

مبانی گرانش نیوتنی

مردی که دنیا را وزن کرد

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

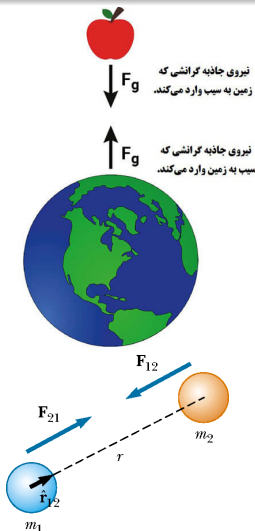


دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱. مردی که دنیا را وزن کرد
- ترازوی پیچشی کاوندیش
- جرم کره زمین و دیگر اجرام آسمانی

آنچه گذشت!



نیروی گرانش همیشه جاذبه است. از طرفی نیروی الکتریکی می تواند جاذبه و یا دافعه باشد.

نیروی گرانش وارد شده از جسم اول به جسم دوم دقیقا برابر، ولی در جهت مخالف، نیروی گرانش وارد شده از جسم دوم به جسم اول است.

چون دو نیرو با هم برابر هستند، اگر یکی از دو جسم بسیار بزرگتر از جسم دیگر باشد، جسم بزرگ عملا ثابت باقی می ماند و جسم کوچک به سمت آن حرکت می کند.

مثلا سیب و زمین به همدیگر نیرویی برابر وارد می کنند. ولی از آنجا که سیب بسیار سبک تر از زمین است، سیب حرکت می کند ولی زمین تقریبا ثابت باقی می ماند.

شکل دقیق ریاضیاتی قانون گرانش نیوتن را در زیر می بینید (حرف G نشان دهنده ثابت نیوتن است.)

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

قانون گرانش نیوتن و سه قانون حرکت نیوتن تا حد خوبی همه پدیده های گرانشی در منظومه شمسی، و فراتر از آن، را توصیف می کنند.

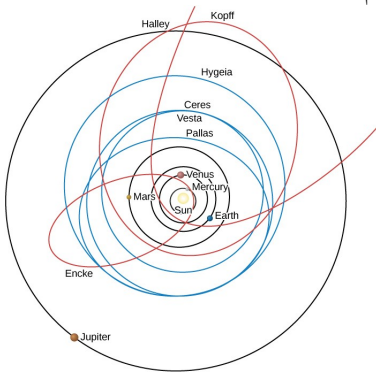
گرانش یک نظریه هندسی است.

- گرانش یک نظریه هندسی است، به این معنی که مسیر حرکت یک جسم به دور جسم مرکزی مستقل از جرم جسم اول است، زیرا جرم m از دو طرف معادله حرکت ساده می شود:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad G \frac{M}{r^2} \hat{r} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

بنابراین در معادلات نجومی همیشه ضریب GM ظاهر می شود و در نتیجه نمی توان صرفاً با استفاده از این معادلات جرم خورشید، زمین و دیگر اجرام آسمانی را یافت.

- تا مدتها تعیین ثابت G یکی از اصلی ترین چالش ها برای فهم نیروی گرانش بود. این مشکل همچنان تا حدی وجود دارد!

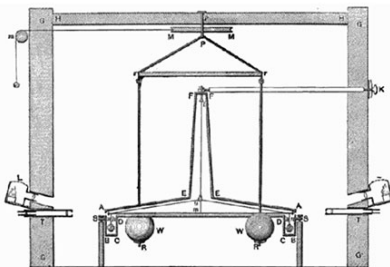


کاوندیش جهان را وزن می کند.

● بالاخره در سال های ۱۷۹۸ - ۱۷۹۷ راه حل این مشکل توسط هنری کاوندیش (Henry Cavendish) در طی یک سری آزمایش های بسیار دقیق و طاقت فرسا پیدا شد.

● هنری کاوندیش کاشف هیدروژن نیز می باشد.

● اساس این آزمایش بر ترازوی پیچشی استوار است. این دستگاه که تا همین امروز به عنوان یکی از دقیق ترین ابزارها برای اندازه گیری نیروی گرانش استفاده می شود، ساختار بسیار ساده ای دارد.

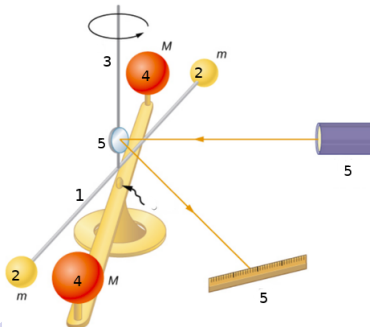


H. Cavendish

ساختار ترازوی پیچشی کاوندیش

• ترازوی پیچشی کاوندیش از اجزای اصلی زیر تشکیل شده است:

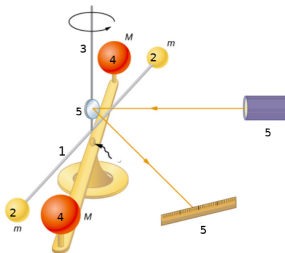
۱. میله سبک افقی: یک میله نازک و سبک که در مرکز خود به یک سیم بسیار باریک و کشسان (معمولاً از جنس فلزاتی مانند نقره یا مس) آویزان شده است.
۲. دو گلوله کوچک: در دو انتهای میله، دو گلوله فلزی کوچک و هم جرم (معمولاً از جنس سرب) نصب شده‌اند. این گلوله‌ها توده‌های "آزمایشی" هستند که تحت نیروی گرانشی گلوله‌های بزرگ‌تر قرار می‌گیرند.



ساختار ترازوی پیچشی کاوندیش

ترازوی پیچشی کاوندیش از اجزای اصلی زیر تشکیل شده است:

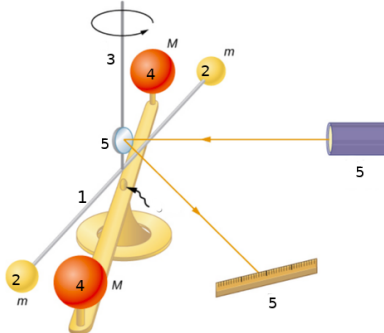
- **سیم پیچشی:** سیم بسیار نازکی که میله به آن آویزان است، خاصیت پیچشی دارد. وقتی گلوله‌های کوچک تحت تاثیر نیروی گرانشی جابه‌جا می‌شوند، میله کمی می‌چرخد و سیم پیچیده می‌شود. میزان پیچش سیم با زاویه چرخش میله متناسب است.
- **گلوله‌های بزرگ یا توده‌های جرم:** دو گلوله بزرگ‌تر از جنس سرب یا فلز سنگین در خارج از سیستم نصب می‌شوند، به‌گونه‌ای که بتوان موقعیت آن‌ها را نسبت به گلوله‌های کوچک تغییر داد. این گلوله‌ها نیروی گرانشی بر گلوله‌های کوچک وارد می‌کنند.



ساختار ترازوی پیچشی کاوندیش

• ترازوی پیچشی کاوندیش از اجزای اصلی زیر تشکیل شده است:

- جعبه یا محفظه محافظ: کل دستگاه معمولاً در یک محفظه بسته قرار داده می شود تا از تأثیر جریان هوا و تغییرات دمایی جلوگیری شود.
- آینه و سیستم اندازه گیری زاویه: یک آینه کوچک به میله متصل می شود و با تاباندن پرتو نور به آن و انعکاس بر روی مقیاس، تغییرات زاویه ای بسیار کوچک قابل اندازه گیری می گردد.



ترازوی کاوندیش در عمل

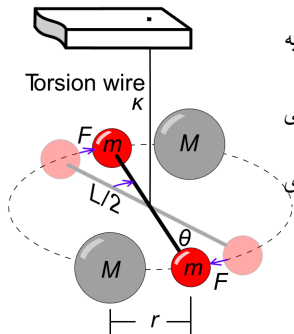
- دو وزنه یک کیلوگرمی که در فاصله 10 cm از هم قرار گرفته اند را در نظر بگیرید. نیروی بین این دو وزنه برابر است با

$$F = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1^2}{(0.1)^2} = 6.67 \times 10^{-9} \text{ N}$$

- این نیرو حداقل یک میلیون بار از وزن یک تکه کوچک کاغذ کمتر است. ما در آزمایش کاوندیش می خواهیم چنین نیروهای کوچکی را اندازه بگیریم!!!
- چند فیلم از نحوه کار ترازوی پیچشی کاوندیش ببینید.



فیزیک ترازوی پیچشی



همانطور که نیروی وارده به یک فنر متناسب با تغییر طول x آن است:

$$F = -kx$$

گشتاور وارده به یک ترازوی پیچشی نیز متناسب با جابجایی زاویه ای در آن ترازو می باشد:

$$\tau = -\kappa \theta$$

که در آن پارامتر κ (بخوانید کاپا) را ضریب ترازوی پیچشی می نامند.

