

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

نامساوی بسل

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

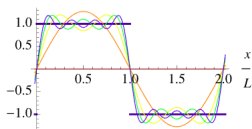
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ نامساوی بسل
- نامساوی بسل
- بسط دو تابع مهم

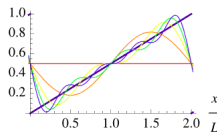
کمال و یا تمامیت پایه های فضا

- فرض کنید که یک سری توابع پایه در اختیار داریم. هرچند این پایه ها ممکن است همیشه تمام فضا را پوشش ندهند.
- ویژگی پوشش دادن فضا توسط یک مجموعه مشخص از پایه های فضا را ویژگی کمال (تمامیت completeness) می نامند. این ویژگی بسیار مهم است، زیرا ما می خواهیم بدانیم که آیا بسط یافت شده برای یک تابع مشخص واقعا به آن تابع همگرا می شود و یا خیر؟!
- متأسفانه هیچ شرط عمومی برای تشخیص تمامیت یک مجموعه توابع پایه وجود ندارد.

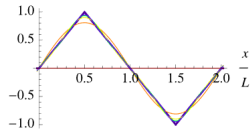
square wave



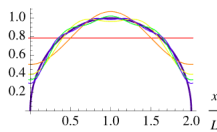
sawtooth wave



triangle wave



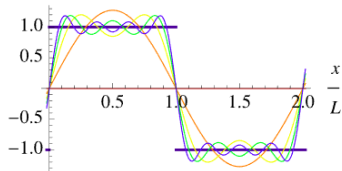
semicircle



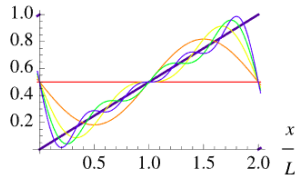
کمال و یا تمامیت پایه های فضا

- البته اگر تابع مورد نظر ما فقط در برخی نقاط ناپیوستگی داشته باشد، می توان برخی شرایط را برای همگرایی بسط معرفی کرد. نتیجه معمولا در بیشتر نقاط نواحی بازه مورد نظر همگرا می شود؛ هرچند، همچنان ممکن است در برخی نقاط خاص واگرایی داشته باشیم!

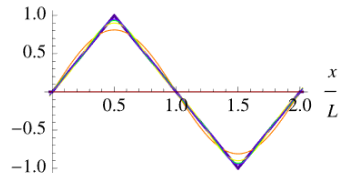
square wave



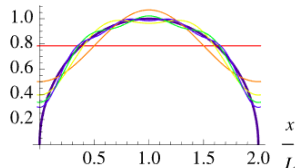
sawtooth wave



triangle wave



semicircle



توابع انتگرال پذیر مجذوری

- توابع انتگرال پذیر مجذوری (square integrable functions) توابعی هستند که برای آنها مقدار $\int_a^b f^*(x)f(x) dx$ وجود دارد (غیر واگراست):

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b f^*(x)f(x) dx < \infty$$

این توابع را ریاضی دانان با علامت $\mathcal{L}^2$ و یا L^2 نشان می دهند.

- مثال هایی از انتگرال پذیری یا ناپذیری توابع:

۱- تابع $\cos x$ در بازه $(0, \infty)$ انتگرال پذیر مجذوری نیست: $\int_0^\infty |\cos(x)|^2 dx \rightarrow \infty$

۲- تابع e^x در بازه $(-\infty, \infty)$ انتگرال پذیر مجذوری نیست: $\int_{-\infty}^\infty e^{2x} dx \rightarrow \infty$

۳- تابع e^{-x} در بازه $(0, \infty)$ انتگرال پذیر مجذوری است: $\int_0^\infty e^{-2x} dx = 0.5$

- فرض کنید که تابع f انتگرال پذیر مجذوری است. در این صورت تمامیت توابع توانی و توابع مثلثاتی به عنوان توابع پایه برای بسط تابع f اثبات شده است. این نتیجه بسیار مهمی است و در مکانیک کوانتومی (و اکثر شاخه های فیزیک و مهندسی) اهمیت بنیادین دارد.

