

مساله ویژه مقداری و کاربردهای آن

تبهگنی جواب ها در حل مساله ویژه مقداری

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

تبهگنی جواب ها در حل مساله ویژه مقداری

تبهگنی جواب ها در حل مساله ویژه مقداری



روش کلی حل مساله ویژه مقدراری

روش کلی حل مساله ویژه مقدراری به صورت زیر است:

مساله ویژه مقدراری را به شکل ماتریسی بنویسید؛ یعنی ماتریس مورد نظر را

بنویسید.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

معادله سده ای $\det(H - \lambda I) = 0$ را نوشته و ویژه مقادیر λ را بیابید.

ویژه مقدار λ_1 را وارد معادله $H\vec{r}_1 = \lambda_1\vec{r}_1$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_1$ را بیابید.

در صورت لزوم ویژه بردار $\vec{r}_1$ را بهنجار کنید: $\hat{r}_1 = \vec{r}_1 / \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1}$

ویژه مقدار λ_2 را وارد معادله $H\vec{r}_2 = \lambda_2\vec{r}_2$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_2$ را بیابید. ویژه بردار را در صورت لزوم بهنجار کنید.

عملیات بالا را برای همه ویژه مقادیر انجام دهید.

اگر دو و یا چند ویژه مقدار معادله ویژه مقدراری با هم برابر باشند (ریشه های تکراری معادله سده ای)، آنگاه معادله ویژه مقدراری را تبهگن (degenerate) می نامند. در این درس می خواهیم نحوه کار با سیستم های تبهگن را بیاموزیم.

مساله ویژه مقدراری برای يك ماتريس 3×3 تبهگن

• می خواهیم ویژه مقادير و ویژه بردارهای ماتريس مقابل را بياييم.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حالا معادله سده ای $\det(H - \lambda I) = 0$ را نوشته و دترمینان مورد نظر را بسط می دهيم.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda) = 0$$

بنابراين ویژه مقادير مورد نظر به صورت $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = +1$ و $\lambda_3 = +1$ به دست می آیند. **تبهگنی جواب ها واضح است. ولی ابتدا جواب غير تبهگن را پيدا می کنیم.**

• ویژه مقدار $\lambda_1 = -1$ را وارد معادله $H\vec{r}_1 = \lambda_1\vec{r}_1$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_1 = (c_1, c_2, c_3)^T$ را می يابيم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

از معادلات اول و سوم می توان به راحتی دید که $c_1 = -c_3 = C$. همچنين از معادله دوم داریم $c_2 = 0$. بردار بهنجار شده را بياييد.

مساله ویژه مقدراری برای یک ماتریس 3×3 : تحلیل جواب های تبهگن

• حالا ویژه مقادیر تبهگن $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ را وارد معادله $H\vec{r} = \lambda\vec{r}$ کرده و ویژه بردار $\vec{r} = (c'_1, c'_2, c'_3)^T$ را می یابیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c'_1 + c'_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ c'_1 - c'_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} C' \\ C'' \\ C' \end{pmatrix}$$

از معادلات اول و سوم می توان به راحتی دید که $c'_1 = c'_3 = C'$. همچنین از معادله دوم می بینیم که $c'_2 = C''$ یک پارامتر آزاد است. پس شکل کلی بردار $\vec{r}$ به صورت بالاست.

• معنی این وضعیت (وجود دو پارامتر آزاد در جواب) چیست؟ دقت کنید که دستگاه معادلات اسلاید قبل دو معادله مستقل داشت؛ در نتیجه دو پارامتر (از سه پارامتر) معلوم شد و یک پارامتر آزاد باقی ماند. ولی دستگاه معادلات این اسلاید فقط یک معادله مستقل دارد؛ در نتیجه دو پارامتر آزادند. در واقع با انتخاب هر مقدار C' و C'' می توان یک جواب جدید تولید کرد. بنابراین ویژه بردارهای مربوط به ویژه مقدار تبهگن $\lambda = 1$ بر روی یک زیرفضای (خمینه manifold) قرار دارند.

• گرچه هر دو بردار در خمینه یاد شده ویژه بردارهای مساله ما هستند، معمول است که این دو بردار را به صورت متعامد انتخاب می کنند. مثلاً می توان یکی از پارامترها مانند C'' را برابر صفر قرار داد و یکی از بردارها را یافت. بردار دوم را می توان با صفر قرار دادن C' ساخت.

مساله ویژه مقدراری برای يك ماتريس 3×3 : تحليل جواب های تبهگن

● روش کلی تر (به ویژه برای ماتريس های با ابعاد بالاتر) این است که یکی از بردارها در زیرفضای تبهگن را یافته و بقیه بردارها را با استفاده از روش گرام-اشمیت بسازیم. به هر حال بردارهای مورد نظر به صورت زیر پیدا می شوند:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = +1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = C' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = C'' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با بهنجار سازی سه ویژه بردار بالا می توان به مجموعه زیر رسید:

$$\lambda_1 = -1, \quad \vec{r}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \vec{r}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تمرین: بهنجار بودن و متعامد بودن بردارهای بالا را نشان دهید.

● مسائل ویژه مقدراری که ما تاکنون در نظر گرفته ایم، نوعاً بسیار ساده بوده و جواب تحلیلی داشته اند. هرچند، مسائل ویژه مقدراری در دنیای واقعی معمولاً شامل ماتريس های بسیار بزرگ و پیچیده اند. این نوع مسائل را می توان با استفاده از روش های عددی پیشرفته حل کرد. این موضوع خارج از بحث حاضر است.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید معادلات ویژه مقداری و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

روش کلی حل مسائل ویژه مقداری تیهگن را توضیح دهید.

آیا ویژه بردارهای مسائل ویژه مقداری تیهگن لزوما متعامد هستند؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



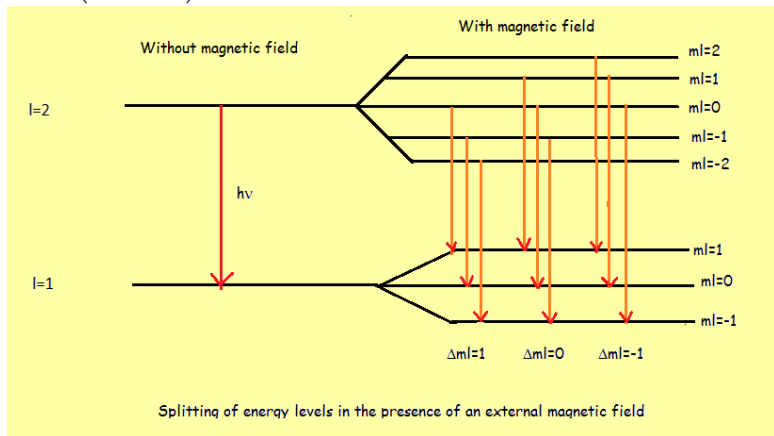
تمرین

- مسائل بخش دوم از فصل ششم کتاب آرفکن و همکاران (ویرایش هفتم) را حل کنید.

مبحث بعدی: حل مساله ویژه مقدار ماتریس های هرمیتی

در جلسه بعد با حل مساله های ویژه مقدار ماتریس های هرمیتی آشنا خواهیم شد.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



منابع

- 1 Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- 2 Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- 3 Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- 4 Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- 5 Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- 6 <https://math.libretexts.org/>
- 7 <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

