

در این فصل مباحث زیر تدریس می گردد

الف) ماکسیمم و می نیمم نسبی (موضعی) و مطلق توابع و برخی از کاربردهای آن

ب) قضیه رول و قضیه مقدار میانگین و کاربردهای آن

ج) رسم نمودار تابع با تمام توضیحات

د) بهینه سازی و مسائل آن

ماکسیمم و می نیمم نسبی (موضعی) و مطلق توابع

تعریف: فرض کنید D یک بازه و $f(x)$ یک تابع باشد که روی بازه D تعریف شده است و $c \in D$.
تابع f در $x=c$ دارای ماکسیمم نسبی (موضعی) دارد هرگاه یک بازه باز مانند I شامل c موجود باشد بطوریکه

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq f(c)$$

در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f نامیم.و تابع $f(x)$ در $x=c$ دارای می نیمم نسبی (موضعی) دارد هرگاه یک بازه باز مانند I شامل c موجود باشد بطوریکه

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq f(c)$$

در این صورت $f(c)$ را مقدار می نیمم نسبی تابع f نامیم.و تابع f در $x=c$ ماکسیمم مطلق دارد هرگاه برای هر $x \in D$

$$f(x) \leq f(c)$$

و $f(c)$ را مقدار ماکسیمم مطلق روی D می نامیم.و تابع f در $x=c$ می نیمم مطلق دارد هرگاه برای هر $x \in D$

$$f(x) \geq f(c)$$

و $f(c)$ را مقدار می نیمم مطلق تابع f روی D می نامیم.

توجه: فرض بین ماکسیمم مطلق (می نیمم مطلق) با ماکسیمم نسبی (می نیمم نسبی) تابع در این است که

(۱) برای ماکسیمم نسبی (می نیمم نسبی) باید یک بازه شامل c وجود داشته باشد که $f(x) \leq f(c)$ (یا $f(x) \geq f(c)$)ولی ماکسیمم مطلق (می نیمم مطلق) روی یک ناحیه (یا دامنه f) تعریف می شود و نیازی به بازه باز نیست.

(۲) ماکسیمم مطلق (می نیمم مطلق) روی یک بازه بسته می تواند در ابتدا و انتهای بازه باشد ولی در ماکسیمم نسبی (می نیمم نسبی) فقط انتهای بازه بسته می تواند نقطه ماکسیمم و می نیمم نسبی تابع باشد.

(۳) ماکسیمم و می نیمم نسبی می تواند ماکسیمم و می نیمم مطلق هم باشند ولی برعکس آن همواره برقرار نیست.

مثال ۱ چون $-1 \leq x \leq 1$ بنابراین اگر $f(x) = x^2$ چون $D_f = [1, 1]$ بنابراین

مقادیر ماکسیمم مطلق $f(x)$ عدد ۱ است و مقدار مینیمم مطلق $f(x)$ عدد ۱- است که بی نهایت بار روی $\mathbb{R}$ تکرار شود به عبارت دیگر

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \cos(2n\pi) = 1 \\ \cos((2n+1)\pi) = -1 \end{cases}$$

مثال ۲، اگر $f(x) = x^2$ می باشد که $f(0) = 0$ مینیمم مطلق و بی نهایت بار روی $\mathbb{R}$ است
 و اگر $f(x) = x^3$ آنگاه $f(x)$ ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق و بی نهایت بار دارد

تعریف: مقدارهای اکستریمم مطلق یعنی مقدار ماکسیمم مطلق یا مقدار مینیمم مطلق
 و به همین صورت مقدارهای اکستریمم مینی یعنی مقدار ماکسیمم مینی یا مقدار مینیمم مینی.

قضیه (اکستریمم مطلق) اگر تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع f یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق داشته باشد.
 ماست $f(c)$ و یک مقدار مینیمم مطلق ماست $f(d)$ که دارد که $d \in [a, b]$ و $c, d \in [a, b]$ به عبارت دیگر $f(x)$ روی این بازه بسته اکستریمم مطلق دارد.

تفسیر فضا: اگر f در $x=c$ اکستریمم مینی داشته باشد و اگر $f(c)$ معهود باشد (تعریف شود) آنگاه $f(c) = 0$
 تعریف: نقطه $x=c$ را یک نقطه بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f(c)$ موجود نداشته باشد. $(x \in D_f)$
 توجه: اگر f در $x=c$ اکستریمم مینی داشته باشد آنگاه c نقطه بحرانی تابع f است.

حکایت می توان گفت: اکستریمم مینی (یعنی ماکسیمم مینی) یک تابع را تعیین کرد
 باید دو آزمون از روی توان نوع اکستریمم مینی می توان نوع اکستریمم مینی تابع f را تعیین کرد
 آزمون معهودی و جدول بودن تابع f روی یک بازه.

الف) اگر روی بازه I ، $f'(x) > 0$ آنگاه $f(x)$ روی بازه I صعودی است.
 ب) اگر روی بازه I ، $f'(x) < 0$ آنگاه $f(x)$ روی بازه I نزولی است.

آزمون مشتق مرتبه اول: فرض کنید که c یک نقطه بحرانی تابع پیوسته f باشد.

الف) اگر جدول تعیین علامت f به صورت

x	c
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

باشد آنگاه f در $x=c$ ماکسیمم مینی دارد

ب) اگر جدول تعیین علامت f به صورت زیر باشد آنگاه f در $x=c$ مینیمم مینی دارد

x	c
$f'(x)$	-
$f(x)$	↘

ج) اگر جدول تغییرات علامت f' را در C (نقطه بحرانی) بنویسیم و علامت f'' را در C بنویسیم (علامت f'' در C را در f' بنویسیم)

x	C
$f'(x)$	-
$f''(x)$	-

مثال ۳: معادله درجه دوم و اسکالرهای سیمی تابع $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5$ را معین کنید.

$$f'(x) = 9x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f''(x)$	-	+	-	+

نقاط بحرانی تابع f

$f(0) = 5$ و $f(2) = -27$

مقادیر ماکسیمم و مینیمم

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	-	+	+
$f'(x)$	-	+	-	+

در آینه نمودار آن رسم می‌کنیم (نمودار تابع)

مثال ۴: معادله درجه دوم و اسکالرهای سیمی تابع $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$ را معین کنید.

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 0$$

نقاط بحرانی تابع f

$f(0) = 0$ و $f(2) = 3\sqrt[3]{4}$

مقادیر ماکسیمم و مینیمم

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	-
$f''(x)$	-	+	-	-

تعریف (نقطه) اگر نمودار f روی بازه I بالای همه خط‌های مماس باشد آنگاه نمودار تابع $f(x)$ روی بازه I نقطه روبرو طرف بالا است و اگر نمودار f روی بازه I پایین همه خط‌های مماس باشد آنگاه نمودار تابع $f(x)$ روی بازه I روبرو طرف پایین است

آنزمن تقعر (الف) اگر $f(x)$ در I آنگاه تقعر در تابع f روی I بالا است.

(ب) اگر $f(x)$ در I آنگاه تقعر در تابع f روی I پایین است.

آنزمن مستقیم مرتبه دوم: فرض کنید $f(x)$ در یک سگای از C پیوسته باشند.

الف) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه تابع f در $x=c$ می نیم می دارد.

ب) اگر $f''(c) < 0$ آنگاه تابع f در $x=c$ می ماکسیم می دارد.

تعریف (نقطه عطف) نقطه P روی منحنی $y=f(x)$ را یک نقطه عطف می نامیم، به شرطی که تابع f در این نقطه پیوسته باشد و تقعر خود را عوض شود.

مثال ۵: تقعر و نقطه عطف و تمام الگرمینهای تابع $y=f(x)=x^4-4x^3$ را تعیین کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$ تمام x برای تابع $y=f(x)=x^4-4x^3$ $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x=0, x=3$

$y' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x=0, x=2$

تقعر بالا را با $\cup$ نمایش می دهیم
تقعر پایین را با $\cap$ نمایش می دهیم

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
y'	-	0	-	+	+
y''	+	+	-	+	+
y	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		عطف	عطف	min	
		(0)	(2)	(3)	

$f(0)=0, f(2)=-12, f(3)=-27$

نتیجه: در مثال ۴ تقعر و نقطه عطف تابع را بیابید.

