

مقدمه ای بر دترمینان و ماتریس

دستگاه معادلات خطی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

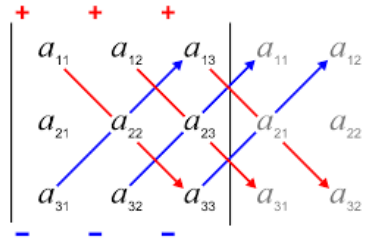
دستگاه معادلات خطی

- حل دستگاه معادلات خطی همگن
- حل دستگاه معادلات خطی غیرهمگن

دترمینان و ماتریس



- در این بخش می خواهیم مفاهیم ماتریس و دترمینان را معرفی کنیم و به محاسبات مربوطه مسلط شویم. این بخش را می توان مقدمه ای بر جبر خطی نیز نامید.
- مفهوم دترمینان را اولین بار گاتفرید لایبنیتس معرفی کرده است.



دستگاه معادلات خطی - برخی اصطلاحات

- یکی از مهمترین کاربردهای مفهوم دترمینان پیدا کردن شرایط وجود جواب غیر بدیهی برای دستگاه های معادلات خطی همگن است. لازم است که منظور از این کلمات را به صورت واضح تر بیان کنیم.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- منظور از ”دستگاه معادله”، تعدادی معادله است که در کنار هم قرار می گیرند.
- منظور از ”خطی” این است که توان متغیرها حداکثر یک است و متغیرها در هم ضرب نمی شوند. یک تبدیل کلی خطی: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- منظور از همگن این است که سمت راست معادله (ثوابت) برابر صفر هستند. اگر ثوابتی که در مجهولات ضرب نشده اند غیر صفر باشند، آنگاه معادله را غیرهمگن می نامند.

$$\begin{aligned} -5x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \\ -x_1 - 5x_2 - 17x_3 + 13x_4 &= -19 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- منظور از حل دستگاه معادله این است که تمام مقادیر $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ که به صورت همزمان در معادله صدق می کنند، را بیابیم.

حل دستگاه های معادلات خطی

- یکی از مهمترین کاربردهای مفهوم دترمینان پیدا کردن شرایط وجود جواب غیر بدیهی برای دستگاه های معادلات خطی همگن است. فرض کنید سه پارامتر نامعلوم x_1 ، x_2 و x_3 داریم که توسط سه معادله خطی زیر به هم مربوط اند:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0.$$

توجه ۱: منظور از جواب بدیهی جوابی به شکل $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$ می باشد که البته درست است، ولی مد نظر ما نیست (چون بدیهی است!).

توجه ۲: این دستگاه را می توان به راحتی به n معادله و n مجهول تعمیم داد؛ ولی محض سادگی ما فعلا دستگاه بالا را در نظر می گیریم.

- سوال اصلی ما این است: تحت چه شرایطی دستگاه بالا یک جواب غیر بدیهی دارد؟**

- برای یافتن شرط وجود جواب های غیربدیهی بهتر است به معنی هندسی دستگاه معادلات بالا فکر کنیم. اسلاید بعد را ببینید.

تعبیر هندسی دستگاه سه معادله و سه مجهول همگن

- بردار مجهولات $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ را در نظر بگیرید. همچنین بردار ضرایب $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

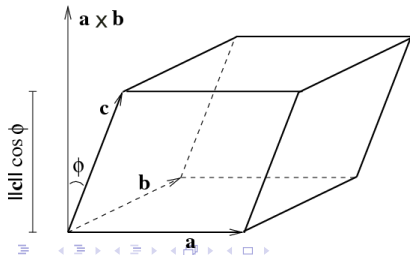
را در نظر بگیرید. آنگاه دستگاه سه معادله و سه مجهول اسلاید قبل را می توان به صورت سه معادله زیر نوشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{x} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{x} = 0$$

در نتیجه بردار $\vec{x}$ برداری است که بر هر سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است.

- پیشتر نشان داده ایم که کمیت

$$D_3 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



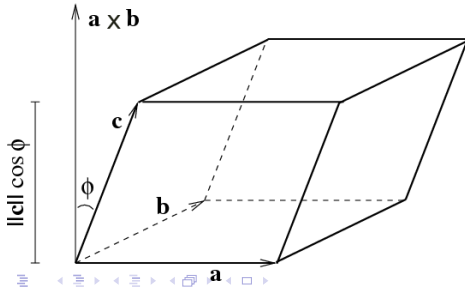
نشان دهنده حجم ساخته شده توسط سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$ و $\vec{c}$ می باشد. شکل مقابل را ببینید:

- اگر حجم مورد نظر صفر نباشد، آنگاه نمی توان هیچ بردار غیربدیهی را یافت که در دستگاه معادله صدق کند. پس در این شرایط دستگاه جواب غیر بدیهی ندارد. چرا؟!

