

مساله ویژه مقدری و کاربردهای آن

معادلات ویژه مقدری

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.



معادلات ویژه مقداری

- معادلات ویژه مقداری در فیزیک
- بسط معادله ویژه مقداری برحسب پایه ها
- هم ارزی شکل عملگری و شکل ماتریسی معادلات

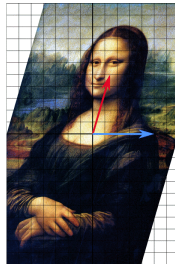
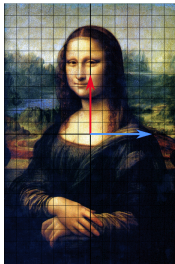
معادلات ویژه مقدری در فیزیک

• بسیاری از مسائل مهم در فیزیک را می توان به صورت معادلاتی با شکل کلی زیر بیان کرد.

$$A\psi = \lambda\psi$$

که در آن A یک عملگر خطی است که دامنه و برد آن یک فضای هیلبرت می باشد، ψ یک تابع در این فضا است و λ یک ثابت است. دقت کنید که عملگر A معلوم است، اما ψ و λ نامعلوم اند، و مسئله مورد نظر ما حل معادله بالاست (یعنی پیدا کردن ψ و λ).

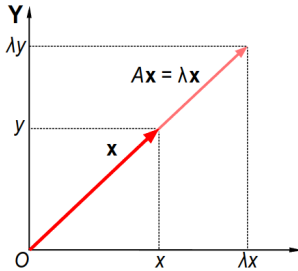
• اگر ψ را یک بردار در نظر بگیریم، آنگاه در اثر اعمال A بر روی ψ اندازه آن ممکن است تغییر کند (به ازای $\lambda \neq 1$)، ولی جهت آن تغییر نمی کند.



تفسیر هندسی معادله ویژه مقدری:

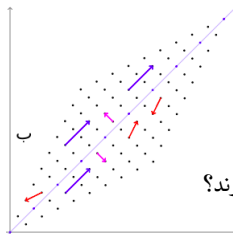
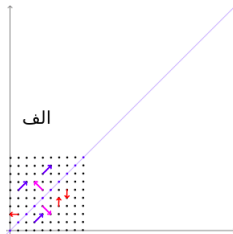
در شکل مقابل نگاشت برشی (shear mapping) به تابلوی مونالیزا اعمال شده است. بردار قرمز رنگ تغییر جهت می دهد، پس در معادله ای به شکل بالا صدق نمی کند. ولی جهت بردار آبی رنگ ثابت باقی مانده و در نتیجه در معادله $A\psi = \lambda\psi$ صدق می کند.

ویژه بردار و ویژه مقدار



از آنجا که پاسخ‌های معادله‌ای از این نوع، توابعی را به دست می‌دهند که تحت اثر عملگر (به جز ضرب شدن در یک ضریب مقیاس λ) بدون تغییر باقی می‌مانند، به آن‌ها معادلات ویژه مقدری گفته می‌شود. واژه Eigen در زبان آلمانی به معنای "خود" یا "آن" است. تابعی که یک معادله ویژه مقدری را حل می‌کند، تابع ویژه (eigenfunction) نامیده می‌شود و مقدار λ متناظر با آن تابع ویژه، مقدار ویژه (eigenvalue) نام دارد.

تفسیر هندسی معادله ویژه مقدار را در شکل بالا ببینید.



تمرین: فرض کنید ماتریس $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ بر شکل الف عمل کرده و شکل ب را نتیجه داده است. کدام بردارها ویژه بردارند؟

ویژه بردار و ویژه مقدار

تعریف صوری یک معادله مقدار ویژه ممکن است محتوای اساسی آن را به طور کامل آشکار نکند. این شرط که عملگر A تابع ψ را جز برای یک ضریب مقیاس بدون تغییر باقی بگذارد، قیدی بسیار سخت گیرانه بر ψ تحمیل می کند. این که معادله بالا اصلاً دارای راه حل باشد یا نه، در