دستور العمل الگرمین مطلق

چگونه می توان الگرمین مطلق تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a, b]$ را بدست آورد؟

جواب: فرض کنید که تابع $f(x)$ روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت:

- مقدار تابع $f(x)$ به ازای نقطه های بحرانی f در بازه بازه $[a, b]$ را بدست می آوریم: فرض کنید که c_1 و c_2 دو نقطه بحرانی تابع f باشند مقدار $f(c_1)$ و $f(c_2)$ را می یابیم.
- $f(a)$ و $f(b)$ را پیدا می کنیم.
- بین $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c_1)$ و $f(c_2)$ و بیش ترین مقدار و کم ترین مقدار به ترتیب ماکسیمم مطلق می نیمم مطلق تابع f است.



مثال ۶: الگرمین مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ را بیابید.

مثال ۶: الگرمین مطلق تابع

حل: تابع $f(x)$ یک تابع چیده شده است و در $D_f = [1, 3]$ پیوسته است و بنابراین در $[1, 3]$ باز بسته است.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

$$f(0) = 1 \quad \text{و} \quad f(2) = 1 - 12 + 1 = -10$$

$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{8} \quad \text{و} \quad f(3) = 17$$

در $x=0$ و $x=2$ نقاط بحرانی تابع f است.

بنابراین طبق قضیه اکستریم مطلق در دستور العمل به مقادیر زیر می‌رسیم.

است $f(2) = -10$ مقدار مینیمم مطلق و $f(3) = 17$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع $f(x)$ در $[1, 3]$ باز بسته است.

در بخش بهینه سازی بیشتر از دستور العمل قبل و قضیه اکستریم مطلق استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۷: اکستریم مطلق و مینی تابع $g(x) = x + 2 \sin x$ در $[0, 2\pi]$ باز بسته است و در $D_g = [0, 2\pi]$ پیوسته است پس در $[0, 2\pi]$ باز بسته است.

نقاط بحرانی تابع $g(x) = x + 2 \sin x$ در $[0, 2\pi]$ باز بسته است. $g'(x) = 1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$ در $[0, 2\pi]$ باز بسته است.

$$g(0) = 0, \quad g(2\pi) = 2\pi, \quad g(\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.81$$

$$g(\frac{4\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3} + 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

بنابراین $g(0) = 0$ مقدار مینیمم مطلق تابع $g(x)$ است و $g(2\pi) = 2\pi$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع g است. برای اکستریم مینی هم می‌توان از آزمون مشتق مرتبه اول و هم می‌توان از آزمون مشتق مرتبه دوم استفاده کرد. از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$g''(x) = -2 \sin x$$

$$g''(\frac{2\pi}{3}) = -2 \sin(\frac{2\pi}{3}) = -2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{مقدار ماکسیمم مینی است}$$

$$g''(\frac{4\pi}{3}) = -2 \sin(\frac{4\pi}{3}) = -2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{مقدار مینیمم مینی است}$$

توجه: جوابهای معادله مثلثاتی $\cos x = -\frac{1}{2}$ در $D_f = [1, 3]$ به صورت زیر است.

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

* اگر $\cos x = c$ و $-1 \leq c \leq 1$ درجه اول یارده α را می‌یابیم $c = \cos \alpha$ باشد در این صورت $\cos x = c$

$$x = 2k\pi \pm \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جوابهای این معادله عبارت است از:

قضیه رول و قضیه مقدار میانی

این دو قضیه کاربردی زیادی در ریاضی دارند. به بیانی دیگر، کاربرد مهمی در حل مسائل قضیه رول، فرض کنید تابع $f(x)$ دارای سه شرط زیر باشد (یا در هر دو شرط صدق کند):
 ۱. f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. ۲. f در بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد.

$$(3) \quad f(a) = f(b)$$

آنگاه عددی c در (a, b) وجود دارد (مطابق قضیه) $f'(c) = 0$.

یکی از کاربردهای قضیه رول برای اثبات منفرجه فردی درجه معادله $f(x) = 0$ است [همچنین برای اثبات اینکه معادله $f(x) = 0$ دقیقاً دارای $n-1$ یا n ریشه داشتن است].

مثال: ثابت کنید معادله $x^3 + x - 1 = 0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

حل: ابتدا به کمک قضیه مقدار میانی (تقریباً قضیه مقدار میانی) نشان می دهیم این معادله ریشه حقیقی دارد و پس از آن از فرض خلف و قضیه رول استفاده می کنیم.

چون تابع $f(x) = x^3 + x - 1$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است و $f(0) \cdot f(1) < 0$ زیرا $f(0) = -1$ ، $f(1) = 1$ بنابراین طبق نتیجه قضیه مقدار میانی یک عدد c بین ۰ و ۱ وجود دارد که $f(c) = 0$ یعنی c ریشه معادله $x^3 + x - 1 = 0$ است (یعنی یک ریشه بین ۰ و ۱ وجود دارد پس ریشه حقیقی دارد).

برای معترضه فردی از فرض خلف استفاده می کنیم. فرض کنید c_1 و d در ریشه حقیقی معادله $x^3 + x - 1 = 0$ باشد (یعنی معادله در ریشه حقیقی داشته باشد) چون f در (a, b) مشتق پذیر است و $f(a) \cdot f(b) > 0$ است و طبق فرض خلف $f(a) = f(b) = 0$ پس طبق قضیه رول $\exists d \in (a, b) : f'(d) = 0$ که متناقض با $f'(d) = 3d^2 + 1 \neq 0$ است پس فرض خلف باطل و معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۲: نشان دهید که معادله $x^5 - 5x + 1 = 0$ دقیقاً سه ریشه حقیقی دارد.

حل: در مرحله اول نشان می دهیم که معادله دارای سه ریشه حقیقی است. فرض کنید $f(x) = x^5 - 5x + 1$ تابع $f(x)$ چون چند جمله ای است در $\mathbb{R}$ پیوسته است طبق نتیجه قضیه مقدار میانی، داریم:

$$\left. \begin{matrix} f(0) = 1 \\ f(-2) = -21 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(-2) < 0 \Rightarrow \exists c_1 \in (-2, 0) : f(c_1) = 0$$

$$f(0) = 1 \quad \left. \begin{matrix} f(1) = -3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \exists c_2 \in (0, 1) : f(c_2) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} f(0) = 1 \\ f(1) = -3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \exists c_3 \in (1, 2) : f(c_3) = 0$$

پس c_1 ، c_2 و c_3 سه ریشه حقیقی معادله هستند.

برای اینکه این معادله دقیقاً سه ریشه دارد از فرض خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید که معادله $f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$ دارای ریشه x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 و سه ریشه حقیقی باشد و فرض کنید که x_1, x_2, x_3 ریشه حقیقی باشند.

چون تابع $f(x)$ مشتق پذیر است در روی بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$ و $[x_3, x_4]$ و $[x_4, x_5]$ پس طبق قضیه رول داریم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) : f'(c) = 0$$

$$f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow \exists d \in (x_2, x_3) : f'(d) = 0$$

$$f(x_3) = f(x_4) \Rightarrow \exists e \in (x_3, x_4) : f'(e) = 0$$

چون $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ فقط در ریشه حقیقی $x = 1$ و $x = -1$ دارد بنابراین وجود سه ریشه c و d و e با یک تناقض با درجه داشتن $f'(x) = 0$ است. پس فرض خلف باطل و حکم یعنی اینکه معادله $x^5 - 5x + 1 = 0$ دقیقاً سه ریشه دارد ثابت می‌شود.

از قضیه رول معمولاً برای اثبات دیگر قضایا از جمله قضیه مقدار میانگین استفاده می‌شود. قضیه مقدار میانگین: فرض کنید که $f(x)$ تابعی باشد که در هر نقطه از بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است.

(۱) $f(x)$ روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است (۲) $f(x)$ روی بازه باز (a, b) مشتق پذیر است. در این صورت عددی مانند c در (a, b) وجود دارد بطوریکه

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad \text{یا معادل آن} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

این قضیه را ثابت می‌کنیم و از ایده‌ای که در اثبات این قضیه به کار رفته است (یعنی طرح اثبات) برای استفاده در حل تمرینات و اثبات قضایای دیگر به کار می‌گیریم.

اثبات قضیه مقدار میانگین: تابع جدید (نگین) $h(x)$ را که تفاضل دو تابع $f(x)$ و تابعی که نمودارش خطی است که از دو نقطه $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ می‌گذرد را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

معادله خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد به صورت $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ می‌باشد.

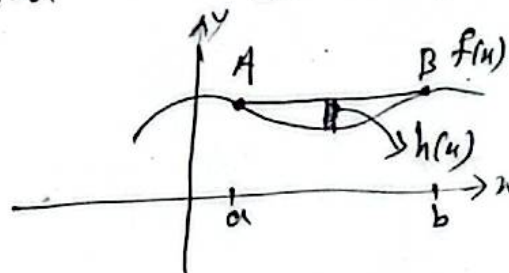
یعنی نمودار تابع $h(x)$ خطی است که از دو نقطه A و B می‌گذرد.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

نشان می‌دهیم که تابع $h(x)$ در هر نقطه از بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است.

