

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

رابطه بسط توابع و ضرب داخلی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- ۱ رابطه بسط توابع و ضرب داخلی
- رابطه بسط توابع و ضرب داخلی
- بردار ضرایب بسط

ضرب داخلی

- فرض کنید بسط دو تابع را (در نمادگذاری دیراک) به صورت زیر یافته ایم:

$$|f\rangle = \sum_{\mu} a_{\mu} |\varphi_{\mu}\rangle \quad |g\rangle = \sum_{\nu} b_{\nu} |\varphi_{\nu}\rangle$$

البته با توجه به ویژگی های ضرب داخلی می توان ضرب داخلی این دو را به شکل زیر نوشت:

$$\langle f | g \rangle = \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu}^* b_{\nu} \langle \varphi_{\mu} | \varphi_{\nu} \rangle$$

البته اگر مجموعه توابع پایه φ یکامتعامد باشند، یعنی $\langle \varphi_{\mu} | \varphi_{\nu} \rangle = \delta_{\mu\nu}$ ، آنگاه ضرب داخلی این دو تابع به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\langle f | g \rangle = \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu}^* b_{\nu} \delta_{\mu\nu} = \sum_{\mu} a_{\mu}^* b_{\mu} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots \quad *$$

- همچنین، وقتی که دو تابع با هم برابر باشند $f = g$ ، می توان نوشت

$$\langle f | f \rangle = \sum_{\mu} |a_{\mu}|^2$$

این نتیجه با شرط $\langle f | f \rangle \geq 0$ سازگار است. در این نامساوی برابری وقتی رخ می دهد که f تقریباً در همه جا صفر باشد.

ضرب داخلی

- حال اگر مجموعه ضرایب a_μ را با یک بردار ستونی $\mathbf{a}$ نشان داده و آن را به عنوان تابع f در پایه های φ بشناسیم، و به همین صورت بردار $\mathbf{b}$ نشان دهنده تابع g باشد،

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

آنگاه می توان دو تعریف ضرب داخلی در اسلاید قبل را به صورت زیر نوشت:

$$\langle f|g \rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}, \quad \langle f|f \rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}.$$

توجه: برای محاسبه الحاقی $\mathbf{a}^\dagger$ باید بردار ستونی $\mathbf{a}$ را تبدیل به یک بردار سطری کنیم (ترانهاده بردار) و سپس مزدوج مختلط هر درایه را حساب کنیم. در نتیجه داریم:

$$\mathbf{a}^\dagger = (a_1^*, a_2^*, \dots)$$

پس می توان نوشت:

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = (a_1^*, a_2^*, \dots) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \dots$$

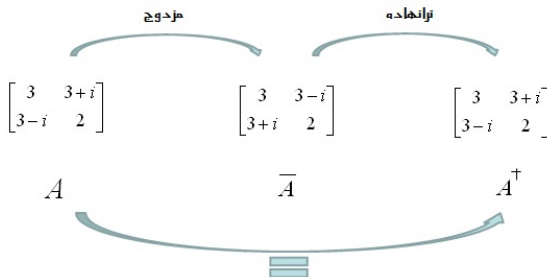
که برابر با رابطه * در اسلاید قبل و یک اسکالر است.

یادآوری الحاقی یک ماتریس

- الحاقی (adjoint) یک ماتریس حاصل هر دو عمل ترانهاده و مزدوج مختلط (با ترتیب دلخواه) است. الحاقی یک ماتریس را با $A^\dagger$ نشان می دهند (بخوانید ای دگر). بنابراین می توان نوشت:

$$A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T \quad \Leftrightarrow \quad (A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$$

مثال زیر را ببینید.



- توجه کنید که در عمل الحاقی جای عناصر ماتریس تغییر می کند.

