

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

مقدمه ای بر تانسورها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ مقدمه ای بر تانسورها
- تانسورهای هموردا و پادوردا
- تانسورهای مرتبه دو

اسکالر، بردار و تانسور

- اسکالر موجودی است که فقط با یک عدد نمایش داده می شود و در دستگاه های مختصات مختلف مقدار آن تغییر نمی کند. اسکالر را تانسور مرتبه صفر نیز می نامند.
- بردار موجودی است که اندازه و جهت مشخصی دارد و تحت قانون مشخصی تبدیل پیدا می کند. مولفه های بردار تحت تبدیل مختصات عوض می شوند، ولی اندازه و جهت آن در فضا ثابت باقی می ماند.
- توجه: در ادامه خواهیم دید که بردار یک تانسور مرتبه یک است. همچنین یک بردار در فضای d بُعدی را با d مولفه نشان می دهیم.
- یک تانسور مرتبه n در فضای d بُعدی موجودی است که دارای ویژگی های زیر باشد:
- مولفه هایی دارد که با n اندیس نمایش داده می شوند، یعنی $A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ ، و هر اندیس می تواند از ۱ تا d تغییر کند. بنابراین تانسور مورد نظر ما در حالت کلی d^n مولفه دارد.
- مولفه های تانسور تحت قانون مشخصی تبدیل پیدا می کنند.
- رفتار مشخص تانسور تحت تبدیل مختصات در فهم این موجود اهمیت اساسی دارد. از نظر فیزیکی این رفتار تضمین می کند که مشاهده پذیرهای فیزیکی مستقل از انتخاب دستگاه مختصات هستند.

یادآوری: تبدیل بردارها در دو دستگاه مختلف

فرض کنید که بردار مشخصی در دستگاه بدون پریم به صورت $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ و در دستگاه دوران یافته (دستگاه پریم دار) به صورت $\vec{A}' = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}'$ نوشته می‌شود. در این صورت مولفه های بردار در دستگاه پریم دار را می‌توان به راحتی، و با استفاده از ضرب داخلی در پایه های فضا، بر حسب مولفه های قدیم یافت. مثلاً مولفه A'_x را می‌توان با ضرب داخلی بردار $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ در بردار یک‌ه یافته:

$$A'_x = \hat{i}' \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) = A_x \hat{i}' \cdot \hat{i} + A_y \hat{i}' \cdot \hat{j} + A_z \hat{i}' \cdot \hat{k}$$

این ضرب های داخلی همان کسینوس زاویه های بین پایه های جدید

و قدیم اند که در شکل زیر آمده اند. همین کار را می‌توان برای A'_y

و A'_z هم انجام داد و در حالت کلی $\vec{A}' = R \vec{A}$ که در آن

$R_{i'j} = \cos \theta_{i'j}$ ماتریس تبدیل است.

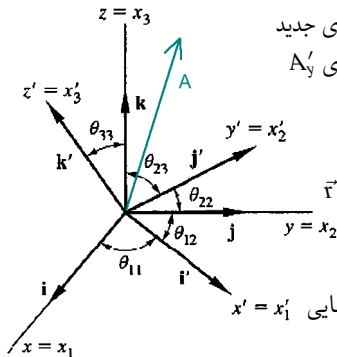
تمرین: به همین ترتیب با توجه به اینکه $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$

و $\vec{r}' = x' \hat{i}' + y' \hat{j}' + z' \hat{k}'$ نشان دهید که

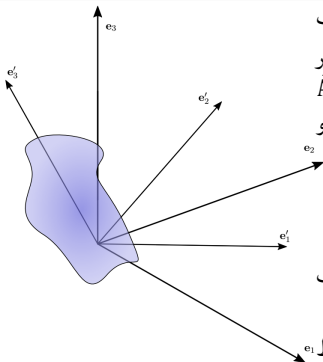
$$\hat{i}' \cdot \hat{i} = \partial x' / \partial x \quad \hat{i}' \cdot \hat{j} = \partial x' / \partial y \quad \dots$$

راهنمایی: $x'_i = R_{ij} x_j$ این نوع روابط برای چه نوع تبدیل هایی $x' = x'_1$

درست اند؟ اسلاید بعد را ببینید.