Eigenvalues of geometric transformations

	Scaling	Unequal scaling	Rotation	Horizontal shear	Hyperbolic rotation
Illustration					
Matrix	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}$
Characteristic polynomial	$(\lambda - k)^2$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$	$\lambda^2 - 2 \cos(\theta)\lambda + 1$	$(\lambda - 1)^2$	$\lambda^2 - 2 \cosh(\varphi)\lambda + 1$
Eigenvalues, λ_i	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1$ $\lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = e^{i\theta}$ $= \cos \theta + i \sin \theta$ $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ $= \cos \theta - i \sin \theta$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = e^{\varphi}$ $= \cosh \varphi + \sinh \varphi$ $\lambda_2 = e^{-\varphi}$ $= \cosh \varphi - \sinh \varphi$
Algebraic mult., $\mu_i = \mu(\lambda_i)$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$
Geometric mult., $\gamma_i = \gamma(\lambda_i)$	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$
Eigenvectors	All nonzero vectors	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +i \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

بسیاری از موارد
به صورت شهودی
بدیهی نیست.

ویژه مقادیر برخی
تبدیلات هندسی
را در جدول مقابل
می بینید.

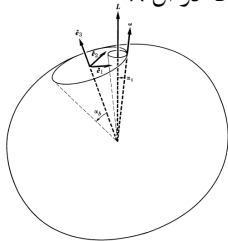
معادلات ویژه مقاری در فیزیک

• برای روشن شدن این که چرا معادلات مقدارویژه در فیزیک بسیار رایج اند، اجازه دهید چند مثال را ذکر کنیم:

• امواج ایستای تشدیدي یک رشته مرتعش آنهایی هستند که در آنها نیروی بازگرداننده بر عناصر رشته متناسب با جابه جایی آنها از وضعیت تعادل است. تکانه زاویه ای $\vec{L}$ و سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ یک جسم صلب، بردارهایی سه بعدی هستند که با رابطه $\vec{L} = I\vec{\omega}$ به هم مربوط اند. در اینجا I تانسور لختی دورانی است. این دو بردار در حالت کلی با هم هم جهت نیستند؛ ولی شرایطی که این دو بردار هم جهت باشند، طبیعتاً با رابطه $\vec{L} = \lambda \vec{\omega}$ داده می شود که در آن λ یک اسکالر است. با ترکیب این دو رابطه داریم

$$I\omega = \lambda\omega$$

که یک رابطه ویژه مقاری است. در این معادله ویژه مقاری عملگر ما همان ماتریس I و ویژه توابع (ویژه بردارها) اندازه حرکت زاویه ای $\vec{\omega}$ هستند.



معادلات ویژه مقدری در فیزیک

● معادله شرودینگر مستقل از زمان در مکانیک کوانتومی

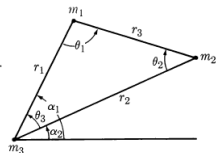
$$\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

یک مساله ویژه مقدری است که در آن عملگر معادله همان هامیلتونی است، تابع $\psi(\vec{r})$ ویژه تابع مساله است و انرژی E ویژه مقدار می باشد.

● یکی از مسائل بنیادین (و همچنان باز اختریفی) این پرسش است که سرنوشت یک بیضی گون که با سرعت زاویه ای مشخصی در حال دوران است، و نیروهای مشخصی (مانند گرانش) بین ذرات آن وجود دارند، سرانجام چگونه خواهد شد؟ روش های مختلفی برای حل این مساله در شرایط خاص پیشنهاد شده است. هرچند معمولاً این راه حل ها به یک مساله ویژه مقدری منجر می شوند.