کمال و یا تمامیت پایه های فضا

همچنین کورانت و هیلبرت نشان داده اند که توابع پایه ای که از حل مساله هرмитی ویژه مقداری حاصل می شوند نیز یک مجموعه توابع پایه کامل تشکیل می دهند. این موضوع به نوعی یکی از ستون های اصلی برای تشکیل ساختار ریاضیاتی درست در مکانیک کوانتومی است. این موضوع را به تفصیل در فصل بعد (مساله ویژه مقداری) در نظر خواهیم گرفت.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \dots \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - a & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} - a & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

نامساوی بسل

یکی از آزمون های تمامیت توابع پایه نامساوی بسل (Bessel's inequality) است. بنا به نامساوی بسل، اگر تابع f را با استفاده از پایه های یکامتعاد به صورت $f = \sum_n a_n \varphi_n$ بسط

$$\langle f | f \rangle \geq \sum_n |a_n|^2$$

دهیم، آنگاه می توان ثابت کرد

توجه: حالت نامساوی وقتی رخ می دهد که بسط تابع f کامل نباشد.

مشکل در کاربرد نامساوی بسل این است که باید درستی این نامساوی برای ”همه توابع f ” موجود در فضای هیلبرت نشان داده شود! سپس می توان ادعا کرد که پایه های یاد شده کامل هستند.

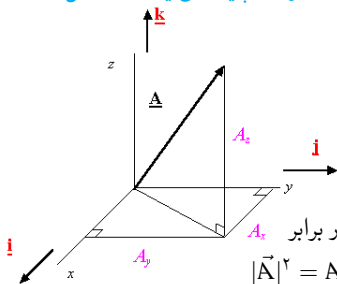
از لحاظ هندسی، نامساوی بسل به این معناست که مجذور طول بردار همیشه از مجموع مجذور تعدادی از مولفه های آن بزرگتر است؛

$$|\vec{A}|^2 \geq A_x^2 \quad |\vec{A}|^2 \geq A_x^2 + A_y^2$$

و اگر همه مولفه ها را در نظر بگیریم، آنگاه مجذور طول بردار برابر

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

است با مجموع مجذور مولفه های آن:



اثبات نامساوی بسل

- برای اثبات نامساوی بسل، تابع $g = f - \sum_n a_n \varphi_n$ را در نظر بگیرید. برای این تابع مطمئن داریم $\langle g | g \rangle \geq 0$ (چرا؟!). در نتیجه می توان نوشت:

$$I = \left\langle f - \sum_i a_i \varphi_i \left| f - \sum_j a_j \varphi_j \right. \right\rangle \geq 0$$

حالت $I = 0$ را همگرایی در میانگین (convergence in the mean) می نامند. بنا به شرط همگرایی در میانگین، انتگرالده می تواند در یک سری نقاط منفرد غیر صفر باشد. شرط همگرایی در میانگین برای اکثر مسائل فیزیکی کافی است و این شرط ضعیف تر از شرط همگرایی یکنواخت است.

- اثبات نامساوی بسل با استفاده از نمادگذاری دیراک بسیار ساده است:

$$\langle g | g \rangle = \langle f | f \rangle - \sum_i a_i^* \langle \varphi_i | f \rangle - \sum_j a_j \langle f | \varphi_j \rangle + \sum_{ij} a_i^* a_j \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle \geq 0$$

و البته با توجه به یکامتعامد بودن پایه های فضا داریم $\langle \varphi_i | f \rangle = a_i$ و $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$. بنابراین

$$\langle g | g \rangle = \langle f | f \rangle - 2 \sum_i |a_i|^2 + \sum_{ij} a_i^* a_j \delta_{ij} = \langle f | f \rangle - \sum_i |a_i|^2 \geq 0$$

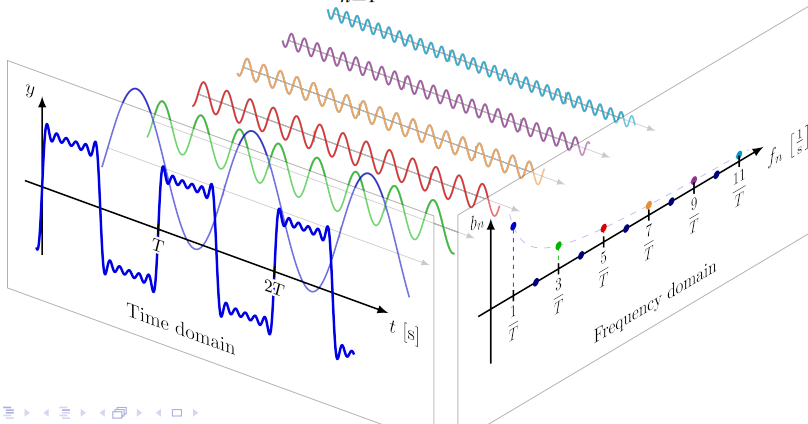
که به سادگی نامساوی بسل را نتیجه می دهد:

