

فیزیک مکانیک

جلسه ششم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ جلسه ششم رفع اشکال و حل تمرین

تمرین

- ۱ دو بردار $\vec{a} = -1\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ و $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 1\hat{k}$ را در نظر بگیرید. الف) حاصلضرب داخلی $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بیابید. ب) کسینوس زاویه بین این دو بردار چقدر است؟
- ۲ پاسخ الف:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + \hat{j} - 1\hat{k}) = -1 \times 3 + 2 \times 1 - 3 \times (-1) = -3 + 2 + 3 = 2$$

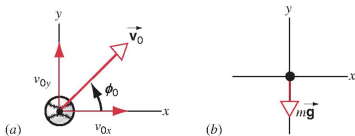
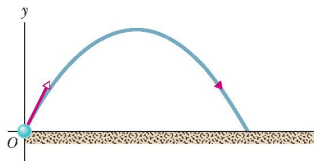
پاسخ ب: از طرفی حاصلضرب داخلی برابر است با

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{2}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} \times \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{11}} = 0.1612$$

$$\theta = \arccos 0.1612 \simeq 80^\circ$$

حل حرکت پرتابی در راستای افق



حرکت را در دو جهت عمودی و افقی تجزیه کرده و در ابتدا حرکت در راستای افق را حل می‌کنیم.

همانطور که در شکل پایین مشخص شده است، در راستای افق شتاب برابر صفر است. بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

از بحث‌های مربوط به فصل دوم می‌دانیم که سرعت در چنین حرکتی تغییر نمی‌کند:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \phi_0$$

در اینجا $v_{0x} = v_0 \cos \phi_0$ سرعت اولیه در راستای افق است.

همچنین، در یک حرکت یکنواخت، مکان به صورت خطی با زمان تغییر می‌کند (فصل دوم):

$$x(t) = v_{0x} t + x_0 = v_0 t \cos \phi_0 + x_0$$

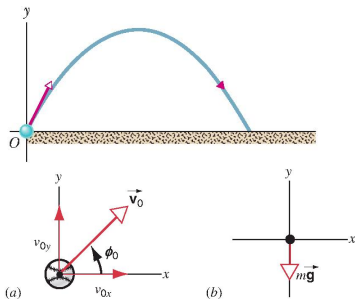
در اینجا x_0 مکان اولیه در راستای افق است.

شکل‌ها از مبانی هالیدی، ویرایش دهم، و فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

$$v_x(t) = v_0 \cos \phi_0$$

$$x(t) = v_0 t \cos \phi_0 + x_0$$

حل حرکت پرتابی در راستای عمود



در راستای عمود شتاب برابر $-g$ می باشد. بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

علامت منفی شتاب به این دلیل است که ما جهت محور عمود را به سمت بالا فرض کرده ایم.

از بحث های مربوط به فصل دوم می دانیم که سرعت در این نوع حرکت (حرکت با شتاب ثابت) به صورت خطی با زمان تغییر می کند:

$$v_y(t) = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \phi_0$$

در اینجا $v_{0y} = v_0 \sin \phi_0$ سرعت اولیه در راستای عمود است.

همچنین، در یک حرکت با شتاب ثابت، مکان به صورت توان دوم با زمان تغییر می کند (فصل دوم):

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \phi_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \phi_0 + y_0$$

در اینجا y_0 مکان اولیه در راستای افق است.

دقت کنید که علامت جملات در این معادلات به انتخاب دستگاه مختصات توسط ما بستگی دارد؛ ولی شکل کلی معادلات تغییر نمی کند.

شکل ها از مبانی هالیدی، ویرایش دهم، و فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

مثال ۱ از حرکت پرتابی

بنابراین دو معادله و دو مجهول داریم:

$$gt = v_0 \tan 35^\circ \Rightarrow t = \frac{v_0 \tan 35^\circ}{g}$$

$$100 = v_0 t \Rightarrow 100 = v_0 \frac{v_0 \tan 35^\circ}{g}$$

و یا

$$v_0^2 = 100g / \tan 35^\circ \Rightarrow v_0 = 37.4 \text{ m/s}$$

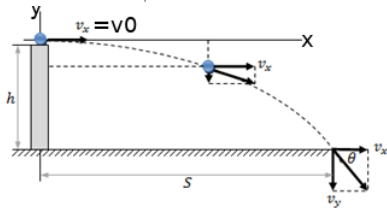
همچنین

$$t = \frac{v_0 \tan 35^\circ}{g} = \frac{37.4 \times \tan 35^\circ}{9.8} = 2.67 \text{ s}$$

ارتفاع ساختمان:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_0 t \sin \phi_0} + \cancel{y_0}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 9.8 (2.67)^2 = -35 \text{ m}$$



جسمی از بالای یک ساختمان با سرعت اولیه افقی برابر v_x پرتاب شده است. جسم در فاصله $S = 100 \text{ m}$ از ساختمان و با زاویه $\theta = 35^\circ$ به زمین برخورد می کند. ارتفاع ساختمان و سرعت افقی اولیه را بیابید. از مقاومت هوا صرف نظر کنید.