● همچنین است مساله مشهور سه جسمی! و ده ها مساله کاربردی و تئوری دیگر.

$$\begin{vmatrix} \left(p^2 - 3M + \frac{9}{4}m_2\right) & \left(-\frac{9}{4}m_2\right) & -\left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2\right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2\right) \\ \left(-\frac{9}{4}m_1\right) & \left(p^2 - 3M + \frac{9}{4}m_1\right) & -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1\right) & -\left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1\right) \\ \left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2\right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2\right) & \left(p^2 - \frac{9}{4}m_2\right) & \left(\frac{9}{4}m_2\right) \\ -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1\right) & \left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1\right) & \left(\frac{9}{4}m_1\right) & \left(p^2 - \frac{9}{4}m_1\right) \end{vmatrix} = 0.$$



بسط معادله ویژه مقدری بر حسب پایه ها

یک روش بسیار قدرتمند برای حل مساله ویژه مقدری این است که این مساله را در پایه های یکا متعامد φ_i بسط دهیم (برای اینکار باید از روش های توسعه یافته در مبحث فضا های برداری استفاده کنیم). در این روش، عملگر A را با یک ماتریس با درایه های $a_{ij} = \langle \varphi_i | A | \varphi_j \rangle$ نشان می دهیم. همچنین، تابع ψ را با یک بردار ستونی $\vec{c}$ با مولفه های $c_i = \langle \varphi_i | \psi \rangle$ نشان می دهیم. در نتیجه معادله اولیه $A\psi = \lambda\psi$ به صورت معادله ماتریسی $A\vec{c} = \lambda\vec{c}$ تبدیل می شود.

وقتی یک معادله مقدار ویژه به این صورت ارائه می شود، می توان آن را یک معادله مقدار ویژه ماتریسی نامید و بردارهای $\vec{c}$ که آن را حل می کنند بردارهای ویژه خوانند. همان طور که در بخش های بعدی این فصل خواهیم دید، روش های خوبی برای حل معادلات مقدار ویژه ماتریسی توسعه یافته اند. بنابراین همواره یک مسیر در دسترس برای حل معادلات مقدار ویژه این است که آن ها را به فرم ماتریسی در آوریم. پس از حل یک مسئله مقدار ویژه ماتریسی، می توانیم توابع

$$\psi = \sum_i c_i \varphi_i$$

ویژه مسئله اصلی را از بسط آن ها بازیابی کنیم:

گاهی، همان گونه که در مثال ممان اینرسی ذکر شده در بالا دیدیم، مسئله مقدار ویژه از ابتدا به صورت یک مسئله ماتریسی مطرح می شود. در این صورت، بدیهی است که نیازی نیست فرایند حل را با معرفی یک پایه و تبدیل مسئله به فرم ماتریسی آغاز کنیم، و پاسخ ها بردارهایی خواهند بود که لازم نیست به عنوان بسط هایی بر حسب یک پایه تفسیر شوند.

هم ارزی شکل عملگری و شکل ماتریسی معادلات

- نکته مهم این است که ما با معادلات مقدارویژه ای سروکار داریم که در آن ها عملگر دخیل خطی است و بر عناصر یک فضای هیلبرت عمل می کند. هنگامی که این شرایط برقرار باشند، هم عملگر و هم تابع مورد نظر را همواره می توان در یک پایه بسط داد که این کار به یک معادله مقدارویژه ماتریسی می انجامد که کاملاً معادل مسئله اصلی ماست. از جمله پیامدهای این موضوع آن است که هر قضیه ای درباره خواص بردارهای ویژه یا مقادیر ویژه که از بسط یک مسئله مقدارویژه بر حسب مجموعه ای از پایه ها به دست آید، الزاماً باید برای مسئله اصلی نیز صادق باشد، و این که حل معادله مقدارویژه ماتریسی، راه حلی برای مسئله اصلی نیز فراهم می کند. این واقعیت ها، به همراه مشاهده عملی این که ما می دانیم چگونه مسائل مقدارویژه ماتریسی را حل کنیم، به طور قوی نشان می دهد که بررسی دقیق مسائل ماتریسی باید در دستور کار ما قرار گیرد.

$$A\psi = \lambda\psi \quad \left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{array} \right) = \lambda \left(\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{array} \right)$$