تبدیل بردارها در دو دستگاه مختلف



فرض کنید که بردار مشخصی در دستگاه بدون پریم به صورت $\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$ و در دستگاه دوران یافته در دستگاه پریم به صورت $\vec{A}' = A'_1\hat{e}'_1 + A'_2\hat{e}'_2 + A'_3\hat{e}'_3$ نوشته می شود. در این صورت قبلاً دیدیم که مولفه های این دو بردار توسط رابطه زیر به هم تبدیل می شوند:

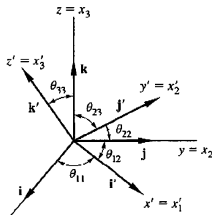
$$A'_i = \sum_j (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j) A_j,$$

توجه کنید که مقادیر $\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i$ در واقع تصویر بردار $\hat{e}'_i$ یکه در جهت بردار $\hat{e}_j$ هستند؛ و یا همان کسینوس زاویه بین دو بردار.

همچنین، به این دلیل که $\hat{e}'_i$ و $\hat{e}_j$ به صورت خطی به هم مربوط هستند، رابطه بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت:

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j$$

دو رابطه بالا را قانون تبدیل بردار تحت دوران می نامند.



تبدیل گرادیان در دو دستگاه مختلف

- همچنین، پیشتر دیدیم که مولفه های گرادیان یک اسکالر مانند ϕ در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $(\nabla\phi)_j = (\partial\phi/\partial x_j) \hat{e}_j$ نوشته می شود. در نتیجه این مولفه ها در دستگاه مختصات دوران یافته به شکل زیر هستند:

$$(\nabla\phi)'_i \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$

توجه کنید که قانون تبدیل گرادیان و بردار که در اسلاید قبل آمد متفاوت اند.

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \qquad (\nabla\phi)'_i \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$

- البته دو کمیت $\partial x_j / \partial x'_i$ و $\partial x'_i / \partial x_j$ در دستگاه مختصات دکارتی عملاکمیت های مشابهی هستند. بنابراین تا وقتی در دستگاه مختصات دکارتی کار می کنیم می توانیم هر دو موجود $\vec{A}$ و $\vec{\nabla}\phi$ را بردار بنامیم.

- ولی می توان به راحتی دید که مشتقات جزئی موجود در دو رابطه بالا برای مختصات غیردکارتی برابر نیستند. در نتیجه در دستگاه های مختصات غیر دکارتی، این دو موجود از دو قانون تبدیل متفاوت پیروی می کنند. پس باید بین این دو "موجود" تمایز قائل شویم.

بردارهای هموردا و پادوردا

- بردارهایی که از قانون تبدیل زیر پیروی می کنند را بردارهای پادوردا (contravariant vectors) می نامند:

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j$$

- همچنین، بردارهایی که از قانون تبدیل زیر پیروی می کنند را بردارهای هموردا (covariant vectors) می نامند:

$$(\nabla\varphi)'_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

- برای تمایز بین این دو نوع قانون تبدیل، و بنابراین این دو نوع بردار، بردارهای پادوردا را با اندیس بالا A^i و بردارهای هموردا را با اندیس پایین A_i نشان می دهند.
- مثلاً بردار موقعیت یک بردار پادوردا است و باید به صورت (x^1, x^2, x^3) نوشته شود.

- جمع بندی

$$(A')^i = \sum_j \frac{\partial (x')^i}{\partial x^j} A^j \quad \mathbf{A}, \text{ a contravariant vector, بردار پادوردا}$$

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial (x')^i} A_j \quad \mathbf{A}, \text{ a covariant vector. بردار هموردا}$$

چند نکته مهم

• جمع‌بندی:

$$(A')^i = \sum_j \frac{\partial (x')^i}{\partial x^j} A^j \quad \mathbf{A}, \text{ a contravariant vector, بردار پادوردا}$$

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial (x')^i} A_j \quad \mathbf{A}, \text{ a covariant vector. بردار هم‌وردا}$$

• اندیس‌ها به صورت ساختارمند وارد معادلات بالا شده‌اند. برای درک این موضوع به چند نکته زیر توجه کنید:

۱) $\mathbf{A}$ در $\mathbf{A}^i$ یک اندیس است و توان نیست!

۲) اندیس آزاد i در دو طرف معادلات فقط یکبار ظاهر شده است. همچنین، اندیس در دو طرف در بالا و یا پایین قرار گرفته است (قرارداد: اندیس بالا در مخرج را اندیس پایین قرارداد می‌کنیم و اندیس پایین در مخرج را بالا!). این نکته را حتما در نوشتن معادلات تانسوری خود رعایت کنید.

۳) اندیس‌های تکراری (جمع‌بندی، ظاهری و یا میرا dummy indices هم گفته می‌شود) در یک طرف معادله دو بار ظاهر شده است، یکبار بالا و یکبار پایین. باز هم اندیس بالا در مخرج را اندیس پایین قرارداد می‌کنیم و اندیس پایین در مخرج را بالا فرض می‌کنیم تا این قرارداد جمع‌بندی حفظ شود.