(۱) تابع $h(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته است. زیرا مجموع تابع f و چند جمله‌ای درجه اول است که هر دو پیوسته اند.

(۲) تابع $h(x)$ در (a, b) مشتق پذیر است زیرا f و چند جمله‌ای درجه اول هر دو مشتق پذیرند.



در حقیقت $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ معنی h در (a,b) مشتق پذیر است

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow h(b) = h(a)$$

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

در (a,b) وجود دارد

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

در نتیجه

مثال ۳: فرض کنید $f(0) = -3$ و برای هر مقایسه $f'(x) \leq 5$. مقدار $f(2)$ چقدر ممکن است بزرگ باشد
حل: چون $f'(x) \leq 5$ پس f هم مشتق پذیر و در نتیجه پیوسته است. طبق قضیه مقدار میانگین روی بازه $[0, 2]$ داریم

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2-0) \quad \text{پس} \quad f(2) - f(0) = 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

پس بیشترین مقدار $f(2)$ برابر با عدد ۷ است.

در نتیجه برای از قضیه مقدار میانگین نتیجه می شود

- ۱- اگر برای هر x در بازه باز (a,b) $f'(x) = 0$ آنگاه f در (a,b) تابعی ثابت است یعنی $f(x) = c$
- ۲- اگر برای هر x در بازه باز (a,b) داشته باشیم $f'(x) = g'(x)$ آنگاه تابع $f(x) - g(x)$ در (a,b) تابعی ثابت است یعنی $f(x) - g(x) = c$ یا $f(x) = g(x) + c$ که در آن c عددی ثابت است.

مسال ۴: ثابت کنید که اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x < \tan x$

اثبات: ثابت می کنیم که الف) اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x$

ب) اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $x < \tan x$

حل الف) روش اول (قضیه مقدار میانگین) تابع $f(t) = \sin t$ در نظر بگیریم. تابع $f(t)$ در بازه بسته $[0, x]$ پیوسته است و روی بازه باز $(0, x)$ مشتق پذیر است پس طبق قضیه مقدار میانگین یک عدد c بین 0 و x وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \quad \text{پس} \quad f'(c) = \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \cos c = \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{بنابراین} \quad \sin x \leq x \quad \text{و اگر} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{آنگاه} \quad \sin x < x$$

روش دوم: نشان می دهیم که تابع $g(x) = \sin x - x$ در $[0, \frac{\pi}{2}]$ مقدار ماکسیمم مطلق صفر در $x=0$ دارد.

$$g'(x) = \cos x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	-1
$g(x)$	0	$1 - \frac{\pi}{2}$

نتیجه می گیریم که در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$g(x) \leq g(0) \Rightarrow \sin x - x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$$

حال اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin x < x$

ب) روش اول (قضیه مقدار میانگین) تابع $f(t) = \tan t$ در نظر بگیریم که در بازه $[0, x]$

این تابع در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی و نزولی است (مشتق پذیر است پس طبق قضیه میانه میانه)

عدد c در $(0, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد بطوریکه $f'(c) = \frac{\tan \frac{\pi}{2} - \tan 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{\tan \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$ حال چون

$f'(c) = 1 + \tan^2 c > 1$ پس $\frac{\tan \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} > 1$ یعنی $\tan \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$

ب) روش دوم: نشان می دهیم تابع $g(x) = \tan x - x$ برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ صعودی است که در این

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow g(0) < g(x) \Rightarrow 0 < \tan x - x \Rightarrow x < \tan x$

تابع $g(x)$ صعودی است $\Rightarrow g'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

مثال ۵: نشان دهید که نامساوی $|\tan a - \tan b| \leq 4|a - b|$ برای اعداد حقیقی a و b در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ برقرار است.

حل: تابع $f(x) = \tan x$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ صعودی و نزولی است (مشتق پذیر است)

است بنابراین برای هر عدد حقیقی a و b در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ تابع $f(x) = \tan x$ در بازه

بسته $[a, b]$ صعودی و نزولی است (مشتق پذیر است). بنابراین طبق قضیه میانه میانه

عدد c در بازه (a, b) وجود دارد بطوریکه $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\tan b - \tan a}{b - a}$

چون $f'(c) = 1 + \tan^2 c$ پس $1 + \tan^2 c = \frac{\tan b - \tan a}{b - a}$

بیشتر از $\sec^2 c = 1 + \tan^2 c$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ برابر عدد ۴ است پس

$\left| \frac{\tan b - \tan a}{b - a} \right| = |1 + \tan^2 c| \leq 4 \Rightarrow |\tan b - \tan a| \leq 4|b - a|$

$\Rightarrow |\tan a - \tan b| \leq 4|a - b|$

مثال ۶: مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

حل: (طبق قضیه میانه میانه) با فرض $f(t) = \sin \sqrt{t}$ که در آن $x > 0$ و $t \in [x, x+1]$

چون $f(t)$ در بازه بسته $[x, x+1]$ صعودی و نزولی است (مشتق پذیر است پس طبق قضیه میانه میانه عدد c بین x و $x+1$ وجود دارد بطوریکه

$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = \frac{\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}}{1} \Rightarrow \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = \frac{\cos \sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$

چون $\cos \sqrt{c}$ کرندار است پس $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{\cos \sqrt{c}}{2\sqrt{c}} = 0$ بنابراین $x \rightarrow +\infty \Rightarrow c \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{c}}{2\sqrt{c}} = 0$$

مثال ۱۷. فرض کنید تابع $f(x)$ روی $[1, 2]$ پیوسته باشد و $f(1) < 1$ و $f(2) < 2$ و $f(c) = c$ بین ۱ و ۲ وجود ندارد که $f(c) = c$ دهیم.

حل: فرض می‌کنیم برعکس است که تابع $g(x) = f(x) - x$ روی $[1, 2]$ پیوسته است چون تفاضل دو تابع پیوسته است و

$$g(1) = f(1) - 1 < 0 \Rightarrow g(1) \cdot g(2) < 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 < 0$$

حال طبق قضیه مقدار میانی عدد c بین ۱ و ۲ وجود دارد که $g(c) = 0$ یعنی $f(c) - c = 0$ پس $f(c) = c$ یعنی معادله

فرض خلاف فرض کنید که این معادله دو ریشه مانند a و b بین ۱ و ۲ داشته باشد یعنی

$g(a) = g(b) = 0$ پس طبق قضیه رول چون $g(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر است پس

با فرض $|f'(x)| < 1$ است پس مشتق خلف باطل و منحصر به فردی ریشه معادله $g(x) = 0$ نامتعدد است پس فقط نقطه c (منحصر به فرد) بین ۱ و ۲ وجود دارد که $f(c) = c$.

تمرین:

۱۱. فرض کنید که تابع f روی بازه بسته $[-1, 1]$ پیوسته و روی بازه باز $(-1, 1)$ مشتق پذیر باشد و $f(1) = g(1)$ و $f(-1) = g(-1)$ نشان دهید که

$$\exists c \in (-1, 1) : f'(c) = g'(c)$$

۲- یا استفاده از قضیه رول نشان دهید که معادله $\tan x = 1 - x$ در $(0, 1)$ جواب دارد (راه مانی از تابع $(1-x)\sin x = f(x)$ تک میگیریم)

۳- نشان دهید که معادله $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۴- برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ (تمرین ۲۹ صفحه ۱۷۸)

۵- مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

رسم نمودار یک تابع

برای رسم نمودار یک تابع ما باید $f(x)$ را به دست آوریم و آن را به دست آوریم.(۱) D_f را به دست آوریم.(۲) نقاط بحرانی تابع f را بیابیم.

(۳) در صورت وجود زوج و فرد بودن تابع را تعیین کند.

(۴) در صورت وجود دوره تناوب تابع را بیابیم.

(۵) در صورت وجود مجانب های (قائم - افقی - مایل) تابع را پیدا کرد.

(۶) جدول تغییرات تابع را تشکیل داد (در این جدول علامت مشتق مرتبه اول و دوم تابع، محدوده و تدریج بودن تابع، تقعر و نقطه عطف تابع، ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع و معادله تابع به ازای نقاط بحرانی را تعیین می کنیم)

(۷) محل تلاقی نمودار تابع با محور x ها و y ها به دست می آوریم.

(۸) نمودار تابع را در دستگاه مختصات دکارتی رسم می کنیم.

(۹) بر روی نمودار علامت می دهیم.