پاسخ: جهت محور عمود را به سمت بالا و جهت محور افقی را به سمت راست فرض می کنیم. حال علامت همه کمیت ها را با استفاده از جهت قراردادی محورها تعیین می کنیم. چهار رابطه اصلی حرکت پرتابی به صورت زیر هستند:

$$v_x(t) = v_0 \cos \phi_0$$

$$x(t) = v_0 t \cos \phi_0 + x_0$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \phi_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \phi_0 + y_0$$

در اینجا $\phi_0 = 0^\circ$ زاویه اولیه پرتاب است. با توجه به اینکه جسم با زاویه $\theta = 35^\circ$ به زمین برخورد کرده است داریم:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{|-gt + v_0 \sin \phi_0|}{v_0 \cos \phi_0} = \frac{|-gt|}{v_0}$$

از طرفی، برای حرکت در راستای افقی داریم:

$$x(t) - x_0 = v_0 t \cos \phi_0 \Rightarrow S = v_0 t$$

$$\Rightarrow 100 = v_0 t$$

شکل از <http://www.ambrsoft.com/>

مثال ۲ از حرکت پرتابی

حال دو معادله و دو مجهول داریم. از معادله اول زمان را یافته و در معادله دوم قرار می دهیم.

$$45^\circ = -49 \left(\frac{12.5}{\cos \theta} \right)^2 + 200 \times \frac{12.5}{\cos \theta} \sin \theta$$

$$45^\circ = -49 \times 12.5^2 (1 + \tan^2 \theta) + 200 \times 12.5 \tan \theta$$

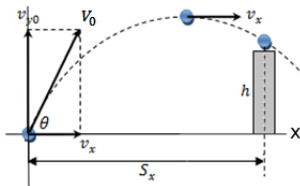
این یک معادله درجه دوم برحسب $\tan \theta$ است. با حل این معادله (به روش دلتا) داریم:

$$\tan \theta = 0.59448 \quad \text{and} \quad 2.67082$$

و یا

$$\theta_1 = 30.9^\circ \quad \text{and} \quad \theta_2 = 69.5^\circ$$

چرا دو جواب؟! متن درس را ببینید.



<http://www.ambrsoft.com/>

گلوله ای با زاویه θ نسبت به راستای افق و با سرعت اولیه 200 m/s پرتاب می شود. گلوله باید به هدفی در ارتفاع 45° m بالای سطح زمین و در فاصله 2500 m برخورد کند. زاویه θ را محاسبه کنید.

پاسخ: جهت محور عمود را به سمت بالا و جهت محور افقی را به سمت راست فرض می کنیم. حال علامت همه کمیت ها را با استفاده از جهت قراردادی محورها تعیین می کنیم. چهار رابطه اصلی حرکت پرتابی به صورت زیر هستند:

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta$$

$$x(t) = v_0 t \cos \theta + x_0$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + y_0$$

بنا به معادله دوم داریم:

$$S_x = x(t) - x_0 = v_0 t \cos \theta \Rightarrow 2500 = 200 t \cos \theta$$

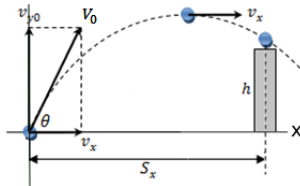
$$t \cos \theta = 12.5 \quad t = \frac{12.5}{\cos \theta}$$

از معادله آخر نیز می توان نوشت:

$$h = y(t) - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta$$

$$45 = -49t^2 + 200 t \sin \theta$$

مثال ۲ از حرکت پرتابی

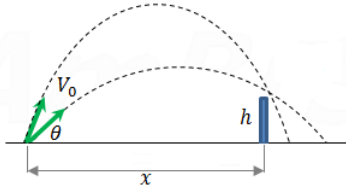


گلوله ای با زاویه θ نسبت به راستای افق و با سرعت اولیه 200 m/s پرتاب می شود. گلوله باید به هدفی در ارتفاع 45 m بالای سطح زمین و در فاصله 250 m برخورد کند. زاویه θ را محاسبه کنید.

روش دوم) همین مساله را می توان مستقیماً با استفاده از معادله سهمی مسیر حل کرد:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \tan \theta$$

به این روش نیز مساله را حل کنید.