$$\langle f | f \rangle \geq \sum_n |a_n|^2$$

بسط یک تابع ناپیوسته

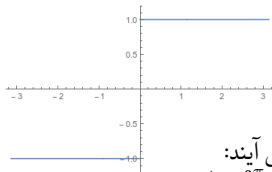
- می توان نشان داد که توابع $\sin nx$ برای مقادیر $n = 1, 2, \dots$ و $\cos nx$ برای مقادیر $n = 0, 1, 2, \dots$ به اتفاق پایه های کاملی را برای فضا در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ تشکیل می دهند.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$



بسط یک تابع ناپیوسته

این توابع اساس بسط فوريه هستند که اهمیت نظری و کاربردی فراوانی دارد. البته باید توجه کرد که چون بسط فوريه در شرط همگرایی در میانگین صدق می کند، می توان از آن حتی برای توابعی با تعداد محدود ناپیوستگی نیز استفاده کرد. مثلاً تابع پله ای زیر را در نظر بگیرید.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2}, & 0 < x < \pi \\ -\frac{h}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

تمرین: نشان دهید که ضرایب بسط فوريه از دو رابطه زیر به دست می آیند:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

توجه: ضریب $1/\pi$ به این دلیل ظاهر می شود که توابع پایه سینوس و کسینوس بهنجار نیستند (هرچند متعامدند)!

تابع پله ای معرفی شده در اینجا یک تابع فرد است. بنابراین ضرایب زوج بسط فوريه (ضرایب کسینوس) باید صفر شوند. در نتیجه با محاسبه ساده انتگرال b_n داریم:

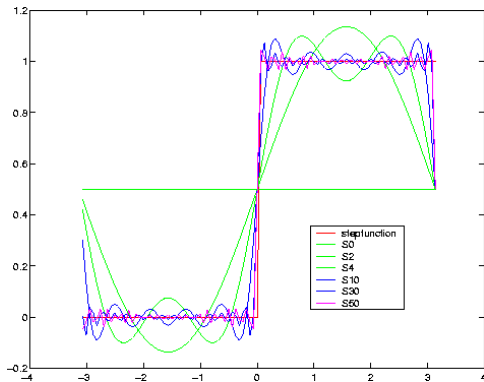
$$b_n = \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ even,} \\ \frac{2h}{n\pi}, & n \text{ odd.} \end{cases}$$

بسط یک تابع ناپیوسته

پس بسط تابع پله ای داده شده بر حسب توابع پایه سینوسی به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

نحوه همگرا شدن بسط با افزایش تعداد جملات را در شکل زیر به وضوح می بینید.



بسط تابع دلتای دیراک

• با استفاده از بسط متعامد می توان نمایش های دیگری برای تابع دلتای دیراک نیز پیدا کرد. در واقع، می توان با استفاده از ”هر مجموعه کامل توابع پایه” یک نمایش جدید برای تابع دلتای دیراک ساخت.

• فرض کنید که φ_n ها توابعی متعامد با تابع وزنی واحد بر روی بازه (a, b) هستند. حال بسط زیر را در نظر بگیرید:

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x)$$

که در آن ضرایب بسط طبیعتاً تابع t هستند. این ضرایب را می توان از رابطه $c_n = \langle \varphi_n | f \rangle$ بدست آورد:

$$c_n(t) = \int_a^b \varphi_n^*(x) \delta(x - t) dx = \varphi_n^*(t)$$

در اینجا البته از ویژگی اصلی تابع دلتا استفاده کرده ایم. حال با وارد کردن نتیجه بالا در بسط اولیه داریم:

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(t) \varphi_n(x)$$

پرسش: توضیح دهید که چرا این نتیجه در $x = t$ به صورت یکنواخت همگرا نیست.