تعبیر هندسی دستگاه سه معادله و سه مجهول همگن

• اگر حجم مورد نظر صفر نباشد، آنگاه نمی توان هیچ بردار غیربدیهی را یافت که در دستگاه معادله صدق کند. پس در این شرایط دستگاه جواب غیر بدیهی ندارد. چرا؟! •

پاسخ از طریق برهان خلف: فرض کنید که بردار $\vec{0} \neq \vec{x}$ وجود دارد به طوری که بر هر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است. همچنین، فرض کنید که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در صفحه xy قرار گرفته اند. در نتیجه بردار $\vec{x}$ باید در راستای محور z باشد. ولی اگر بردار $\vec{c}$ نیز بر بردار $\vec{x}$ عمود باشد، آنگاه بردار $\vec{c}$ نیز باید در صفحه xy قرار داشته باشد. در نتیجه حجم تولید شده توسط بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ صفر خواهد بود که این با فرض اولیه در تضاد است. در نتیجه بردار $\vec{0} \neq \vec{x}$ (با شرط تعامد بر بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$) وجود ندارد. پس دستگاه جواب غیر بدیهی ندارد.



عکس قضیه

عکس قضیه: اگر حجم تولید شده توسط سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر صفر شود، آنگاه هر سه بردار در یک صفحه قرار خواهند داشت. بنابراین می توان یکی از این دو بردار را برحسب ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت. مثلاً اگر فرض کنیم که بردار $\vec{c}$ مستقل نیست و یک ترکیب خطی از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می باشد، آنگاه بردار $\vec{x}$ بر صفحه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است چون $\vec{x} = \alpha \vec{a} \times \vec{b}$. در اینجا α یک پارامتر ثابت است:

$$x_1 = \alpha(a_2b_3 - a_3b_2) \quad x_2 = -\alpha(a_1b_3 - a_3b_1) \quad x_3 = \alpha(a_1b_2 - a_2b_1)$$

البته چون دستگاه معادلات همگن را می توان در هر عددی ضرب کرد، تعیین پارامتر α به صورت یکتا ممکن نیست و فقط نسبت مولفه های بردار $\vec{x}$ معنی دارد:

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

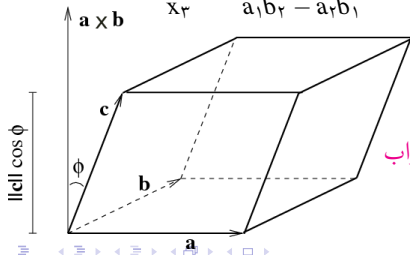
$$\frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

به شرطی که $x_3 \propto a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0$. این

جواب را قانون کرامر (Kramer's rule)

برای حل دستگاه معادلات همگن خطی می گویند.

آزاد بودن پارامتر α بدین معنی است که بینهایت جواب داریم. این موضوع را در جلسات بعد بیشتر توضیح خواهیم داد.

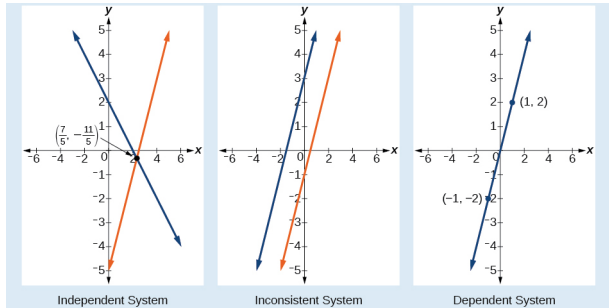


حل دستگاه ناهمگن با دو مجهول

- حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول عملاً معادل با پیدا کردن نقطه تقاطع دو خط است.

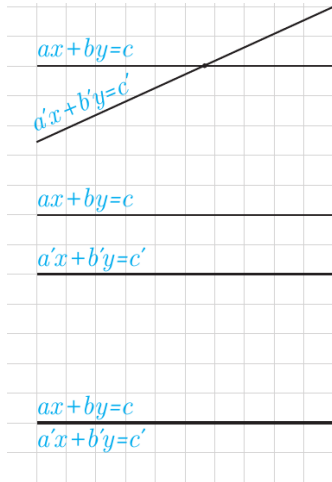
$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3, \quad b_1x_1 + b_2x_2 = b_3,$$

سه حالت وجود دارد: اگر دو خط با هم موازی باشند (بدون تقاطع) معادله هیچ جوابی ندارد.
اگر دو خط با هم یک نقطه تقاطع داشته باشند معادله یک جواب جواب دارد. اگر دو خط بر هم منطبق باشند، معادله بینهایت جواب دارد.