<http://www.ambrsoft.com/>

مثال ۳ از حرکت پرتابی

با توجه به اینکه در نقطه برخورد داریم $y_b = 4 \text{ km}$ می توان نوشت:

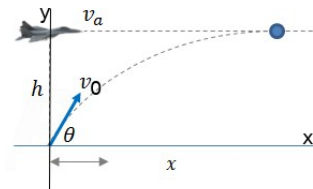
$$4000 = -4.9t^2 + 500t \sin 57.2^\circ$$

با حل این معادله درجه دوم (به روش دلتا) داریم:

$$t_1 = 10.9332 \text{ s} \quad \text{and} \quad t_2 = 74.6648 \text{ s}$$

کدام جواب قابل قبول است و چرا؟

پاسخ: جواب t_1 زمان برخورد پرتابه با جنگنده را به دست می دهد. جواب t_2 زمان برگشت پرتابه به ارتفاع ۴ کیلومتر می باشد و مورد نظر ما نیست.



<http://www.ambrsoft.com/>

یک سامانه ضد هوایی به یک جنگنده که به صورت افقی و با سرعت 980 km/h از بالا سر پدافند عبور می کند، شلیک می کند. سرعت پرتابه 500 m/s و ارتفاع پرواز جنگنده برابر 4 km می باشد. زاویه پرتاب و زمان برخورد پرتابه با هدف را بیابید.

پاسخ: جهت محور عمود را به سمت بالا و جهت محور افقی را به سمت راست فرض می کنیم. حال علامت همه کمیت ها را با استفاده از جهت قراردادی محورها تعیین می کنیم. چهار رابطه اصلی حرکت پرتابی به صورت زیر هستند:

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta$$

$$x_b(t) = v_0 t \cos \theta + x_0$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$y_b(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + y_0$$

همچنین برای حرکت جنگنده (حرکت با سرعت ثابت در راستای خط راست) داریم:

$$x_a = v_a t$$

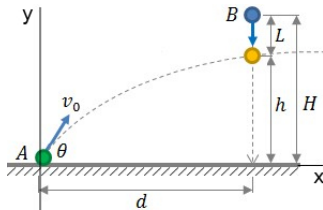
در نقطه برخورد داریم:

$$x_a = x_b \Rightarrow v_a t = v_0 t \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{v_a}{v_0} = \frac{980 \text{ km/h}}{500 \text{ m/s}} = \frac{\frac{980 \text{ m/s}}{3.6}}{500 \text{ m/s}} = 0.544$$

$$\theta = \arccos 0.544 = 57.2^\circ \quad \text{یا}$$

مثال ۴ از حرکت پرتابی



<http://www.ambrsoft.com/>

مساله شلیک به میمون اسباب بازی: دو جسم A و B را در نظر بگیرید که به فاصله d از هم قرار دارند. جسم A با زاویه θ و سرعت اولیه v_0 شلیک شده و همزمان جسم B رها می شود. دو جسم در ارتفاع h با هم برخورد می کنند. زاویه θ و سرعت اولیه v_0 پرتابه را بیابید.

راهنمایی: معادلات حرکت را برای هر دو متحرک به صورت مجزا نوشته و شرط برابر بودن ارتفاع آن دو (در لحظه برخورد) را اعمال کنید.

مثال ۴ از حرکت پرتابی

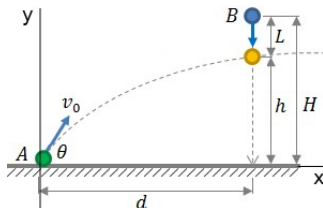
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{2h - 2H + 2h}{2d} = \frac{H}{d}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{H}{d}\right)$$

$$v_0 = \frac{d}{\cos \theta} \sqrt{\frac{g}{2L}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + H^2}}$$

$$v_0 = \sqrt{g \frac{H^2 + d^2}{2(h - H)}}$$



<http://www.ambrsoft.com/>

مساله شلیک به میمون اسباب بازی: دو جسم A و B را در نظر بگیرید که به فاصله d از هم قرار دارند. جسم A با زاویه θ و سرعت اولیه v_0 شلیک شده و همزمان جسم B رها می شود. دو جسم در ارتفاع h با هم برخورد می کنند. زاویه θ و سرعت اولیه v_0 پرتابه را بیابید.

$$t_A = t_B = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{\frac{2(h - H)}{g}}$$

$$d = v_0 t_B \cos \theta$$

$$h = v_0 \sin \theta t_B + g t_B^2 / 2$$

$$v_0 = \frac{d}{t_B \cos \theta} \quad v_0 = \frac{2h - g t_B^2}{2 t_B \sin \theta}$$

$$\frac{d}{t_B \cos \theta} = \frac{2h - g t_B^2}{2 t_B \sin \theta}$$

$$\frac{d}{\cos \theta} = \frac{2h - g \left(\frac{2L}{g}\right)}{2 \sin \theta}$$

با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.