توجه کنید که عدم همگرایی یکنواخت این سری مشکلی ایجاد نمی کند چون دلتا همیشه زیر انتگرال به کار می رود.

رابطه بستر تابع دلتای دیراک

● رابطه زیر را رابطه بستر تابع دلتای دیراک می نامند، به شرطی که توابع پایه φ_n کامل باشند:

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(t) \varphi_n(x)$$

● حال فرض کنید که تابع دلخواه $F(t)$ را بر حسب توابع پایه φ_n به صورت $F(t) = \sum_p c_p \varphi_p$ بسط داده ایم. بنابراین می توان نوشت:

$$\int_a^b F(t) \delta(x - t) dt = \int_a^b dt \sum_{p=0}^{\infty} c_p \varphi_p(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(t) \varphi_n(x)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} c_p \varphi_p(x) = F(x),$$

که البته انتظار آن را نیز داشتیم. هرچند، اگر بازه

انتگرال گیری (a, b) را با (t_1, t_2) جایگزین کنیم، که در آن $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ ، می توان

نتیجه کلی تر مقابل را نیز به دست آورد. چرا؟ چون $\delta(x - t)$ جز در $x \approx t$ ناچیز است.

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) \delta(x - t) dt = \begin{cases} F(x), & t_1 < x < t_2, \\ 0, & x < t_1 \text{ or } x > t_2 \end{cases}$$

● توجه: در اثبات رابطه میانی در این اسلاید از شرط یکتاعامد توابع پایه استفاده کرده ایم:

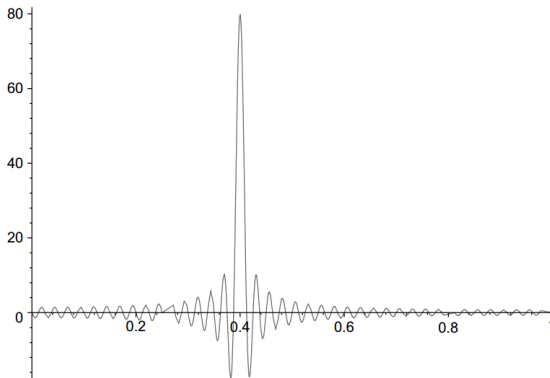
$$\int_a^b \varphi_n^*(t) \varphi_p(t) dt = \delta_{np}$$

بسط تابع دلتای دیراک

توابع پایه $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$ را در نظر بگیرید، که در بازه $(0, 1)$ x یکامتعامد و کامل اند. در نتیجه ضرایب بسط را می توان از رابطه $\langle \varphi_n | \delta(x-t) \rangle$ به صورت زیر به دست آورد.

$$\delta(x-t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N 2 \sin n\pi t \sin n\pi x$$

نتیجه را برای $N = 80$ ، $t = 0.4$ و بازه $0 < x < 1$ در زیر می بینید.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نامساوی بسل و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از تمامیت (کمال) پایه چیست؟
- ۲ درباره شروط تمامیت در فضای هیلبرت تحقیق کنید.
- ۳ مفهوم هندسی نامساوی بسل چیست؟
- ۴ رابطه نامساوی بسل و تمامیت چیست؟
- ۵ منظور از بسط فوریه چیست؟
- ۶ درباره بسط های دیگر تابع دلتای دیراک تحقیق کنید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

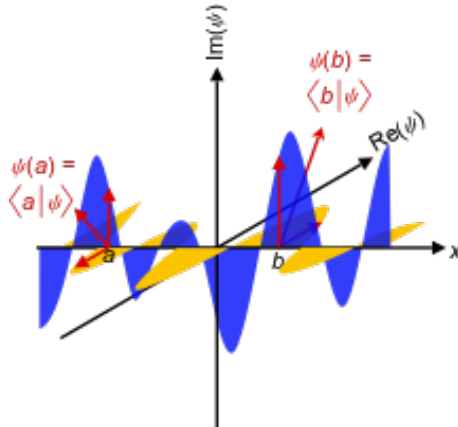


تمرین

- مسائل شماره ۱ تا ۹ از بخش اول از فصل پنجم کتاب آرفکن و همکاران (ویرایش هفتم) را حل کنید.

مبحث بعدی: نمادگذاری دیراک در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد با نمادگذاری دیراک در مکانیک کوانتومی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