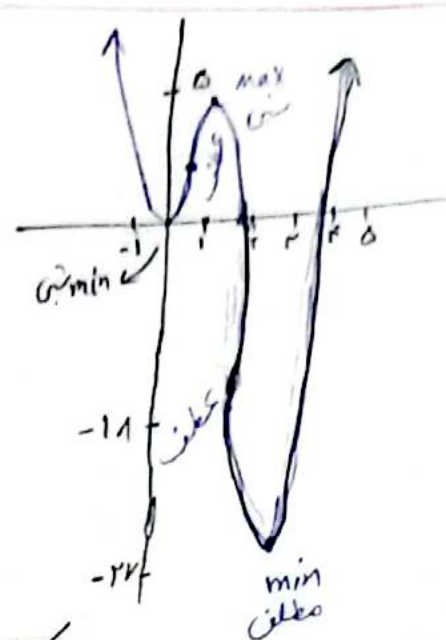
مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ را با تمام خصوصیات رسم کنید.حل: $D_f = \mathbb{R}$ چون تابع حقیقی است برای این تابع دوره تناوب وجود ندارد یعنی تابع $f(x)$ دارای دوره تناوب نیست (تابع متناوب نیست).این تابع زوج رند نیست زیرا $f(-x) \neq f(x)$ (دارد زوج ضمیمه) و $f(-x) \neq -f(x)$ (نیست فرد ضمیمه).چون $3x^4$ غالب تابع است پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^4) = +\infty$

نکته: بطور دقیق تر:

 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x^4 \left(1 - \frac{16}{3x} + \frac{6}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x^4 = +\infty$ (درین مجانب قائم - افقی و مایل ندارد) $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-3)(x-1) = 0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$ نقاط بحرانی تابع $f''(x) = 36x^2 - 96x + 36 = 12(3x^2 - 8x + 3) = 0$ $\begin{cases} x = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \end{cases}$ $y=0 \Rightarrow x^2(3x^2 - 16x + 18) = 0$ $\begin{cases} x=0 \\ x \approx 1/6 \\ x \approx 3/8 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	-	+	
$f''(x)$	+	+	-	-	+	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$(-\infty)$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$(+\infty)$
		min	عطف	max	عطف	min	

مقدار تقریبی است



$$R_f = [-2, +\infty)$$

مسئله ۲: نمودار تابع $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 12x^2$ را رسم کنید (باتمام توصیحات).
 حل: $R_f = \mathbb{R}$ (چون تابع حید صلبی است) تابع نوزج و نه فرد است. بجانب قائم و افقی و میل ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^4 \left(1 - \frac{11}{2x} + \frac{6}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^4 = +\infty$$

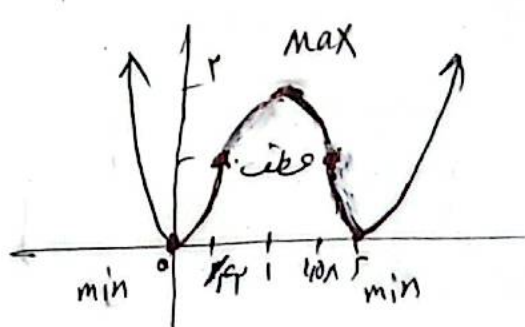
$$f(x) = 2x^2(x^2 - 5x + 6) = 2x^2(x-2)(x-3) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 11x^3 - 22x^2 + 24x = 11x(x^2 - 2x + 2) = 11x(x-1)(x-2) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 33x^2 - 44x + 24 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1/2 \\ x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1.577 \end{cases}$$

چون تابع حید صلبی است متناوب نیست

x	$-\infty$	0	$1/2$	1	1.577	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	-	+	
$f''(x)$	+	+	-	-	+	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	
		min	عطف	max	عطف	min	



$$R_f = [0, +\infty)$$

$$f(1/2) = f(1.577) \approx 1$$

مثال ۳: نمودار تابع

حل: به سبب است $D_f = \mathbb{R}$ زیرا در تابع $f(x) = \sqrt{x^2} \sqrt{4-x} = x^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}} = f(x)$ نمایی دارد که مایه در است تابع نه زوج است و نه فرد. تابع بجانب قائم و عمود واقعی ندارد زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x} = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

این تابع تناوبی هم نیست.

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}} [2(4-x) - x] =$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}} [8-3x] = \frac{8-3x}{2x^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=8 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{مشتق} \\ \text{مساوی} \end{array}$$

$$f'(x) = (8-x) x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (8-x) x^{-\frac{3}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (8-x) x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

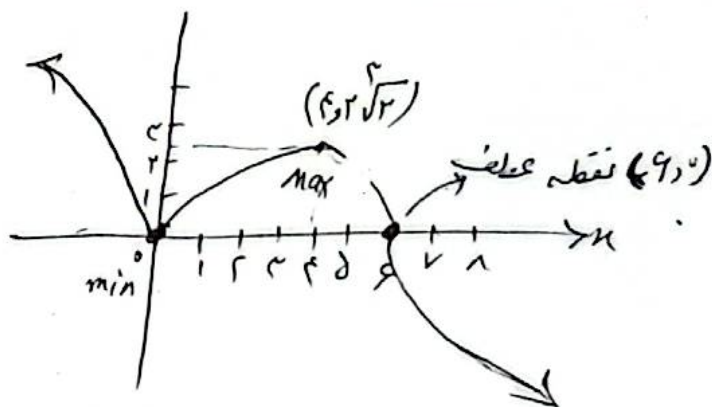
$$f''(x) = -x^{-\frac{1}{2}} (4-x)^{-\frac{1}{2}} \left[x(4-x) + \frac{1}{2} (8-x)(4-x) - \frac{1}{2} (8-x)x \right] =$$

در اینجا سه نقطه

$$y=0 \Rightarrow x=0, x=8$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^{\frac{1}{2}}(4-x)^{\frac{1}{2}}} \neq 0$$

x	$-\infty$	0	4	8	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\min$	$\max$	0	$-\infty$



$$R_f = [0, 2\sqrt{2}]$$

$$y = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

مثال ۴: نمودار تابع

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$y=0 \Rightarrow x=0$$

تابع زوج است زیرا $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1} = f(x)$ و $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ و چون تابع زوج است پس نمودار آن متقارن به محور y است.

خطوط $x=1$ و $x=-1$ خطوط جانب قائم نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(0^-)(2)} = -\infty$$

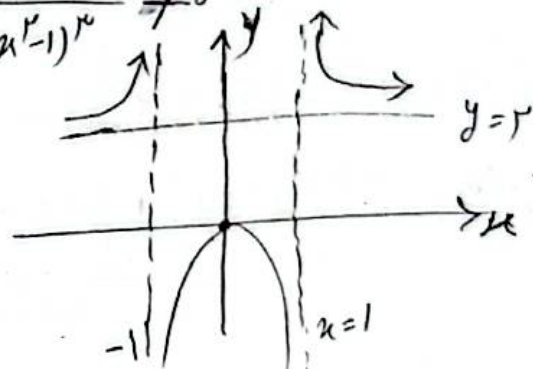
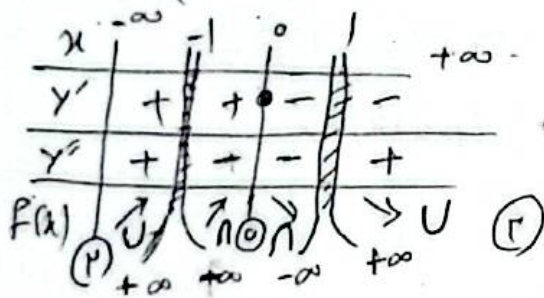
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(-2)(0^+)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(-2)(0^-)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

خط $y=2$ خط جانب افقی نمودار تابع است زیرا

$$y' = \frac{f(x(x^2-1)) - f(x(x^2-1))}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$y'' = \frac{-2(x^2-1)^2 - f(x(x^2-1))(-2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^4} \neq 0$$



$$R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ y=0 &\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \frac{(2n+1)\pi}{2} \end{aligned}}$$

مثال ۵: نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ را رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

حل: چون $2+\sin x \neq 0$ پس

تابع $f(x)$ نه زوج است و نه فرد.