چند نکته مهم

جمع‌بندی:

$$(A')^i = \sum_j \frac{\partial (x')^i}{\partial x^j} A^j \quad \mathbf{A}, \text{ a contravariant vector, بردار پادوردا}$$

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial (x')^i} A_j \quad \mathbf{A}, \text{ a covariant vector. بردار هم‌وردا}$$

اندیس‌ها به صورت ساختارمند وارد معادلات بالا شده‌اند. برای درک این موضوع به چند نکته زیر توجه کنید:

قرارداد اینشتین: یک قرارداد مشخص در متون فیزیکی وجود دارد که اندیس‌های تکراری بالا و پایین جمع بسته می‌شوند. در نتیجه در بسیاری از کتاب‌های مرجع (به ویژه نسبیت عام و ذرات بنیادی) از علامت جمع‌بندی صرف‌نظر می‌شود. ما کم‌کم وارد این نمادگذاری خواهیم شد.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\nu g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} \partial_\alpha g_{\rho\lambda} \partial_\mu g_{\beta\nu} \\ & - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} \partial_\alpha g_{\rho\lambda} \partial_\nu g_{\mu\beta} + \frac{1}{4} g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} \partial_\nu g_{\alpha\lambda} \partial_\mu g_{\rho\beta} + \frac{1}{4|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta |g| \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \frac{1}{4|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta |g| \partial_\alpha g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta |g| \partial_\mu g_{\alpha\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

تانسورهای مرتبه دو

- حالا ما قانون تبدیل تانسورهای مرتبه دوم (یا همان دو اندیسی) پادوردا، مخلوط و هم‌وردا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A')^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} A^{kl}, \quad \text{قانون تبدیل تانسور پادوردای مرتبه دو}$$

$$(B')^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} B_l^k, \quad \text{قانون تبدیل تانسور مخلوط مرتبه دو}$$

$$(C')_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} C_{kl}. \quad \text{قانون تبدیل تانسور هم‌وردای مرتبه دو}$$

- ۵ توجه کنید که مرتبه تانسور (همان تعداد اندیس) با تعداد مشتقات جزئی در قانون تبدیل برابر است.

- ۶ دامنه تغییر اندیس ها با ابعاد فضا (space dimensions) برابر است:

$$i = 1, 2, \dots, d \quad j = 1, 2, \dots, d \quad \dots$$

- ۷ مرتبه تانسور مستقل از ابعاد فضا است.

تانسورهای مرتبه دو

- حالا ما قانون تبدیل تانسورهای مرتبه دوم (یا همان دو اندیسی) پادوردا، مخلوط و هم‌وردا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A')^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} A^{kl}, \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور پادوردای مرتبه دو} \end{array}$$

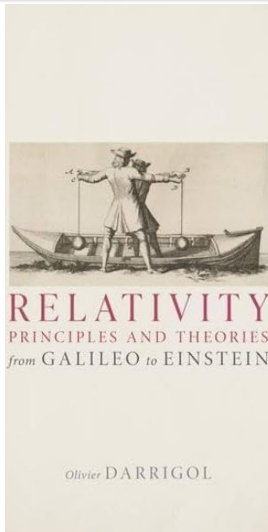
$$(B')^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} B^k_l, \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور مخلوط مرتبه دو} \end{array}$$

$$(C')_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} C_{kl}. \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور هم‌وردای مرتبه دو} \end{array}$$

- توجه کنید که اندیس‌های پادوردا در هر دو طرف پادوردا هستند و اندیس‌های هم‌وردا هم در هر دو طرف هم‌وردا باقی مانده‌اند.

- اگر از مختصات دکارتی استفاده کنیم، آنگاه هر سه تانسور بالا عملاً یکسان هستند. به همین دلیل است که در برخی کتب (به ویژه مهندسی) وردایی تانسور چندان اهمیتی ندارد و همه اندیس‌ها پایین و یا بالا نوشته می‌شوند.

چرا تانسور: اصول نسبیت گالیله، نیوتن و اینشتین



● گالیله اولین بار اهمیت بررسی ناوردایی قوانین فیزیکی را توضیح داد: با مشاهده حرکت اجسام در یک اتاق بسته، هیچ راهی برای تشخیص اینکه آیا اتاق ساکن است و یا با سرعت یکنواخت در حال حرکت است وجود ندارد. این را گاهی اصل نسبیت گالیله ای می‌گویند.

● اصل نسبیت نیوتنی ویرایش تکنیکی تر اصل نسبیت گالیله است: دستگاهی ساکن و یک دستگاه دیگر که با سرعت ثابت نسبت به دستگاه اول در حرکت است، را در نظر بگیرید. قوانین مکانیک در این دو دستگاه یکسان هستند. و یا حرکت اجسام واقع در یک فضای معین نسبت به یکدیگر، خواه این فضا ثابت باشد و یا با سرعت یکنواخت در امتداد خط راستی حرکت کند، یکی است.