هم ارزی شکل عملگری و شکل ماتریسی معادلات

- وقتی به بررسی مسائل مقدارویژه ماتریسی می پردازیم، درمی یابیم که برخی ویژگی های ماتریس بر ماهیت پاسخ ها تأثیر می گذارند و به ویژه زمانی که ماتریس هرمیتی باشد، ساده سازی های قابل توجهی در دسترس قرار می گیرد. بسیاری از معادلات مقدارویژه مورد علاقه در فیزیک شامل عملگرهای دیفرانسیلی هستند؛ از این رو، درک این که آیا (یا تحت چه شرایطی) این عملگرها هرمیتی اند، اهمیت ویژه ای دارد. این موضوع در فصل ۸ بررسی می شود.
- در پایان یادآور می شویم که معرفی بسط بر حسب یک مجموعه پایه، تنها راه حل یک معادله مقدارویژه نیست. معادلات مقدارویژه ای که شامل عملگرهای دیفرانسیلی هستند را می توان با روش های کلی حل معادلات دیفرانسیل نیز بررسی کرد. این بحث نیز در فصل ۸ مطرح شده است.

$$A\psi = \lambda\psi \quad \left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{array} \right) = \lambda \left(\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{array} \right)$$

بنیاد مکانیک کوانتومی

از دیدگاه تاریخی، ارتباط میان معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدارویژه ماتریسی یکی از نکات بنیادی در شکل‌گیری مکانیک کوانتومی است و به روشنی در دو صورت‌بندی مستقل اما معادل آن، یعنی مکانیک موجی شرودینگر و مکانیک ماتریسی هایزنبرگ، آشکار می‌شود.



در دهه ۱۹۲۰، فیزیک‌دانان با این مسئله روبه‌رو بودند که قوانین کلاسیک قادر به توصیف پدیده‌هایی مانند طیف اتم هیدروژن، پایداری اتم‌ها و رفتار تابش نبودند. نخستین پیشرفت‌های جدی توسط بور، زومرفلد و دیگران انجام شد، اما این نظریه‌ها هنوز فاقد یک چارچوب ریاضی منسجم بودند.

بنیاد مکانیک کوانتومی

● در سال ۱۹۲۵، ورنر هایزنبرگ صورت‌بندی تازه‌ای از مکانیک کوانتومی ارائه کرد که بعدها به «مکانیک ماتریسی» معروف شد. در این رویکرد، کمیت‌های فیزیکی مانند مکان و تکانه نه به صورت توابع پیوسته از زمان، بلکه به صورت ماتریس‌هایی با درایه‌های گسسته در نظر گرفته می‌شدند. این ماتریس‌ها روابط جابجایی داشتند و مقادیر ویژه آن‌ها مستقیماً با کمیت‌های قابل مشاهده، مانند ترازهای انرژی، ارتباط پیدا می‌کردند. در این چارچوب، مسئله فیزیکی اساساً به یک مسئله مقدارویژه ماتریسی فروکاسته می‌شد.

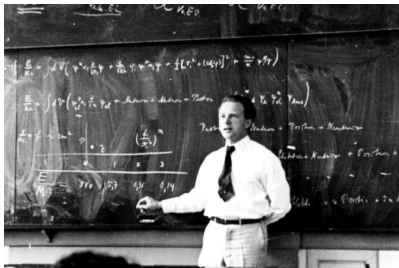
● اندکی بعد، در سال ۱۹۲۶، اروین شرودینگر صورت‌بندی دیگری ارائه کرد که از نظر مفهومی برای بسیاری شهودی‌تر بود. او نشان داد که حالت یک سیستم کوانتومی را می‌توان با یک تابع موج توصیف کرد که از یک معادله دیفرانسیل (معادله شرودینگر) پیروی می‌کند. در این رویکرد، مقادیر ویژه عملگر هامیلتونی (یک عملگر دیفرانسیلی) همان ترازهای انرژی سیستم هستند. بنابراین، مسئله فیزیکی به حل یک معادله دیفرانسیل مقدارویژه تبدیل می‌شود.

