{۲}\right]_{-۱}^{۰} = \frac{۷}{۶}$$

$$\text{مساحت } B = \int_{۰}^{۱} [۲ - x^{۲} - x]dx = \left[۲x - \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{۱} = \frac{۷}{۶}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت کل} = ۲\left(\frac{۷}{۶}\right) = \frac{۷}{۳}$$

در تمرین ۱۵ خواسته شده که مثال ۱۰ را به روش جزء مساحت عمود بر محور yها حل کنید.

مثال۱۱ : مساحت داخل دایره (مساحت دایره‌ای به شعاع a) $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ را بیابید.

حل. روش اول جزء مساحت عمود بر محور xها (۱) $\text{مساحت} = ۲\int_{-a}^{a} \sqrt{a^{۲} - x^{۲}}dx$

روش دوم جزء مساحت عمود بر محور yها (۲) $\text{مساحت} = ۲\int_{-a}^{a} \sqrt{a^{۲} - y^{۲}}dy$

انتگرال (۱) را به کمک تغییر متغیر $x = a\sin\theta$ حل می‌کنیم.

$$\int \sqrt{a^{۲} - x^{۲}}dx = \int \sqrt{a^{۲} - a^{۲}\sin^{۲}\theta}(a\cos\theta)d\theta = a^{۲}\int \cos^{۲}\theta d\theta$$

$$= a^{۲}\int \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}d\theta = a\left[\frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right] + c$$

$$a\sin\theta = x \to dx = a\cos\theta d\theta \qquad -\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{مساحت دایره} = ۲\int_{-a}^{a}\sqrt{a^{۲}-x^{۳}}dx = ۲a^{۲}\int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}d\theta$$

$$= a^{۲}\left[\overset{\theta}{۱} + \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \pi a^{۲}$$

پس

$$x = -a \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{۲} \quad , \quad x = a \to \theta = \frac{\pi}{۲}$$

مثال۱۲ : مساحت ناحیه محصور بین $y^{۲} = ۲x - ۲$ و $y = x - ۵$ را به‌دست آورید.

حل. روش (اول) (جزء مساحت عمود بر محور xها) ناحیه را به بدو ناحیه B, A تقسیم می‌کنیم.

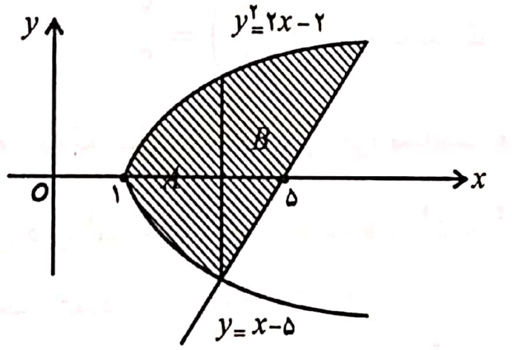
$$\text{مساحت } A = \int_{۱}^{-۳}[\sqrt{۲x-۲}+\sqrt{۲x-۲}]dx = ۲\int_{۱}^{۳}\sqrt{۲x-۲}dx$$

$$= \left[\frac{۲}{۳}(۲x-۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۱}^{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

$$\text{مساحت } B = \int_{۳}^{۹}[\sqrt{۲x-۲}-(x-۵)]dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۳}(۲x-۲)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۲}x^{۲} + ۵x\right]_{۳}^{۹} = \frac{۳۸}{۳}$$

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت } A + \text{مساحت } B = \frac{۱۶}{۳} + \frac{۳۸}{۳} = \frac{۵۴}{۳} = ۱۸$$



برای یافتن حدود انتگرال‌ها به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$y^{۲} = ۲x-۲, y = x-۵ \Rightarrow (x-۵)^{۲} = ۲x-۲ \Rightarrow x^{۲} - ۱۰x + ۲۵ = ۲x - ۲$$

$$x^{۲} - ۱۲x + ۲۷ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۹) = ۰ \Rightarrow x = ۳, x = ۹$$

$x = ۳ \Rightarrow y = -۲, x = ۹ \Rightarrow y = ۴$ پس $(۳,-۲), (۹,۴)$ محل تلاقی دو منحنی هستند.

روش دوم (جزء مساحت عمود بر محور yها) ناحیه اصلی از چپ به منحنی $x=\frac{y^2+2}{2}$ و از راست به منحنی $x=y+5$ و از بالا به خط $y=4$ و از پایین به خط $y=-2$ محدود است پس

$$\text{مساحت کل} = \int_{-2}^{4}\left[y+5-\frac{1}{2}(y^2+2)\right]dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2+8y\right]_{-2}^{4}$$

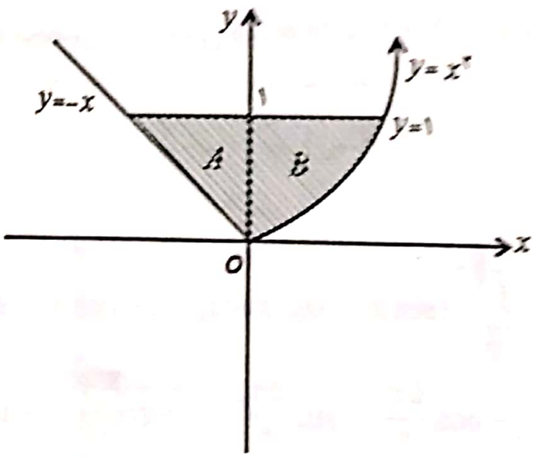
مثال۱۳ : مساحت ناحیه محصور بین سه منحنی $y=1$ و $y=-x$ و $y=x^2$ را بیابید.