● اینشتین اصل نسبیت را به تمام قوانین فیزیک (از جمله الکترودینامیک) توسعه داد: قوانین فیزیک در تمام دستگاه‌های لخت یکسان هستند. هیچ دستگاه لخت مرجعی وجود ندارد.

● برای مرور سیر تحول تاریخی اصل نسبیت کتاب مقابل را ببینید.

● تانسورها بهترین ابزار برای بررسی ناوردایی قوانین فیزیک اند چون این موجودات در درون تعریف خود قوانین تبدیل را دارند.

شکل ماتریسی یک تانسور مرتبه دوم

- یک تانسور مرتبه دوم A با مولفه های A^{ij} را می توان به صورت زیر به شکل آرایه 3×3 از اعداد نوشت:

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}$$

- دقت کنید که هر آرایه 3×3 از اعداد لزوماً یک تانسور نیست؛ بلکه باید قوانین تبدیل نیز برای آرایه ها برقرار باشند. البته هر آرایه 3×3 از اعداد یک ماتریس هست.
- با در نظر داشتن این نکته در ذهن، حالا می توان معادلات تانسور را در نمایش ماتریسی آنها هم نوشت. مثلاً قانون تبدیل تانسورهای پادوردا به شکل ماتریسی زیر نوشته می شود:

$$(A')^{ij} = \sum_{kl} S_{ik} A^{kl} (S^T)_{lj}, \quad \text{or} \quad A' = SAS^T$$

- این رابطه را تبدیل تشابهی نیز می نامند که در مبحث فضاهاى بردارى بحث شده است.
- جمع‌بندی: تانسورها آرایه ای از اعداد هستند که در کنار هم قرار گرفته و تحت قانون خاصی تبدیل می شوند. تعداد اندیس های یک تانسور مرتبه تانسور می نامند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تانسورها در فیزیک و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ تعریف کلی تانسورها را بنویسید.
- ۲ قوانین تبدیل بردارهای پادوردا و هم‌وردا در فیزیک را بنویسید.
- ۳ چرا مشتقات جزئی در قوانین تبدیل وارد می شوند؟
- ۴ قراردادهای مربوط به اندیس آزاد در تانسورها را بیان کنید.
- ۵ قراردادهای مربوط به اندیس جمع‌بندی در تانسورها را بیان کنید.
- ۶ منظور از نمادگذاری (یا قرارداد) اینشتین چیست؟
- ۷ قوانین تبدیل تانسورهای مرتبه دو (پادوردا، مخلوط و هم‌وردا) را بنویسید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

• قوانین تبدیل همه تانسورهای مرتبه سوم را بنویسید.

• در رابطه زیر و بنا به نمادگذاری اینشتین برای جمله اول داریم:

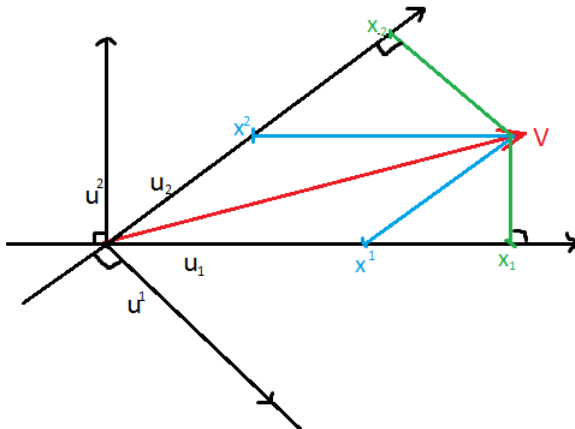
$$\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} \equiv \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu}$$

شما بقیه جملات در فرمول زیر را از نمادگذاری اینشتین خارج کرده و با استفاده از سری‌ها بنویسید.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\mu g_{\beta\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\nu g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} \partial_\alpha g_{\rho\lambda} \partial_\mu g_{\beta\nu} \\ & - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} \partial_\alpha g_{\rho\lambda} \partial_\nu g_{\mu\beta} + \frac{1}{4} g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} \partial_\nu g_{\alpha\lambda} \partial_\mu g_{\rho\beta} + \frac{1}{4|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta |g| \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \frac{1}{4|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta |g| \partial_\alpha g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta |g| \partial_\mu g_{\alpha\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

مبحث بعدی: مقدمه ای بر جبر تانسورها

• در جلسه بعد جبر تانسورها را به صورت مقدماتی بررسی خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