تابع $f(x)$ تناوبی با دوره تناوب 2π است زیرا:

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

پس کافی است که نمودار تابع را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنیم پس آن را در بازه‌های دیگر تکرار کنیم. (بازه‌های $[-2\pi, 0]$ و $[2\pi, 4\pi]$...)

$$f'(x) = \frac{(2+\sin x)(-\cos x) - \cos x(\cos x)}{(2+\sin x)^2} = -\frac{2\sin x + 1}{(2+\sin x)^2}$$

این تابع جانب قائم و افقی و محل ندارد.

$$f''(x) = \frac{2\cos x(2+\sin x) - 2\cos x(2+\sin x)(2\sin x+1)}{(2+\sin x)^4} = \frac{-2\cos x(1-\sin x)}{(2+\sin x)^4} = \frac{2\cos x(\sin x-1)}{(2+\sin x)^4}$$

جدول

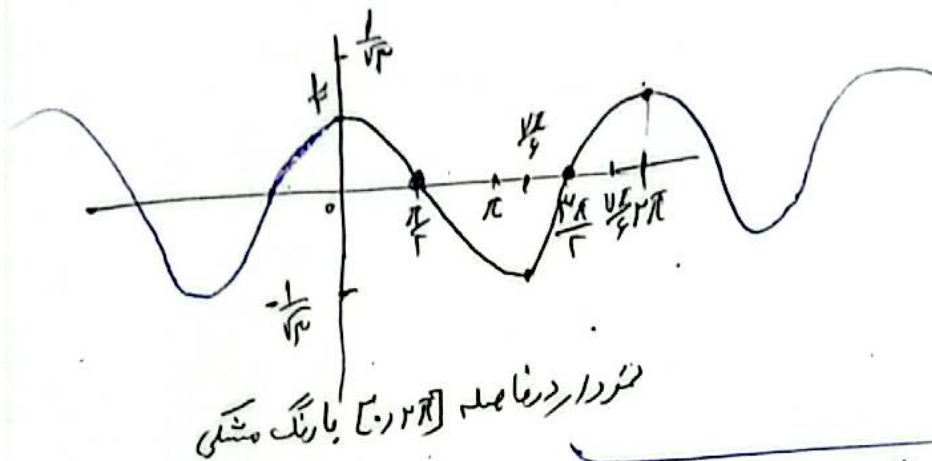
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	-	-	0	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

حاصل می‌شود: $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$



$$R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

عملگرایی با محورهای مختصات

$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y=0 \Rightarrow x=0$$

مثال 6: نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ را رسم کنید.

حل: $R_f = \mathbb{R}$

تابع فرد است زیرا $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$

بنابراین نمودار نسبت به مبدأ متقارن است.

نمودار عجیب تا هم وقتی x بزرگ می‌شود و عجیب می‌شود و $y=x$ دارد زیرا

و عجیب می‌شود $y=x$ است.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

x^3	x^2+1
x^3+x	x
$-x$	

باقسیم داریم

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - x| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{x}{x^2+1} \right| = 0$$

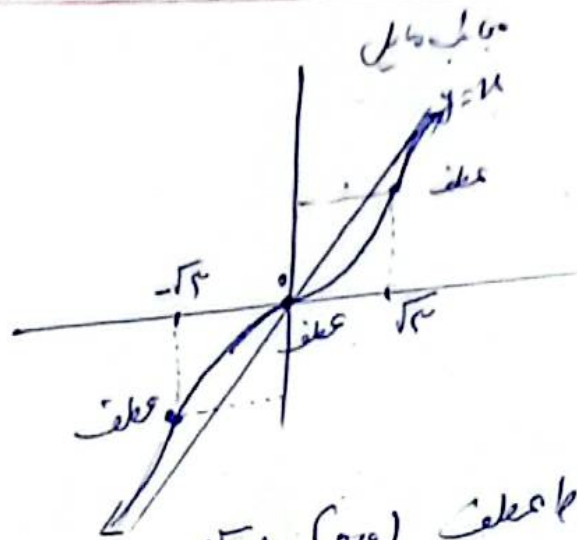
تابع نامتناهی نیست.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x=0$$

$$f''(x) = \frac{(2x^2+3)(x^2+1)^2 - (x^2(x^2+3)) \cdot 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	+	+	0	+	+
y''	+	-	+	-	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	
$3-x^2$	-	+	+	-
$x(3-x^2)$	+	-	+	-



نقاط عطف $(0,0)$ و $(-\sqrt{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4})$ و $(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$ است

$$R_f = \mathbb{R}$$



مایل نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ را رسم کنید

حل: چون $x^2 + x + 1 > 0$ و $\Delta = 1 - 4 < 0$ و طبق جدول تعیین علامت $R_f = \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} \sim \left|x + \frac{1}{2}\right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - (x + \frac{1}{2})| = 0$$

در نقطه $x \rightarrow +\infty$ مایل نمودار تابع است $y = x + \frac{1}{2}$ و $y = -x - \frac{1}{2}$ مایل نمودار تابع است

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - (-x - \frac{1}{2})| = 0$$

$$|x + \frac{1}{2}| = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \geq -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} & x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

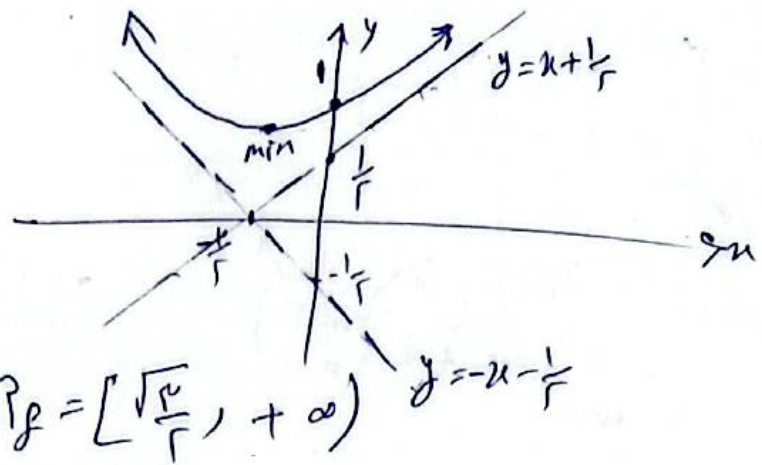
$$f''(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)x}{x^2+x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2(x^2+x+1) - (x^2+x)}{2(x^2+x+1)^{3/2}} \right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3x^2 + 3x + 2}{2(x^2+x+1)^{3/2}} \neq 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{r}$	$+\infty$
y'	-		+
y''	+		+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

$\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)$



$$x=0 \Rightarrow y=1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

مثال ۸: نمودار تابع

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$$

$1+x=0 \Rightarrow x=-1$

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = \frac{x^2+1}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{1+x} = f(x) = (x-1) + \frac{2}{1+x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - (x-1)| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{2}{1+x} \right| = 0$$

خط $y = x - 1$ مجانب عمودی نمودار تابع است
خط $x = -1$ مجانب افقی نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

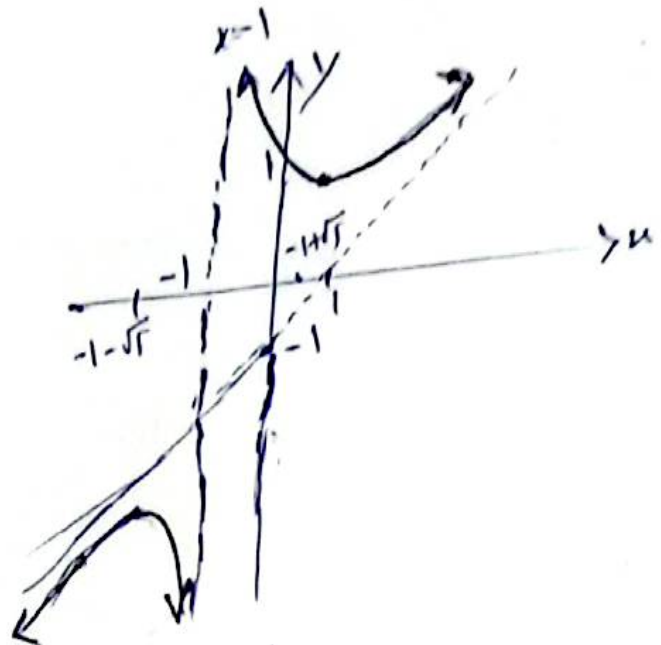
$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} = 0 \quad \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع

$$f''(x) = \frac{(2+2)(1+x)^2 - 2(1+x)(x^2+2x-1)}{(1+x)^4} = \frac{(2+2)(1+x) - 2(x^2+2x-1)}{(1+x)^3} = \frac{4}{(1+x)^3}$$

تابع نزاع است زیرا در زیر دامنه هم قرینه نیست $(1 \in D_f \nRightarrow -1 \in D_f)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
y''	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$(-2\sqrt{2}, \text{Max})$		$(2\sqrt{2}-2, \text{min})$	



$$R_f = (-\infty, -2\sqrt{2}-1] \cup [2\sqrt{2}-2, +\infty)$$

یادآوری: مجانب‌های نمودار یک تابع (مجانب افقی، قائم و مایل)

خط $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامند هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

مثال ۱ خط

$$y=1 \quad \text{مجانب افقی نمودار تابع} \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{است زیرا}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

نکته: در تابع گویا (کسری) اگر درجه صورت و مخرج یکسان باشد در این صورت نمودار تابع دارای مجانب افقی است

مثال ۲: مجانب افقی نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x}{3x} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{و} \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

مجانب‌های افقی نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2}x}{3x} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامند هرگاه یکی از چارچوب زیر را داشته باشد

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

در مثال ۲ خط $x = \frac{5}{3}$ بجانب قائم نمودار تابع

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \frac{\sqrt{\frac{25}{9}+1}}{0^+} = +\infty$$

$$x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+$$

$$x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^-} f(x) = -\infty$$

نکته: برای تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $x=a$ ریشه معادله $g(x)=0$ باشد ولی ریشه $f(x)=0$ نباشد در این صورت خط $x=a$ بجانب قائم نمودار تابع است.