روش اول (جزء مساحت عمود بر محور xها) در این صورت دو ناحیه داریم.

$$\text{مساحت } A = \int_{-1}^{0}(1-(-x))dx = \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\left(-1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{مساحت } B = \int_{0}^{1}(1-x^2)dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت } A + \text{مساحت } B = \frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$$



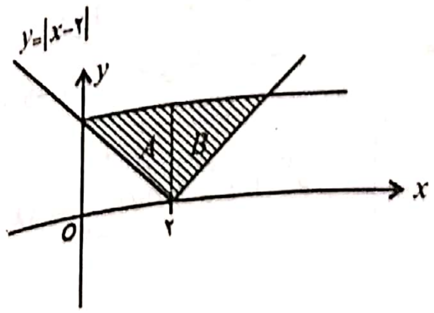
روش دوم (جزء مساحت عمود بر محور yها)

$$y=x^2 \rightarrow x=\sqrt{y}$$

$$\text{مساحت} = \int_{0}^{1}[\sqrt{y}-(-y)]dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

مثال۱۴ : مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y=|x-2|$ و محور xها و خط $y=2$ را بیابید.

حل.
$$y = |x-۲| = \begin{cases} x-۲ & x \geq ۲ \\ -x+۲ & x < ۲ \end{cases}$$



$$\text{مساحت } A = \int_{۰}^{۲} (۲-(-x+۲))dx = \int_{۰}^{۲} x dx = \left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{۰}^{۲} = ۲$$

$$\text{مساحت } B = \int_{۲}^{۴} [۲-(x-۲)]dx = \int_{۲}^{۴} (۴-x)dx = \left[۴x - \frac{x^۲}{۲}\right]_{۲}^{۴}$$

$$= (۱۶-۸)-(۸-۲) = ۲$$

$$\text{مساحت کل} = ۲+۲ = ۴$$

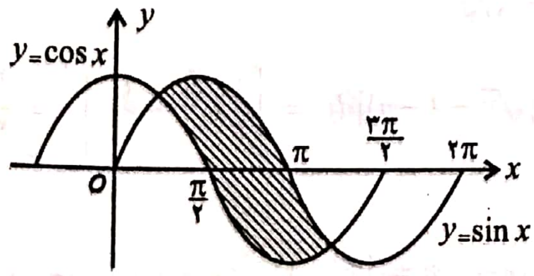
مثال۱۵ : مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = \cos x, y = \sin x$ و خطوط $x = \frac{\pi}{۴}, x = \frac{۵\pi}{۴}$ را بیابید.

حل.

$$\text{مساحت} = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵}{۴}\pi} (\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}$$

$$= [-\cos\frac{۵\pi}{۴} - \sin\frac{۵\pi}{۴}] - [-\cos\frac{\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۴}]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] - \left[-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] = ۲\sqrt{۲}$$



تمرین (۲ـ۸)

در تمرین‌های زیر مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های داده شده را تعیین کنید.

۱. $y = ۴x^۲$ ، $y = ۶x - ۲$

۲. $y = x + ۶$ ، $x = -y^۲$

۳. $y = ۲ - x$ ، $y = x^۲$ ، $y^۳ = x$

۴. $y = ۳x^۲ - ۲x$ ، $y = -۴x + ۱$

۵. $y = x^۲$ ، $y = ۲ - x$

۶. $y = x^۳ - ۶x^۲ + ۸x$ ، $y = x^۲ - ۴x$

۷. $y = x^۲$ ، $y = x^۳$

۸. $y = |x - ۱| + ۳$ ، $y = ۰$ ، $x = ۴$ ، $x = -۱$

۹. $x = ۶ - y^۲$ ، $x = y^۲ - ۲$

۱۰. $x = y - y^۲$ ، $x = y^۲ - y$

۱۱. $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^۳$

۱۲. $y = x^۲$ ، $x^۲ = ۱۸ - y$

۱۳. $x = y - y^۲$ ، $x = y^۲ - ۱$

۱۴. $y = x^۲$ ، $y = ۸ - x^۲$ ، $۴x - y + ۱۲ = ۰$

۱۵. مثال ۱۰ را با در نظر گرفتن جزء مساحت عمود بر محور yها حل کنید.

۱۶. یک شرکت کاشی‌سازی می‌خواهد کاشی‌های لعاب‌دار با طرح و رنگی شبیه شکل زیر بسازد. آیا لعاب سفید بیشتر از لعاب خاکستری مورد نیاز است؟