در ابتدا، این دو نظریه کاملاً متفاوت به نظر می‌رسیدند: یکی مبتنی بر ماتریس‌ها و جبر خطی، و دیگری مبتنی بر توابع پیوسته و معادلات دیفرانسیل. با این حال، به سرعت مشخص شد که این دو صورت‌بندی از نظر ریاضی کاملاً معادل هستند. این هم‌ارزی توسط شرودینگر، دیراک و فون نویمان روشن شد. نکته کلیدی این بود که فضای حالت کوانتومی را می‌توان به صورت یک فضای هیلبرت در نظر گرفت؛ در این فضا، عملگرهای دیفرانسیلی شرودینگر و ماتریس‌های هایزنبرگ تنها دو نمایش متفاوت از یک ساختار انتزاعی واحد هستند.

بنیاد مکانیک کوانتومی

به بیان دقیق‌تر، اگر یک پایه مناسب در فضای هیلبرت انتخاب شود، عملگر دیفرانسیلی (مانند هامیلتونی در مکانیک موجی) می‌تواند به صورت یک ماتریس بی‌نهایت بعدی نمایش داده شود، و حل معادله دیفرانسیل متناظر دقیقاً معادل حل یک مسئله مقدارویژه ماتریسی است. به همین دلیل است که میان معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدارویژه ماتریسی یک تناظر عمیق و بنیادی وجود دارد.

از دیدگاه تاریخی، این تناظر نقش مهمی در پذیرش مکانیک کوانتومی داشت: مکانیک موجی با زبان آشنای معادلات دیفرانسیل به فیزیک‌دانان کلاسیک نزدیک‌تر بود، در حالی که مکانیک ماتریسی بنیان جبر خطی و غیرجابجایی را آشکار کرد. وحدت این دو دیدگاه نشان داد که ساختار ریاضی نظریه، مستقل از نمایش انتخاب شده است، و این درک، سنگ بنای صورت‌بندی مدرن مکانیک کوانتومی شد.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید معادلات ویژه مقدراری و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱. درباره معادلات ویژه مقدراری در الکترومغناطیس تحقیق کنید.
۲. درباره معادلات ویژه مقدراری در مکانیک تحقیق کنید.
۳. درباره معادلات ویژه مقدراری در شار ه تحقیق کنید.
۴. درباره معادلات ویژه مقدراری در پلاسم تحقیق کنید.
۵. درباره معادلات ویژه مقدراری در حالت جامد تحقیق کنید.
۶. درباره معادلات ویژه مقدراری در کوانتوم تحقیق کنید.
۷. درباره معادلات ویژه مقدراری در فیزیک هسته ای تحقیق کنید.
۸. درباره معادلات ویژه مقدراری در اتمی مولکولی تحقیق کنید.
۹. درباره معادلات ویژه مقدراری در اخترفیزیک تحقیق کنید.
۱۰. درباره معادلات ویژه مقدراری در مهندسی برق تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ” درونی سازی ” مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

تبدیلات هندسی زیر و مفهوم معادله ویژه مقدری آنها را توضیح دهید.

Eigenvalues of geometric transformations

	Scaling	Unequal scaling	Rotation	Horizontal shear	Hyperbolic rotation
Illustration					
Matrix	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}$
Characteristic polynomial	$(\lambda - k)^2$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$	$\lambda^2 - 2 \cos(\theta) \lambda + 1$	$(\lambda - 1)^2$	$\lambda^2 - 2 \cosh(\varphi) \lambda + 1$
Eigenvalues, λ_i	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1$ $\lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ $\lambda_2 = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = e^{\varphi} = \cosh \varphi + \sinh \varphi$ $\lambda_2 = e^{-\varphi} = \cosh \varphi - \sinh \varphi$
Algebraic mult., $\mu_i = \mu(\lambda_i)$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$
Geometric mult., $\gamma_i = \gamma(\lambda_i)$	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$
Eigenvectors	All nonzero vectors	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

مبحث بعدی: معادلات ویژه مقدار ماتریسی

● در جلسه بعد با یک مثال ساده بررسی معادلات ویژه مقدار ماتریسی را شروع خواهیم کرد.



منابع

- 1 Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- 2 Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- 3 Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- 4 Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- 5 Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- 6 <https://math.libretexts.org/>
- 7 <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما