

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی
- شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی
- مثال هایی از شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی

شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی

- با دانستن مفهوم مشتق هموردا حالا می توانیم عملگرهای دیفرانسیلی برداری را در شکل کلی تانسوری آنها به دست آوریم.
- گرادیان: مثلا در جلسات قبل دیدیم که گرادیان یک اسکالر به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \mathbf{e}^i$$

- دیورژانس: یک بردار مانند $\mathbf{V}$ که در نمایش پادوردا به صورت $V^i \mathbf{e}_i$ نوشته می شود، دیورژانسی برابر با عبارت زیر دارد:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial (V^i \mathbf{e}_i)}{\partial q^j} = \mathbf{e}^j \cdot \left(\frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{e}_i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i$$

توجه کنید که در محاسبه دیورژانس، مشتق هموردا ظاهر شده است (عبارت داخل پرانتز). همچنین، در عبارت بالا گاما با اندیس تکراری ظاهر شده است، یعنی Γ_{ik}^i ، که به معنی جمع بندی است. برای محاسبه این گاما می توان نوشت:

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \right] = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}$$

دو جمله آخر موجود در براکت (وقتی جمع بندی اعمال شود) همدیگر را خنثی می کنند.

دیورژانس در مختصات قطبی کروی

تمرین: در جلسه قبل گاماهاى کریستوفل را در مختصات قطبی کروی یافتیم.

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \cot \theta \\ \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}$$

حال با استفاده از رابطه زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \boldsymbol{\varepsilon}^j \cdot \frac{\partial (V^i \boldsymbol{\varepsilon}_i)}{\partial q^j} = \boldsymbol{\varepsilon}^j \cdot \left(\frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{jk}^i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i$$

دیورژانس در مختصات قطبی کروی را بیابید. آیا این نتیجه با نتیجه به دست آمده در فصل سوم تطابق دارد؟

نوشتار دیورژانس به شکل دیگر

دیورژانس را می توان به شکل مفید دیگری نیز نوشت. در واقع با توجه به اینکه g^{im} وارون ماتریس g_{im} است، توجه می کنیم که عبارت سمت راست در فرمول

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{im}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^m} \right] = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}$$

بسیار شبیه به فرمول مشتق یک دترمینان است که در بحث ماتریس و دترمینان با آن برخورد کرده ایم:

$$\frac{d \det(A)}{dx} = \det(A) \sum_{ij} (A^{-1})_{ji} \frac{da_{ij}}{dx}$$

البته فراموش نکنیم که تانسور متریک متقارن است $g^{mi} = g^{im}$. در نتیجه می توان نوشت:

$$\frac{d \det(g)}{dq^k} = \det(g) g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}$$

در اینجا $\det(g)$ دترمینان متریک هموردای g_{pq} می باشد. حال با استفاده از رابطه اخیر می توان گاما با اندیس تکراری را به شکل زیر نوشت:

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2 \det(g)} \frac{d \det(g)}{dq^k} = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial [\det(g)]^{1/2}}{\partial q^k}$$

نوشتار دیورژانس به شکل دیگر

● حال از رابطه اخیر، یعنی

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2 \det(g)} \frac{d \det(g)}{dq^k} = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial [\det(g)]^{1/2}}{\partial q^k}$$

استفاده کرده و آن را در تعریف دیورژانس یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \boldsymbol{\epsilon}^j \cdot \frac{\partial (V^i \boldsymbol{\epsilon}_i)}{\partial q^j} = \boldsymbol{\epsilon}^j \cdot \left(\frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{jk}^i \right) \boldsymbol{\epsilon}_i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i$$

جایگزین می کنیم. نتیجه به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V_{;i}^i = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left([\det(g)]^{1/2} V^k \right)$$

● پرسش: این رابطه برای دیورژانس یک بردار را با رابطه ۳۰۱۴۱ مقایسه کنید. آیا این دو رابطه با هم برابر هستند؟

راهنمایی: دقت کنید که در یک دستگاه خودمتعامد داریم $\det(g) = (h_1 h_2 h_3)^2$. همچنین، مولفه k ام از بردار $\mathbf{V}$ در رابطه ۳۰۱۴۱ برابر است با $V^k |\boldsymbol{\epsilon}_k| = h_k V^k$. در اینجا بر روی اندیس k جمع بندی نداریم.