- پرسش: می توانید این سه حالت را بر حسب نسبت ضرایب این دو معادله بیان کنید؟

حل دستگاه ناهمگن با دو مجهول



پرسش: می توانید این سه حالت را بر حسب نسبت ضرایب این دو معادله بیان کنید؟

۱- اگر دو خط شیبی نابرابر داشته باشند، و یا به صورت معادل

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

آنگاه دو خط فقط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند.

۲- اگر دو خط شیبی برابر داشته باشند، ولی عرض از مبدا آنها نابرابر باشد

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

آنگاه دو خط هیچ نقطه تقاطعی ندارند (دو خط موازی اند).

۳- اگر دو خط شیبی برابر داشته باشند، و عرض از مبدا آنها نیز برابر باشد

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

آنگاه دو خط در بینهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند (دو خط بر هم منطبق اند).

استفاده از دستگاه همگن برای حل دستگاه ناهمگن

روش بسیار جالبی برای استفاده از دستگاه معادلات خطی همگن n متغیره برای حل دستگاه معادلات خطی ناهمگن با $n - 1$ متغیر وجود دارد که در اینجا آن را مرور می کنیم. در واقع اگر در دستگاه معادلات خطی همگن ۳ متغیره بالا قرار دهیم $(x_1, x_2, -1) = \vec{x}$ ، آنگاه می توان دستگاه دو معادله و دو مجهول خطی زیر را به دست آورد:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3, \quad b_1x_1 + b_2x_2 = b_3,$$

مانند مورد قبل، بردار $\vec{x}$ باید بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود باشد. بنابراین بردار $\vec{x}$ باید در جهت بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ باشد. البته با توجه به اینکه سومین مولفه بردار $\vec{x}$ برابر -1 می باشد، مقدار $a_1b_2 - a_2b_1$ باید غیرصفر باشد. در نتیجه جواب های دستگاه بالا به صورت زیر خواهند بود:

$$x_1 = \frac{a_3b_2 - b_3a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

قاعده کرامر

- بنابراین جواب دستگاه معادلات خطی غیرهمگن زیر

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3, \quad b_1x_1 + b_2x_2 = b_3,$$

$$x_1 = \frac{a_3b_2 - b_3a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{به صورت مقابل است:}$$

$$x_2 = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- توجه: درترمینان در صورت کسر x_1 به این صورت به دست آمده است که ستون اول در درترمینان ضرایب $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ با بردار $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$ جایگزین شده است. به همین صورت درترمینان در صورت کسر x_2 به این صورت به دست آمده است که ستون دوم در درترمینان ضرایب $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ با بردار $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$ جایگزین شده است. این را قاعده کرامر می نامند که در آینده تعمیم داده خواهد شد.

دترمینان و ماتریس: بنیاد حل دستگاه معادلات خطی

- حال برای درک درست حل دستگاه معادلات خطی (در کلی ترین حالت) لازم است که دترمینان و ویژگی های آن را به درستی بفهمیم. این کار را در جلسه بعد شروع خواهیم کرد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید حل دستگاه معادلات خطی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ دستگاه معادلات خطی در کجا به کار می آیند؟
- ۲ روش کلی حل دستگاه معادلات خطی سه متغیره همگن را توضیح دهید.
- ۳ شرط اساسی وجود جواب در دستگاه معادلات خطی سه متغیره همگن چیست؟ تفسیر هندسی این شرط چیست؟
- ۴ تفسیر هندسی دستگاه معادلات خطی سه متغیره همگن چیست؟
- ۵ روش کلی حل دستگاه معادلات خطی دو متغیره غیرهمگن را توضیح دهید.
- ۶ تفسیر هندسی دستگاه معادلات خطی دو متغیره غیرهمگن چیست؟
- ۷ قاعده کرام را توضیح دهید. درباره تعمیم این قاعده تحقیق کنید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

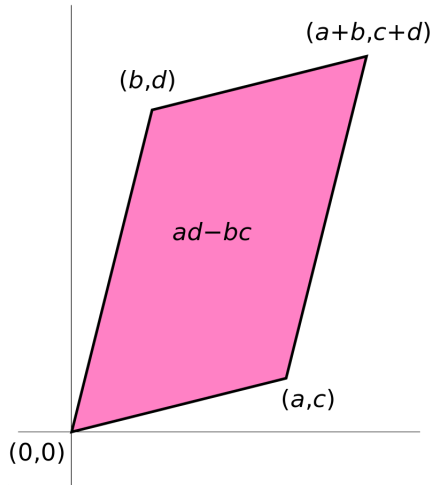


تمرین

- تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: دترمینان و ویژگی های آن

- در جلسه بعد درباره دترمینان و ویژگی های آن بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>

با سپاس از توجه شما