مثال خط $x=1$ بجانب قائم نمودار تابع

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1) \quad ; \quad x \neq 1$$

خط $y = mx + b$ را بجانب میل نمودار تابع $y=f(x)$ نامند هرگاه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - mx - b| = 0$

چگونه بجانب میل نمودار تابع $y=f(x)$ را بیابیم.

روش اول: اگر در تابع گویا $f(x)$ درجه صورت یک واحد بیشتر از درجه مخرج باشد آنگاه با تقسیم صورت بر مخرج که بجانب میل یعنی $y = mx + b$ پیدا می شود.

$$y = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\frac{x^2+1}{x+1} \div \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y = x-1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - (x-1)| = 0$$

روش دوم اگر تابع $f(x)$ دارای بجانب میل باشد آنگاه

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$$

۱

در مثال ۱ قسمت دوم هم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ داریم درجانب میل $y = x + \frac{1}{2}$ و $y = -x - \frac{1}{2}$ است. نیز طبق همبازی برای n زوج باید $\alpha \neq 0$ باشد.

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \left| x + \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \geq -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - (x + \frac{1}{2})| = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) + (x + \frac{1}{2})| = 0$$

البته می توان از روش دوم هم بجانب میل این نمودار تابع یافت:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1 \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

بنابراین $y = mx + b = x + \frac{1}{2}$ بجانب میل نمودار تابع $f(x)$ است

$$m = -1 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{-x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{-x(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین خط $y = mx + b = -x - \frac{1}{2}$ بجانب میل نمودار تابع $f(x)$ است.



قسمت ۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y = x^2 - 4x^3$ (۳)	$y = 3x^2 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ (۲)	$y = x^{\frac{1}{5}}(4 - x)$ (۱)
$y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ (۶)	$y = \frac{x^2}{4-x^2}$ (۵)	$y = 5x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{5}{5}}$ (۴)

حل معادله مستثنائی $\sin x = \alpha$ و $\cos x = \alpha$ و $\tan x = \alpha$ و $\cot x = \alpha$

① برای حل معادله $\sin x = \alpha$ فرض کنید $\sin \varphi = \alpha$ و $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ و $\sin \varphi = \alpha$ بنابراین

جواب های معادله $\sin x = \alpha = \sin \varphi$ عبارت است از $x = 2k\pi + \varphi$ و $x = 2k\pi + \pi - \varphi$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$

مثال ۱: معادله $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

حل: چون $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پس $\varphi = \frac{\pi}{4}$ است بنابراین جواب به صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$ است که در آن $k \in \mathbb{Z}$ درخواه است.

② - برای حل معادله $\cos x = \alpha$ فرض کنید $\cos \varphi = \alpha$ و $0 \leq \varphi < \pi$ و $\cos \varphi = \alpha$ باشد در این صورت

جواب های معادله $\cos x = \alpha = \cos \varphi$ عبارت است از $x = 2k\pi \pm \varphi$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ درخواه است.

مثال ۲: معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

حل: چون $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ پس $\varphi = \frac{\pi}{3}$ است بنابراین جواب معادله عبارت است از $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ درخواه است.

③ - برای حل معادله $\tan x = \alpha$ فرض کنید $\tan \varphi = \alpha$ و $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ و $\tan \varphi = \alpha$ در این صورت

جواب های معادله $\tan x = \alpha = \tan \varphi$ عبارت است از $x = k\pi + \varphi$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ درخواه است.

مثال ۳: معادله $\tan x = 1$ را حل کنید.

حل: چون $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ پس $\varphi = \frac{\pi}{4}$ است بنابراین جواب های معادله عبارت است از $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ درخواه است.

④ برای حل معادله $\cot x = \alpha$ فرض کنید $\cot \varphi = \alpha$ و $0 < \varphi < \pi$ و $\cot \varphi = \alpha$

در این صورت معادله $\cot x = \alpha = \cot \varphi$ دارای جواب های $x = k\pi + \varphi$ است که در آن $k \in \mathbb{Z}$ درخواه است.

مثال ۴: معادله $\cot x = \sqrt{2}$ را حل کنید.

حل: چون $\cot(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ پس $\varphi = \frac{\pi}{4}$ است بنابراین جواب های معادله عبارت است از $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ برای $k \in \mathbb{Z}$

حالت های خاص: الف) جواب معادله $\sin x = 0$ عبارت است از $x = k\pi$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$

ب) جواب معادله $\sin x = -1$ عبارت است از $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

ج) جواب معادله $\sin x = 1$ عبارت است از $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

د) جواب معادله $\cos x = 0$ عبارت است از $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

ه) جواب معادله $\cos x = -1$ عبارت است از $x = 2k\pi + \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

و) جواب معادله $\cos x = 1$ عبارت است از $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

مثال ۵ اگر $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ آنگاه $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$ بنابراین $\varphi = \frac{\pi}{3}$

بنابراین $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ و $\cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ بنابراین جواب معادله است از

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$



بهینه سازی و مسائل بهینه سازی

مسائل عملی بسیاری وجود دارد که درگیر تعیین بزرگترین مقدار کمترین مقدار، کمترین بهای، کوتاهترین زمان، کوتاهترین فاصله، بیشترین درآمد و سود و... می باشند. در این مسائل "بهترین" مقدار کمیت متغیری خواسته می شود. با این گونه مسائل را مسائل بهینه سازی می نامیم. کمیتی که باید بهینه شود را می توان به صورت تابعی از یک متغیر بیان کرد و پس با کمک قضیه اکستریم مطلق و یا قضیه های اکستریم آن کمیت را بهینه کرد.

مرحله حل مسائل بهینه سازی:

۱- فهمیدن مسأله: شناخت داده ها و شناخت خواسته ها (مجهولات) مخصوص و اثره های که در صورت مسئله به کار رفته است.

۲- کشیدن شکل: در اکثر مسأله ها رسم شکل کمک می کند که رابطه بین داده ها و مجهولات را می بینیم.

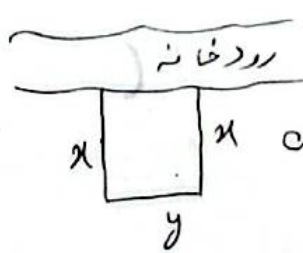
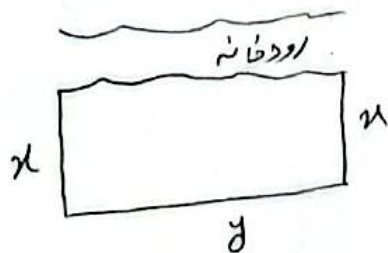
۳- نهادن دلائل کردن: یعنی داده ها و مجهولات را با مفاهیم نامگذاری می کنیم و یک تابع ریاضی که باید بهینه شود را بدست می آوریم [بازی این تابع یک بازه یا بازه بسته می یابیم]

۴- اگر تابع ریاضی بیش از یک متغیر داشته باشد به کمک مفروضات مسئله رابطه (معادله) بین این متغیرها می یابیم و به کمک آن معادله همه متغیرها را بر حسب یک متغیر نوشتیم تا تابع ریاضی یک متغیر شود.

۵- با استفاده از اکستریم مطلق و نسبی تابع بدست آمده را اکستریم می کنیم.

توجه: اگر دامنه تابع ریاضی بدست آمده بازه بسته باشد قضیه اکستریم مطلق را برای حل مسأله به کار می آوریم.