دیورژانس در مختصات کروی

● شکل زیر برای دیورژانس یک بردار حالت بسیار فشرده ای دارد؛ ولی در بسیاری از محاسبات می تواند کارگشا باشد.

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2 \det(g)} \frac{d \det(g)}{dq^k} = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial [\det(g)]^{1/2}}{\partial q^k}$$

تمرین: از شکل بالا برای دیورژانس یک بردار استفاده کرده و دیورژانس در مختصات قطبی کروی را بیابید. برای اینکار شما باید از کمیت $\det(g) = (h_1 h_2 h_3)^2$ در مختصات کروی استفاده کنید. آیا رابطه به دست آمده با رابطه موجود در فصل سوم توافق دارد؟

لاپلاسین

● لاپلاسین: عملگر لاپلاسین $\nabla^2 \psi$ را نیز می توان با وارد کردن رابطه مربوط به گرادیان در رابطه مربوط به دیورژانس ساخت. البته، در رابطه دیورژانس ما از مولفه های پادوردای ∇^k استفاده می کنیم، ولی گرادیان معرفی شده در رابطه زیر

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \epsilon^i$$

همورداست. ولی پیشتر یاد گرفته ایم که مولفه های هموردا را می توان با استفاده از تانسور متریک پادوردا به مولفه های پادوردا تبدیل کرد.

$$g^{ki} \frac{\partial \psi}{\partial q^i}$$

سرانجام می توان لاپلاسین را به صورت زیر یافت:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left([\det(g)]^{1/2} g^{ki} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right)$$

در پایه های متعامد تانسور متریک قطری است و مولفه های آن برابرند با $g^{ii} = (h_i)^{-2}$.

بنابراین لاپلاسین به صورت آشنای زیر تبدیل می شود.

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right)$$

کرل

- مولفه های کرل یک بردار را نیز می توان در دستگاه مختصات عام به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} + V_k \Gamma_{ji}^k = V_{i;j} - V_{j;i}$$

با توجه به تقارن $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ می بینیم که جملات $V_k \Gamma_{ji}^k$ و $V_k \Gamma_{ij}^k$ با هم برابر هستند و بنابراین می توان آنها را به عبارت وسط اضافه و کم کرد.

- توجه: مشتقات هموردای $V_{i;j} - V_{j;i}$ کاملاً شکل تانسوری دارند.

- همچنین توجه کنید که کمیت های V_i ضرایب بردارهای (احتمالاً) غیر یک ϵ_i هستند؛ و بنابراین V_i ها ممکن است با مولفه های بردار V در پایه های متعامد و بهنجار $\hat{e}_i$ متفاوت باشند.

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی

تمرین: عملگرهای دیفرانسیلی را در دستگاه مختصات کروی به دست آورید. برای اینکار متریک هموردا و پادوردا در دستگاه کروی را در نظر بگیرید.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \mathbf{e}^i$$

گرایان را با استفاده از رابطه مقابل بیابید.
دیورژانس را با استفاده از یکی از روابط زیر بیابید.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial (V^i \mathbf{e}_i)}{\partial q^j} = \mathbf{e}^j \cdot \left(\frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{e}_i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V_{;i}^i = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left([\det(g)]^{1/2} V^k \right)$$

لاپلاسین و کرل را با استفاده از روابط زیر بیابید.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left([\det(g)]^{1/2} g^{ki} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} + V_k \Gamma_{ji}^k = V_{i;j} - V_{j;i}$$

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی

تمرین: عملگرهای دیفرانسیلی را در دستگاه مختصات کروی به دست آورید. برای اینکار متریک هموردا و پادوردا در دستگاه کروی را در نظر بگیرید.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \mathbf{e}^i$$

گرادیان را با استفاده از رابطه مقابل بیابید.

$$\nabla \psi = \varepsilon^r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \varepsilon^\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \varepsilon^\phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

پاسخ:

در ابتدا این نتیجه عجیبی به نظر می رسد، چون هیچ ربطی به نتیجه به دست آمده در فصل سوم ندارد!

$$\nabla \psi(r, \theta, \varphi) = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

ولی باید توجه کنیم که بردارهای پایه متفاوت از بردارهای یکه اند. ما در ابتدا اندیس های بالا در ε^i را با استفاده از رابطه $\varepsilon^i = g^{ij} \varepsilon_j$ به اندیس پایین تبدیل می کنیم.