ضریب κ را می توان به راحتی با استفاده از دوره تناوب ترازوی پیچشی اندازه گیری کرد. در واقع از معادله بالا داریم:

$$\tau = -\kappa \theta \Rightarrow I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\kappa \theta$$

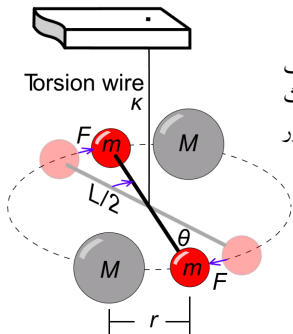
که از آن می توان به راحتی کمیت های زیر را به دست آورد:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

در اینجا I لختی دورانی میله و دو جرم m است. در فصل دهم محاسبه این لختی دورانی را دیده ایم. مثلاً اگر بتوان از جرم میله در مقابل دو جرم m صرف نظر کرد، می توان نوشت:

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2}$$

فیزیک ترازوی پیچشی



بنابراین با اندازه گیری دوره تناوب T می توان به راحتی پارامتر κ را اندازه گرفت:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

حال دو وزنه M را به صورت متقارن در فاصله r از وزنه های کوچک قرار می دهیم. در نتیجه نیروی گرانش $F = GMm/r^2$ باعث جابجایی زاویه ای θ در میله می شود. همچنین برای اندازه گشتاور در ترازوی پیچشی می توان نوشت:

$$\tau = \kappa \theta \Rightarrow L \frac{GMm}{r^2} = \kappa \theta$$

با جایگزینی مقدار κ می توانیم مقدار ثابت جهانی گرانش را بیابیم:

$$G = \frac{4\pi^2 L r^2 \theta}{MT^2}$$

این آزمایش نیاز به آماده سازی، صبر و دقت فراوان دارد؛ ولی پس از فهم جزئیات می توان ثابت گرانش را حتی با دقت ۱٪ نیز یافت:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

در واقع، با داشتن ابزارهای اپتیکی مدرن می توان دقت اندازه گیری را به مراتب افزایش داد.

جرم زمین

- با داشتن مقدار ثابت جهانی گرانش می توان به راحتی جرم زمین را تعیین کرد، زیرا شعاع زمین پیشتر به روش های هندسی معلوم شده است:

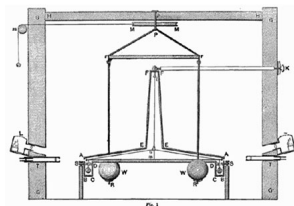
$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} \Rightarrow M_E = \frac{gR_E^2}{G} = \frac{9.8 \times (6.37 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.96 \times 10^{24} \text{ kg}$$

و به این ترتیب کاوندیش جرم زمین را از داخل خانه خود اندازه گرفت!

- تمرین: نشان دهید که چگالی کره زمین از مقدار زیر به دست می آید:

$$\rho_E = \frac{3g}{4\pi R_E G}$$

این چگالی چند برابر چگالی آب است؟



H. Cavendish

تعیین جرم اجرام سماوی



با تعیین مقدار G می توان جرم دیگر اجرام آسمانی مانند خورشید، سیارات، خوشه های ستاره ای، کهکشان ها، خوشه های کهکشانی و در نهایت کیهان را با استفاده از تحلیل گرانش این سیستم ها به دست آورد. مثلا، برای منظومه شمسی قانون سوم کپلر برقرار است. بنا به این قانون، که بعدا اثبات خواهد شد، مربع دوره تناوب حرکت هر سیاره به دور خورشید متناسب است با مکعب قطر بزرگ مدار بیضوی آن سیاره:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s} \right) a^3$$

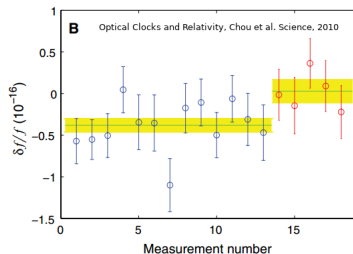
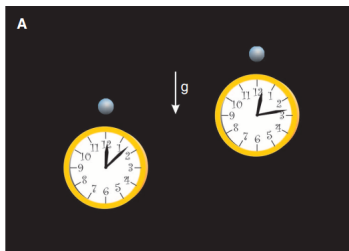
در اینجا T دوره تناوب حرکت سیاره، a نصف قطر بزرگ بیضی و M_s جرم خورشید است.