مثال ۱: کشاورزی ۲۴۰۰ متر توری دارد و می خواهد دور زمین کشاورزی خود که بارودخانه ای مستطین هم مرز است با توری حصار کشی کند. میز بارودخانه نیازی به حصار کشی ندارد. (ابعاد مستطیلی که بیشترین مساحت را دارد چیست؟) (با عبارت دیگر بیشترین زمین مستطیل شکل که کشاورزی می تواند حصار کشی کند چیست؟)



چه باشد؟

حل: مستطیلی های متفاوتی می توان رسم کرد.

$$\text{محیط زمین} = 2x + y = 2400 = \text{طول توری}$$

$$y = 2400 - 2x$$

$$A = \text{مساحت زمین} = xy = x(2400 - 2x)$$

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \quad 0 \leq x \leq 1200$$

یا متن دامنه (یا بازه مورد نظر)

چون x و y هر دو نمی توانند منفی باشند پس $x \geq 0$ و $1200 \leq x$ (در غیر این صورت مساحت منفی می شود)

روش دیگری: هر وقت هدف ما کمینه کردن است تابع را مساوی صفر قرار می دهیم و از ریشه آن ابتدا او را برای بازه یا دامنه می یابیم.

$$A(x) = x(2400 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1200 \Rightarrow I = [0, 1200]$$

$$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{2400}{4} = 600 \quad \text{نقطه بحرانی}$$

حال طبق قضیه اکستریم مطلق، بیشترین مقدار تابع $A(x)$ روی بازه $[0, 1200]$ در بین مقدار زیر است:

$$A(0) = 0, A(1200) = 0, \boxed{A(600) = 720000} \quad \text{بیشترین مقدار مطلق}$$

$$y = 2400 - 2(600) = 1200 \quad \text{بیا برای}$$

پس طول ۱۲۰۰ و عرض ۶۰۰ متر خواهد بود.

می توان از آزمون مشتق مرتبه دوم، اکستریم مطلق را ثابت یعنی چون $A''(x) = -4 < 0$ پس در $x = 600$

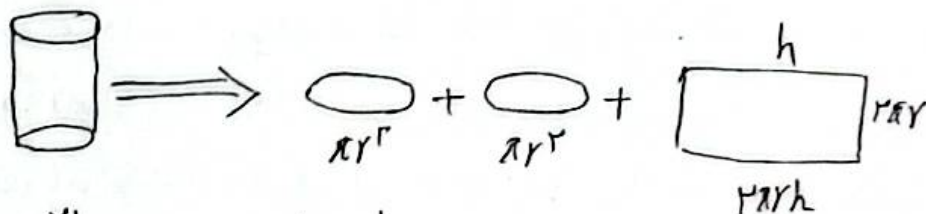
حداکثر مقدار مطلق دارد. $\rightarrow$ درسته

مثال ۲: فرض کنیم یک قوطی استوانه ای شکل طوری بسازیم که یک لیتر روغن بگیرد. ابعاد این قوطی را پیدا کنید که هرینه فلز بکار رفته در ساخت این قوطی می نینم گردد.

حل: ۲ را شعاع و h را ارتفاع استوانه بر حسب سانتی متر در نظر بگیریم پس $\pi r^2 h = 1000 =$ حجم استوانه

با بد مساحت سطح جانبی استوانه را می نینم مطلق کنیم

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$



$$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \quad I = (0, +\infty)$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

نقطه بحرانی تابع.

چون بازه I باز است از قضیه اکستریم مطلق برای بازه های باز که در صفحه بعد می آید استفاده می کنیم.

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} A(r) = 0 + \infty = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} A(r) = +\infty + 0 = +\infty \Rightarrow A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = \text{مقدار می نینم مطلق}$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} \quad \text{بیا برای} \quad r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \quad \text{مقدار می نینم مطلق تابع } A(r) \text{ را می دهیم در این صورت}$$

معنی $h = 2 \sqrt{\frac{500}{\pi}} = 22$ پس ابعاد استوانه باید $h = 22$ و $r = \sqrt{\frac{500}{\pi}}$ باشد تا هزینه کم شود.

در مثال قبل می توان به دو توصیه زیر دست کرد.

توجه (۱) برای مینیمم کردن تابع $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ تحت شرط $\pi r^2 h = 1000$ می توان از مشتق گیری ضمنی کمک گرفت (یعنی h را به حسب r پیدا نکرد) اما کافی از h در نظر بگیریم و از دو معادله بالا نسبت r به مشتق ضمنی بگیریم.

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r h' = 0 \quad \text{و} \quad 2\pi r h + \pi r^2 h' = 0$$

می بینیم در نقطه بحرانی انتقادی می افتد پس دو معادله $A' = 0$ و $2\pi r h + \pi r^2 h' = 0$ به هم حل می کنیم.

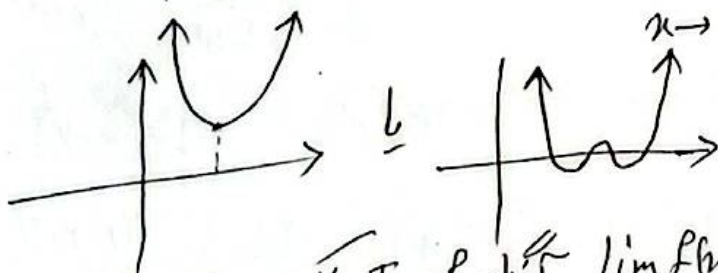
$$\begin{cases} 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r h' = 0 \Rightarrow 2r + h + r h' = 0 \\ 2\pi r h + \pi r^2 h' = 0 \Rightarrow 2h + r h' = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق کردن}} \begin{cases} 2r - h = 0 \Rightarrow h = 2r \end{cases}$$

توجه (۲) اگر در مثال قبل بخواهیم که سر قوطی استوانه باز باشد (یعنی قوطی سر نه داشته باشد) در این صورت باید

مسئله را با تغییرات $A = \pi r^2 + 2\pi r h$ و $\pi r^2 h = 1000$ حل کنیم.

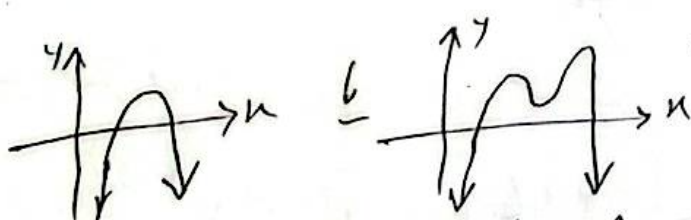
مفهوم آنکه سر مطلق روی بازه های باز: فرض کنید که f تابعی پیوسته و یکنواخت باشد $I = (a, b)$ باشد (یعنی a و b می تواند $-\infty$ و $+\infty$ هم باشند) در این صورت

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ آنگاه f بر I مینیمم مطلق دارد.



یعنی شکل نمودار به صورت مقابل است.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ آنگاه f بر I ماکسیمم مطلق دارد.



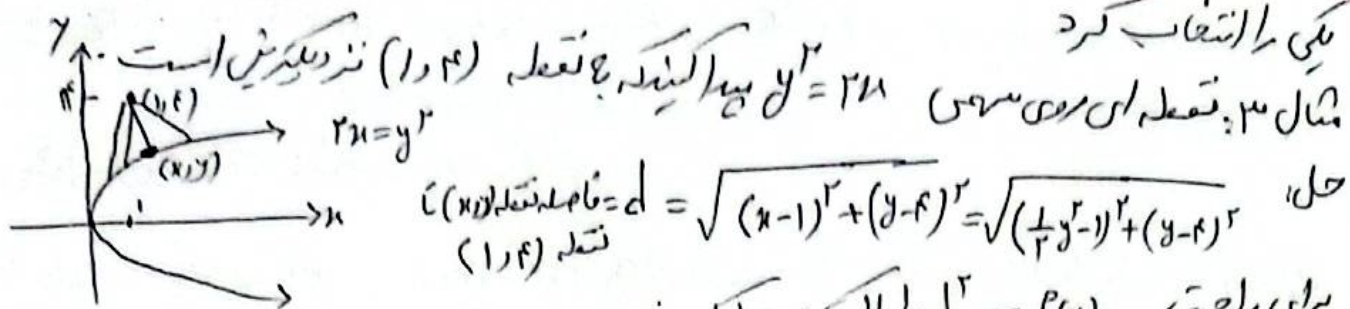
یعنی شکل نمودار به صورت مقابل است.

توجه: در قضیه بالا می توانه بازه I به صورت $I = [a, b)$ یا $I = (a, b]$ باشد.

در این صورت برای $I = [a, b)$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = ?$ و باید بین $f(a)$ و $f(c)$ که c نقطه بحرانی است (یعنی $f'(c) = 0$) مقایسه کرد.