بردار ضرایب بسط

- مثال: در ادامه می خواهیم رابطه بین بسط یک تابع و ضرب داخلی را در عمل با یک مثال ببینیم. مجموعه توابع پایه یکامتعاملد زیر بر روی بازه $0 \leq x \leq \pi$ را در نظر بگیرید.

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{\pi}} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

حال فرض کنید که می خواهیم دو تابع زیر را بر حسب توابع پایه بالا بسط دهیم.

$$\psi_1 = \cos^3 x + \sin^2 x + \cos x + 1 \quad \text{and} \quad \psi_2 = \cos^2 x - \cos x$$

یادآوری می کنیم که ضرایب بسط بر حسب توابع یکامتعاملد از رابطه $\langle \varphi_n | \psi \rangle$ به دست می آیند. بنابراین ”بردار ضرایب” برای این دو تابع به شکل زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0 | \psi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle \\ \langle \varphi_2 | \psi_1 \rangle \\ \langle \varphi_3 | \psi_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0 | \psi_2 \rangle \\ \langle \varphi_1 | \psi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle \\ \langle \varphi_3 | \psi_2 \rangle \end{pmatrix}$$

البته می توان مولفه های $\langle \varphi_4 | \psi_1 \rangle$ ، $\langle \varphi_4 | \psi_2 \rangle$ و ... را نیز نوشت. ولی همه این مولفه ها صفرند و تاثیری در محاسبات نخواهند داشت. ما نیز به خاطر اختصار آنها را نمی نویسیم.

- تمرین: چهار ضریب ابتدایی $\langle \varphi_n | \psi_1 \rangle$ و $\langle \varphi_n | \psi_2 \rangle$ را بیابید. پاسخ در ادامه.

بردار ضرایب بسط

تمرین: چهار ضریب ابتدایی $\langle \varphi_n | \psi \rangle$ را برای هر دو بردار بالا بیابید.

پاسخ: در واقع باید دو انتگرال زیر را در هر مورد محاسبه کنیم:

$$\langle \varphi_n | \psi_1 \rangle = \int_0^\pi \varphi_n^* \psi_1 dx = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{\pi}} \cos nx \left(\cos^3 x + \sin^2 x + \cos x + 1 \right) dx$$

$$\langle \varphi_n | \psi_2 \rangle = \int_0^\pi \varphi_n^* \psi_2 dx = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{\pi}} \cos nx \left(\cos^2 x - \cos x \right) dx$$

$$\langle \varphi_0 | \psi_1 \rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2 - \delta_{00}}{\pi}} \cos 0x \left(\cos^3 x + \sin^2 x + \cos x + 1 \right) dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{مثلا داریم:}$$

$$\langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2 - \delta_{10}}{\pi}} \cos 1x \left(\cos^3 x + \sin^2 x + \cos x + 1 \right) dx = \frac{4\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}$$

$$\langle \varphi_2 | \psi_1 \rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2 - \delta_{20}}{\pi}} \cos 2x \left(\cos^3 x + \sin^2 x + \cos x + 1 \right) dx = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

در نتیجه می توان توابع ψ_1 و ψ_2 را به صورت زیر بر حسب توابع پایه φ_n بسط داد:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\varphi_3}{4} - \frac{\varphi_2}{2} + \frac{7\varphi_1}{4} + \frac{3\sqrt{2}\varphi_0}{2} \right), \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\varphi_2}{2} - \varphi_1 + \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{2} \right)$$

بردار ضرایب بسط

- در نتیجه می توان توابع ψ_1 و ψ_2 را به صورت زیر بر حسب توابع پایه φ_n بسط داد:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\varphi_3}{4} - \frac{\varphi_2}{2} + \frac{7\varphi_1}{4} + \frac{3\sqrt{2}\varphi_0}{2} \right), \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\varphi_2}{2} - \varphi_1 + \frac{\sqrt{2}\varphi_0}{2} \right)$$