مدار حرکت زمین به دور خورشید تقریبا دایره شکل است. همچنین، شما دوره تناوب حرکت زمین به دور خورشید و فاصله متوسط زمین تا خورشید را می دانید. از اینجا مقدار جرم خورشید M_s را بیابید.

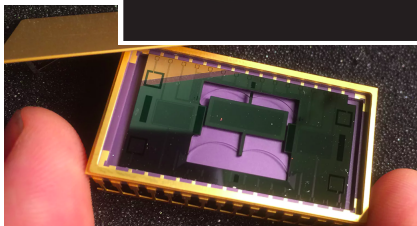
Planet	Semi-major axis (AU)	Period (days)	$\frac{a^3}{T^2}$ ($10^{-6} \text{ AU}^3/\text{day}^2$)
Mercury	0.38710	87.9693	7.496
Venus	0.72333	224.7008	7.496
Earth	1	365.2564	7.496
Mars	1.52366	686.9796	7.495
Jupiter	5.20336	4332.8201	7.504
Saturn	9.53707	10775.599	7.498
Uranus	19.1913	30687.153	7.506
Neptune	30.0690	60190.03	7.504

روش های مدرن اندازه گیری میدان گرانشی

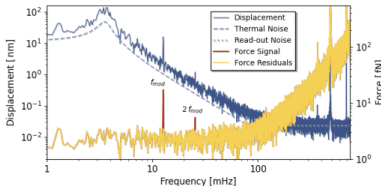
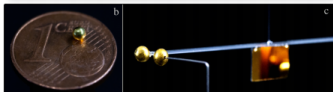
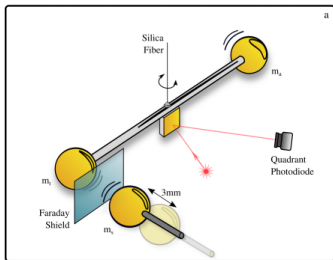
در قرن بیستم روش های جدیدی برای اندازه گیری شتاب گرانش ابداع شده اند. بحث مبسوط در این زمینه خارج از حوصله درس حاضر است، ولی باید اشاره کنم که دقیق ترین روش در این زمینه استفاده از ساعت های اتمی است. در حال حاضر ساعت های اتمی می توانند تغییر در میدان گرانشی در اثر تغییر ارتفاع حتی چند میلیمتر را نیز اندازه گیری کنند.



همچنین روش های میکرو الکترومکانیکی (MEMS)، اپتومکانیکی و ... نیز موجودند.



ترازوهای پیچشی مدرن



ترازوهای پیچشی نیز در سالیان اخیر به مراتب دقیق تر شده و بهبود یافته اند. در یکی از دقیق ترین اندازه گیری های سال های اخیر، گروهی در دانشگاه وین با استفاده از یک ترازوی پیچشی پیشرفته مقدار G را با دقت بالایی اندازه گیری کردند. شتاب های اندازه گیری شده در این آزمایش در حد 10^{-10} m/s^2 هستند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید روش کاوندیش برای اندازه گیری نیروی گرانش را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. اساس ترازوی پیچشی کاوندیش را توضیح دهید.

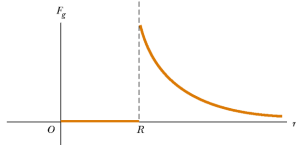
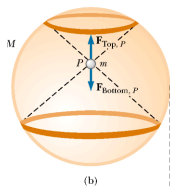
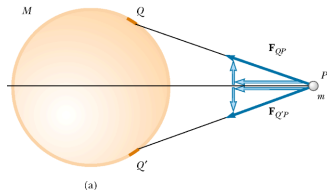
۲. شما چه روشی برای اندازه گیری جرم مشتری و یا زحل پیشنهاد می کنید؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات زیر محک زده و تقویت کنید.



مبحث بعدی: گرانش اجرام گسترده و قضیه های پوسته



در جلسه بعد با اصل برهمنهی آشنا خواهیم شد. همچنین، خواهیم فهمید که چطور می توان میدان گرانشی یک جسم گسترده را با تجزیه آن جسم به اجرام کوچکتر و جمع بندی میدان های دیفرانسیلی به دست آورد. این البته همان روش المان هاست که پیشتر با آن آشنا شده ایم. به علاوه، قضیه های پوسته را اثبات خواهیم کرد.

منابع

- ❶ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❷ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما