

فیزیک الکتریسته و مغناطیس

اولین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

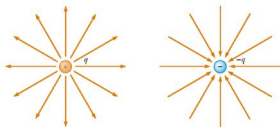
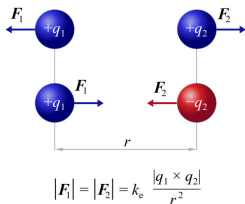


دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

اولين جلسه حل تمرين ۱

یادآوری قانون کولن و میدان



شکل ها به ترتیب از ویکی و مبانی فیزیک هالیدی،
ویرایش دهم.

قانون گوس در واقع شکل دیگری از قانون کولن است.

۱ قانون کولن

۲ برهمکنش مستقیم $\Leftarrow$ نیرو؛ برهمکنش غیر مستقیم $\Leftarrow$ میدان.

۳ میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد شده بر یک بار آزمون در آن نقطه بخش بر واحد بار:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

۴ اگر میدان الکتریکی در یک نقطه را داشته باشیم؛ آنگاه، پیدا کردن نیروی وارده بر هر ذره q_0 در آن نقطه بسیار راحت خواهد بود:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}.$$

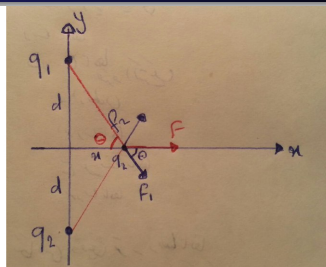
۵ اصل برهم نهی

۶ تکنیک المان ها

پرسش اول

***۲۳ در شکل ۲۱-۳۲، ذره‌های ۱ و ۲ به بار $q_1 = q_2 = +3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$ را روی محور y در فاصله $d = 17.0 \text{ cm}$ از مبدأ در نظر بگیرید. ذره ۳ به بار $q_3 = +6.4 \times 10^{-19} \text{ C}$ روی محور x از $x = +5.0 \text{ m}$ حرکت می‌دهیم. به ازای چه مقادیری از بزرگی نیروی الکتریستاتیکی وارد بر ذره سوم از طرف دو ذره دیگر به (الف) کمینه و (ب) بیشینه خواهد رسید؟ اندازه این نیروی (ج) کمینه و (د) بیشینه چقدر است؟

شکل ۲۱-۳۲ مسئله ۲۳.



شکل از ترجمه فیزیک هالیدی .

از طرفی داریم:

بنابراین، وابستگی نیروی کل به متغیر x به صورت زیر خواهد بود:

$$|\vec{F}| = 2 \frac{K q_1 q_3}{d^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$= 2 K q_1 q_3 \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}}$$

باید این تابع را بر حسب متغیر x بهینه سازی کنیم.

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{K q_1 q_3}{d^2 + x^2} \quad i = 1, 2$$

از طرف دیگر مولفه های عمودی نیروها همدیگر را خنثی می کنند، بنابراین:

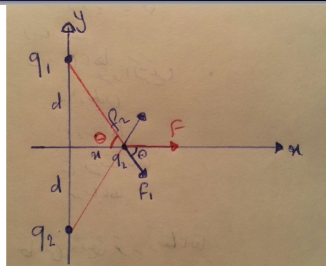
$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 2 |\vec{F}_1| \cos \theta$$

$$\cos \theta = x / \sqrt{d^2 + x^2} \quad \text{که در آن}$$

پاسخ

***۲۳ در شکل ۲۱-۳۲ ذره‌های ۱ و ۲ به بار $q_1 = q_2 = +3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$ را روی محور y در فاصله $d = 17.0 \text{ cm}$ از مبدأ در نظر بگیرید. ذره ۳ به بار $q_3 = +6.4 \times 10^{-19} \text{ C}$ را به تدریج روی محور x از $x = +5.0 \text{ m}$ حرکت می‌دهیم. به ازای چه مقداری از x بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره سوم از طرف دو ذره دیگر به (الف) کمینه و (ب) بیشینه خواهد رسید؟ اندازه این نیروی (ج) کمینه و (د) بیشینه چقدر است؟

شکل ۳۲-۲۱ مسئله ۲۳.



شکل از ترجمه فیزیک هالیدی.

با حل معادله

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d^2 - 2x^2}{(d^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

داریم:

$$x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}d}{2}$$

که به ازای $d = 17 \text{ cm}$ ، و با توجه به بازه $0 \leq x \leq 5$ ، فقط یک جواب دارد: $x_0 \simeq 12 \text{ cm}$ ، که خارج از بازه مساله است.

با توجه به ثابت بودن کمیت های K ، q و q_3 عملاً باید تابع

$$g(x) = \frac{x}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

را تحلیل کنیم.

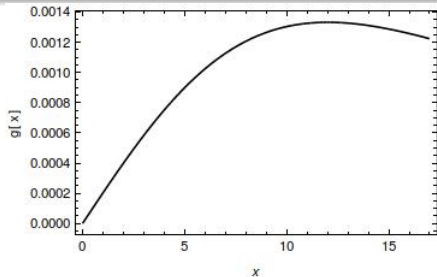
مشتق این تابع برابر است با:

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d^2 - 2x^2}{(d^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

پاسخ

***۲۳ در شکل ۲۱-۳۲، ذره‌های ۱ و ۲ به بار $q_1 = q_2 = +3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$ را روی محور y در فاصله $d = 17.0 \text{ cm}$ از مبدأ در نظر بگیرید. ذره ۳ به بار $q_3 = +6.4 \times 10^{-19} \text{ C}$ را به تدریج روی محور x از $x = 0$ تا $x = +5.0 \text{ m}$ حرکت می‌دهیم. به ازای چه مقادیری از x بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذره سوم از طرف دو ذره دیگر به (الف) کمینه و (ب) بیشینه خواهد رسید؟ اندازه این نیروی (ج) کمینه و (د) بیشینه چقدر است؟

شکل ۳۲-۲۱ مسئله ۲۳.



شکل از ترجمه فیزیک هالیدی .

همانطور که شکل تابع $g(x)$ نشان می‌دهد، این تابع در بازه

$0 \leq x \leq 5$ صعودی است. بنابراین کمترین مقدار آن در $x = 0$ و بیشترین مقدار آن در $x = 5$ رخ می‌دهد.

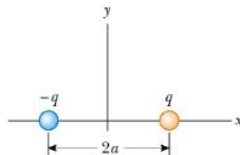
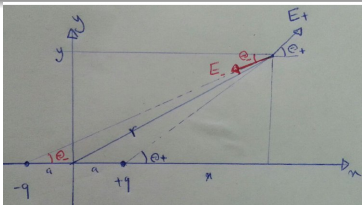
در $x = 0$ داریم:

$$F(x = 0) = 0$$

در حالی که در $x = 5$ داریم:

$$F(x = 5) = 2Kq_1q_2 / (0.0000898619).$$

پرسش دوم



میدان بارهای مثبت و منفی را در یک نقطه دلخواه فضا به مختصات (x, y) می یابیم:

$$|\vec{E}_+| = \frac{Kq}{(x-a)^2 + y^2} \quad |\vec{E}_-| = \frac{Kq}{(x+a)^2 + y^2}$$

که در آن

$$\cos \theta_+ = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \quad \sin \theta_+ = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

$$\cos \theta_- = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \quad \sin \theta_- = \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

میدان الکتریکی یک دو قطبی در یک نقطه دلخواه فضا: نشان دهید که در فواصل بسیار زیاد از دو قطبی، مولفه های E_x و E_y میدان الکتریکی در یک نقطه دلخواه فضا به مختصات (x, y) به صورت زیر هستند:

$$E_y = \frac{3Kpxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_x = \frac{Kp(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

پاسخ- یافتن E_x

حال برای پیدا کردن مولفه میدان در جهت x داریم:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_+ \cos \theta_+ - E_- \cos \theta_- = \frac{Kq}{(x-a)^2 + y^2} \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{Kq}{(x+a)^2 + y^2} \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \\
 &= \frac{Kq(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Kq(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Kq(x-a)}{(x^2 + y^2 - 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Kq(x+a)}{(x^2 + y^2 + 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{Kq}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{x-a}{\left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+a}{\left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
 &= \frac{Kq}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(x-a) \left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - (x+a) \left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

حال باید عبارت اخیر را بر حسب پارامتر بسیار کوچک $\epsilon = \frac{2ax}{x^2 + y^2}$ بسط دهیم.

یادآوری بسط دوجمله ای: $(1 \pm \epsilon)^n = 1 \pm n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \epsilon^2 + \dots$

پاسخ- یافتن E_x

با بسط دادن عبارت اخیر بر حسب پارامتر $\epsilon = \frac{\sqrt{ax}}{x^2+y^2}$ داریم:

$$E_x = \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(x-a) \left(1 - \frac{\sqrt{ax}}{x^2+y^2} \right)^{-\frac{3}{2}} - (x+a) \left(1 + \frac{\sqrt{ax}}{x^2+y^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(x-a) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{ax}}{x^2+y^2} + \dots \right) - (x+a) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{ax}}{x^2+y^2} + \dots \right) \right]$$

فقط جملات درجه اول بر حسب a را نگه می داریم (جملات متناس با a^2, a^3 و ... بسیار کوچک هستند.):

$$E_x = \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-\sqrt{a} + \frac{\sqrt{ax}}{x^2+y^2} \right] = \frac{Kq(\sqrt{a})}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{Kp(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

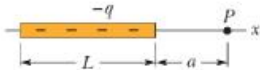
که همان جواب مورد نظر است.

پاسخ- یافتن E_y

برای پیدا کردن مولفه میدان در جهت y داریم:

$$\begin{aligned}
 E_y &= E_+ \sin \theta_+ - E_- \sin \theta_- = \frac{Kq}{(x-a)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{Kq}{(x+a)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \\
 &= Kqy \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 - 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \frac{Kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
 &= \frac{Kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \\
 &= \frac{Kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2} + \dots\right) \right] = \frac{6Kaqxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3Kpxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

پرسش سوم



انتگرال گیری

مستقیم نیرو برای یک توزیع بار پیوسته:

در شکل بالا بار آزمون q_0 در نقطه P قرار دارد. میله ای باردار به طول L و بار کل $-q$ ، که به صورت همگن روی میله توزیع شده است، را در نظر بگیرید. نیرویی را که میله به بار آزمون وارد می کند بیابید.

پاسخ

توزیع بار را به بارهای بسیار کوچک dq تجزیه کرده و نیروی وارده از طرف هر المان بار dq به بار آزمون q_0 در نقطه P را محاسبه می‌کنیم:

$$|d\vec{F}| = K \frac{q_0 dq}{r^2} = K \frac{q_0 dq}{(L + a - x)^2}$$

جهت این نیرو به سمت چپ است (چرا؟). چرا فاصله بار آزمون تا المان بار را برابر $r = L + a - x$ فرض کرده ایم؟
حال برای پیدا کردن نیروی کل وارده به بار آزمون، باید همه نیروهای بسیار کوچک را با هم جمع ببندیم (بخوانید انتگرال بگیریم):

$$F = \int_0^L dF = \int_0^L K \frac{q_0 dq}{r^2} = K q_0 \int_0^L \frac{dq}{r^2} = K q_0 \int_0^L \frac{dq}{(L + a - x)^2}$$

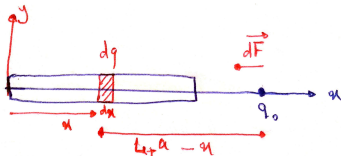
یک انتگرال یگانه داریم و دو متغیر!! باید یکی از متغیرها را به دیگری تبدیل کنیم. برای اینکار از تناسب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{q}{dq} = \frac{L}{dx}$$

بنابراین $dq = q dx / L$. حال، به کمک این رابطه می‌توان انتگرالی تک متغیره ساخت:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^L dF = K q_0 \int_0^L \frac{\frac{q dx}{L}}{(L + a - x)^2} = K q_0 \frac{q}{L} \int_0^L \frac{dx}{(L + a - x)^2} = K q_0 \frac{q}{L} \int \frac{-du}{u^2} \\ &= \frac{K q_0 q}{L} \left[\frac{1}{L + a - x} \right]_0^L = \frac{K q_0 q}{L} \left[\frac{1}{L + a - L} - \frac{1}{L + a - 0} \right] = \frac{K q_0 q}{L} \frac{L}{a(a + L)} = \frac{K q_0 q}{a(a + L)} \end{aligned}$$

رفتار نیرو در فواصل بزرگ به صورت $K q_0 q / a^2$ می‌باشد.



جمع بندی روش المان ها

این روش برای حل نیرو (و یا میدان، پتانسیل و ...) ناشی از بارهای پیوسته به کار می رود.

۱ بار پیوسته اولیه (در مساله قبل میله) را به تعدادی بسیار زیادی بارهای کوچک، که نیروی ناشی از هر کدام را می دانید، تبدیل کنید.

۲ نیروی ناشی از هر بار کوچک را بنویسید.

۳ اگر مساله مورد نظر یک بعدی نیست، نیروی یاد شده را در جهت های عمود بر هم تجزیه کنید. معمولاً نیرو در یکی از جهت ها (بنا به تقارن) صفر است.

۴ از نیروی دیفرانسیلی به دست آمده انتگرال بگیرید تا نیروی کل به دست آید.

۵ اگر در انتگرال خود دو متغیر داشتید، با استفاده از تناسب یکی از متغیرها را حذف کنید.

۶ نتیجه نهایی به دست آمده را با استفاده از شکل نقطه ای قانون کولن چک کنید (فواصل زیاد).

اهمیت روش المان ها در اینجاست که با حل مسائل کوچکتر و ساده تر، می توان از نتایج آنها استفاده کرده و مسائل بزرگتری را حل کرد. مثلاً اگر جواب مربوط به یک حلقه را به دست آوریم، می توانیم از آن استفاده کرده و جواب مربوط به یک دیسک (قرص) را بیابیم. در فصل بعد به تفصیل در این زمینه بحث خواهیم کرد.



با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.