بنابراین بردار ضرایب بسط به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\mathbf{a}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ 7/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- البته توجه کنید که نتیجه مشابهی را می توان با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به صورت زیر یافت:

$$\psi_1 = \frac{\cos 3x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{7}{4} \cos x + \frac{3}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\cos 2x}{2} - \cos x + \frac{1}{2}$$

ولی راهی که در اینجا معرفی کرده ایم، در واقع یک ”روش سیستماتیک“ برای پیدا کردن ضرایب بسط هر تابع دلخواه است. منظور از روش سیستماتیک چیست؟

استفاده از متمتیکا برای یافتن بردار ضرایب بسط

منظور از روش سیستماتیک این است که می توان با روش گفته شده و محاسبات سرراست (هرچند طولانی) بسط هر تابعی را یافت. در نتیجه می توان از کدهای ساده کامپیوتری برای تولید ضرایب خواسته شده استفاده کرد. مثلاً کد متمتیکای زیر برای ضرایب بسط بالا را ببینید.

```
In[1]:= ϕ := Table[Sqrt[(2 - KroneckerDelta[n, 0]) / Pi] Cos[n * x], {n, 0, 3}]
```

```
In[2]:= ψ1[x_] := (Cos[x]) ^ 3 + (Sin[x]) ^ 2 + Cos[x] + 1
```

```
In[3]:= ψ2[x_] := (Cos[x]) ^ 2 - Cos[x]
```

```
In[4]:= Table[Integrate[ψ1[x] ϕ[[n]], {x, 0, Pi}], {n, 1, 4}]
```

$$\text{Out[4]} = \left\{ \frac{3\sqrt{\pi}}{2}, \frac{7\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}, -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4} \right\}$$

```
In[5]:= Table[Integrate[ψ2[x] ϕ[[n]], {x, 0, Pi}], {n, 1, 4}]
```

$$\text{Out[5]} = \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}, 0 \right\}$$

همه این محاسبات برای ماشین در کمتر از دو ثانیه اتفاق می افتد! و در نتیجه ما ضرایب بسط توابع را برای محاسبات بعدی در اختیار خواهیم داشت.

تمرین: مقادیر ضرب داخلی $\langle \psi_1 | \psi_3 \rangle$ را بیابید.

مقادیر ضرب داخلی دو تابع

تمرین: مقادیر ضرب داخلی $\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle$ را بیابید.

پاسخ: با استفاده از بردار ضرایب یافت شده

$$\mathbf{a}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ 7/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

می توان مقادیر ضرب داخلی دو تابع در خود و در دیگری را به صورت زیر یافت:

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_1 = \frac{63\pi}{16}, \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_2 = -\frac{\pi}{4}, \quad \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2 = \frac{7\pi}{8}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید رابطه بسط توابع و ضرب داخلی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. رابطه بسط توابع و ضرب داخلی را توضیح دهید.

۲. روش سیستماتیک بسط توابع بر حسب پایه های یکامتعامل را توضیح دهید.

۳. منظور از بردار ضرایب بسط چیست؟

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

تابع زیر

$$\alpha = \sin^4 x - \sin^3 x + \cos^2 x + \sin x - 5$$

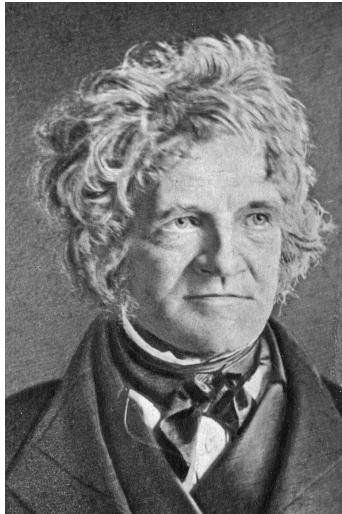
را بر حسب پایه های یکامتعامد

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{\pi}} \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

بسط دهید.

مبحث بعدی: نامساوی بسل

- در جلسه بعد درباره نامساوی بسل و اهمیت آن در فضای برداری بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