$$\varepsilon^r = g^{rr} \varepsilon_r = \varepsilon_r, \quad \varepsilon^\theta = g^{\theta\theta} \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta / r^2, \quad \varepsilon^\phi = g^{\phi\phi} \varepsilon_\phi = \varepsilon_\phi / r^2 \sin^2 \theta$$

نتیجه به دست آمده باز هم اختلاف دارد. مشکل چیست؟

$$\nabla \psi = \varepsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی

- بردار ϵ_r واقعا در جهت بردار $\hat{e}_r$ می باشد، ولی مشکل در اینجا است که اندازه ϵ_r یکه نیست. به روابط زیر دقت کنید:

$$\epsilon_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z,$$

$$\epsilon_\theta = r \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_x + r \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_y - r \sin \theta \hat{e}_z,$$

$$\epsilon_\varphi = -r \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_x + r \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_y,$$

برای ساختن بردارهای یکه از ϵ_i باید آنها را بر اندازه خود تقسیم کنیم:

$$\hat{e}_r = \frac{\epsilon_r}{|\epsilon_r|} = \epsilon_r, \quad \hat{e}_\theta = \frac{\epsilon_\theta}{|\epsilon_\theta|} = \frac{\epsilon_\theta}{r}, \quad \hat{e}_\varphi = \frac{\epsilon_\varphi}{|\epsilon_\varphi|} = \frac{\epsilon_\varphi}{r \sin \theta}$$

و در نتیجه می توان گرایان

$$\nabla \psi = \epsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\epsilon_\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\epsilon_\varphi}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

را به شکل آشنای زیر نوشت:

$$\nabla \psi(r, \theta, \varphi) = \hat{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات کروی

- تمرین: عملگرهای دیفرانسیلی را در دستگاه مختصات کروی به دست آورید. برای اینکار متریک هموردا و پادوردا در دستگاه کروی را در نظر بگیرید.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

برای پیدا کردن دیورژانس از رابطه زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V^i_{;i} = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} ([\det(g)]^{1/2} V^k)$$

توجه می کنیم که $(\det g)^{1/2} = r^2 \sin \theta$. در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sum_k \frac{\partial}{\partial q^k} (r^2 \sin \theta V^k) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta V^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta V^\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2 \sin \theta V^\phi) \right] \end{aligned}$$

که همان نتیجه فصل سوم است، جز اینکه در فصل سوم ما بردارها را با اندیس پایین V_r نشان می دادیم.

- لاپلاسین و کرل را بیابید.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی را بنویسید.

۲ آیا گرادیان همورد است و یا پادوردا؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

تمرین: عملگرهای دیفرانسیلی را در دستگاه مختصات استوانه ای به دست آورید. برای اینکار متریک هموردا در دستگاه کروی را در نظر بگیرید و متریک پادوردا را بیابید.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \mathbf{e}^i$$

گرایان را با استفاده از رابطه مقابل بیابید.
دیورژانس را با استفاده از یکی از روابط زیر بیابید.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial (V^i \mathbf{e}_i)}{\partial q^j} = \mathbf{e}^j \cdot \left(\frac{\partial V^i}{\partial q^j} + V^k \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{e}_i = \frac{\partial V^i}{\partial q^i} + V^k \Gamma_{ik}^i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = V_{;i}^i = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left([\det(g)]^{1/2} V^k \right)$$

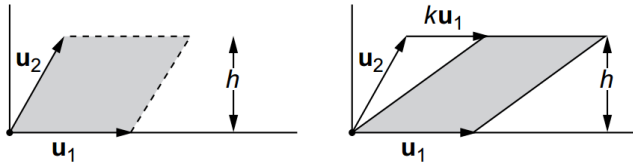
لاپلاسیان و کرل را با استفاده از روابط زیر بیابید.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{[\det(g)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q^k} \left([\det(g)]^{1/2} g^{ki} \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \right)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial q^j} - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k - \frac{\partial V_j}{\partial q^i} + V_k \Gamma_{ji}^k = V_{i;j} - V_{j;i}$$

مبحث بعدی: تبدیلات مختصات و ژاکوبی تبدیلات

- در جلسه بعد با ماتریس ژاکوبی آشنا خواهیم شد و درباره ویژگی های آن بحث خواهیم کرد.



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>
- ➐ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