و برای $I = (a, b]$ $f(a) = ?$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ و باید بین $f(a)$ و $f(c)$ که c نقطه بحرانی است مقایسه کرد.

یکی را انتخاب کرد



$$f(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2 \quad I = [0, +\infty)$$

$$f'(y) = 2(\frac{1}{2}y)(\frac{1}{2}y^2 - 1) + 2(y - 4) = y^3 - 2y + 2y - 1 = y^3 - 1 = 0 \rightarrow y = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty, \quad f(0) = 1 + 16 = 17$$

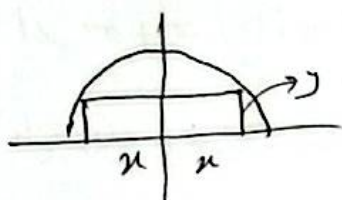
کمترین مقدار طبق مقصود اسکریپت مطلق روی بازه بازین $f(0)$ و $f(1)$ است $y \rightarrow +\infty$

$$f(1) = (\frac{1}{2} - 1)^2 + (1 - 4)^2 = 1 + 9 = 10 \quad , \quad f(0) = 17$$

کمترین فاصله $= \sqrt{10}$
مقیاس مطلق

$$y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, 1)$$

مثال ۴: مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که می توان آن را در نیمه دایره ای با شعاع ۲ محاط کرد.



حل: روش اول: فرض کنید که معادله نیمه دایره $x^2 + y^2 = 2^2$ باشد

معنی $y = \sqrt{4 - x^2}$

$$A = \text{مساحت مستطیل} = 2xy = 2x\sqrt{4 - x^2} \quad I = [0, 2]$$

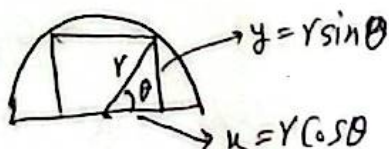
$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2} \quad I = [0, 2] \Rightarrow A'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \right) = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad , \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

درین طبق مقصود اسکریپت مطلق روی بازه بسته $[0, 2]$ داریم:

$$A(0) = 0, \quad A(2) = 0, \quad A(\frac{2}{\sqrt{2}}) = 2(\frac{2}{\sqrt{2}})\sqrt{4 - \frac{4}{2}} = 2\sqrt{2}$$

ماکسیمم مطلق



روش دوم: فرض کنید که θ زاویه باشد که داده شده در شکل مقابل باشد. در این صورت

$$A(\theta) = (2r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2 \sin 2\theta = r^2$$

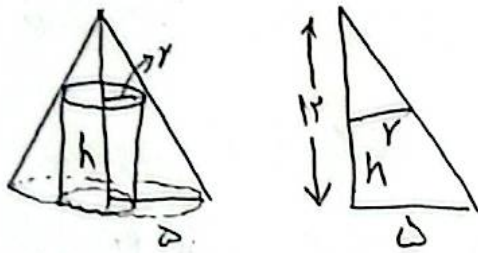
ماکسیمم مطلق

چون $1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ و ماکسیمم مطلق $A(\theta)$ وقتی است که $\sin 2\theta = 1$ یعنی $2\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ پس

$$\begin{cases} x = r \cos \frac{\pi}{4} = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}} \\ y = r \sin \frac{\pi}{4} = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ یعنی } (x, y) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

و مساحت ماکسیمم برابر r^2 است.

مثال ۵. (تمرین ۲۸ کتاب استوارت صفحه ۳۲۰) مطلوب است ابعاد استوانه مستدیر قائم یا بیشترین حجم که بتوان آن را در یک مخروط مستدیر قائم به شعاع ۵ سانتی متر و ارتفاع ۱۲ سانتی متر محاط کرد.



$$V = \pi r^2 h = \text{حجم استوانه}$$

طبق تناسب در مثلث متشابه داریم

$$\frac{12-h}{12} = \frac{r}{5} \Rightarrow h = \frac{60-12r}{5}$$

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{60-12r}{5} \right) = \frac{12}{5} \pi (5r^2 - r^3) \quad r \in [0, 5]$$

طبق تفحص اکسترمم مطلق در بازه بسته:

$$V'(r) = \frac{12}{5} \pi (10r - 3r^2) = 0 \quad \begin{cases} r=0 \\ r=\frac{10}{3} \end{cases}$$

$$V(0) = 0, \quad V(5) = 0, \quad \boxed{V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400\pi}{9}} \quad \boxed{r = \frac{10}{3} \rightarrow h = 4}$$

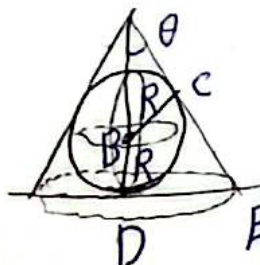
ماکسیمم مطلق ابعاد استوانه

توجه: می توان تابع V را بر حسب h نوشت در این صورت $h \in [0, 12]$ و $V(h) = \pi h \left(\frac{60-5h}{12} \right)^2$

مثال ۶: حجم کوچکترین مخروط مستدیر قائم محیط یک کره به شعاع R می باشد.

$$\text{حجم مخروط} = V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

h ارتفاع مخروط و r شعاع قاعده مخروط است.



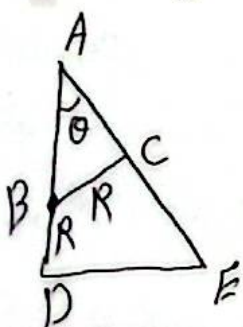
در مثلث قائم الزامی $\triangle ADE$ داریم:

$$\textcircled{1} \quad \tan \theta = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{r}{h}$$

در مثلث قائم الزامی $\triangle ABC$ داریم

$$\tan \theta = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{R}{\sqrt{h^2 - r^2}}$$

$$|AC| = \sqrt{(R-h)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 - 2Rh}$$



طبق (۱) و (۲) داریم $\frac{r}{h} = \frac{R}{\sqrt{h^2 - 2Rh}}$ بنابراین $r = \frac{Rh}{\sqrt{h^2 - 2Rh}}$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi h \left(\frac{Rh}{\sqrt{h^2 - 2Rh}} \right)^2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \left(\frac{h^2}{h^2 - 2Rh} \right) \quad I = (2R, +\infty)$$

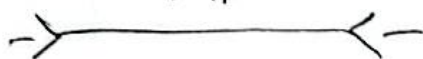
$$f'(h) = \frac{1}{3} \pi R^2 \left[\frac{2h(h-2R) - h^2}{(h-2R)^2} \right] = \frac{1}{3} \pi R^2 \left[\frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2} \right] = 0 \quad \begin{cases} h=0 \\ h=4R \end{cases}$$

نقطه بحرانی

طبق قضیه اکستریم مطلق روی بازه باز داریم: چون $\lim_{h \rightarrow (2R)^+} V(h) = +\infty = \lim_{h \rightarrow +\infty} V(h)$

پس می‌توانیم مطلق $V(4R) = \frac{1}{3} \pi R^2$ است

بنابراین $h=4R$ و $r = \frac{4R^2}{\sqrt{16R^2 - 8R^2}} = \frac{4R}{2\sqrt{2}}$



تمرین (۱) کوتاهترین فاصله بین نقطه $P(2,0)$ و منحنی $y = \sqrt{x}$ را بیابید.

(۲) کوتاهترین فاصله بین نقطه $A(2, \frac{1}{4})$ تا منحنی $y = x^2$ را بیابید.

(۳) می‌خواهیم یک استوانه مستقیم قائم را در یک کره به شعاع معروض محاط کنیم. نسبت (ارتفاع به شعاع قاعده استوانه) چند باشد تا مساحت روی جانبی استوانه حداکثر ممکن باشد.

۴- می‌خواهیم با یک متوازی‌المربعی شکل به ضلع ۱۲ سانتی متر یک جعبه مربعی بسازیم. برای این منظور باید از چوب گونش آن مربع کوچکی ببریم و لبه‌های باقی مانده را به تازده تا جعبه ساخته شود. ما کسب حجم جعبه‌ای که به این طریق ساخته می‌شود چقدر است؟

۵- مساحت بزرگترین مستطیلی را بیابید که می‌توان آن را در بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ محاط کرد.

۶- ابعاد مستطیلی بزرگترین مساحت را بیابید که قاعده اش روی محور x باشد و در رأس شیبش بالای محور x محور y سهی. $x=1$ قرار داشته باشد.

۷- ابعاد مستطیلی بزرگترین مساحت را بیابید که می‌توان آن را در دایره‌ای به شعاع ۲ محاط کرد.