

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

مشتق هموردا و نمادهای کریستوفل

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ مشتق هموردا و نمادهای کریستوفل
- مشتق هموردا
- اهمیت و مفهوم مشتق هموردا

تغییرات یک بردار در مختصات عام

- مشتق یک بردار در مختصات عام: فرض کنید می خواهیم مشتقات جهتی یک بردار دلخواه V تحت مختصات عام را محاسبه کنیم. این موضوع اساس مبحث حسابان بر روی فضاهای خمیده است.
- وضعیت در این مورد (مختصات عام) بسیار پیچیده تر است، زیرا بردارهای پایه e_i در حالت کلی ثابت نیستند. در نتیجه خواهیم دید که مشتق یک بردار خود یک تانسور نیست (یعنی مولفه های مشتق بردار مانند یک تانسور تبدیل نمی شوند).
- ما می توانیم مشتق یک تانسور کلی را محاسبه کنیم. ولی به خاطر سادگی و شهود بیشتر، از مشتق یک بردار شروع می کنیم. بردار V را در نمایش پادوردا با قانون تبدیل زیر در نظر بگیرید:

$$(V')^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} V^k$$

(تصحیح فرمول در کتاب) با محاسبه مشتق این مولفه نسبت به q^j می توان دید

$$\frac{\partial (V')^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial V^k}{\partial q^j} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial q^k} V^k$$

در نتیجه مشتق بالا خود یک تانسور مرتبه دوم نیست، زیرا قانون تبدیل آن با قانون تبدیل تانسور مرتبه دوم تفاوت دارد. در واقع جمله دوم (که شامل مشتق دوم است) به نظر اضافی است!

تغییرات یک بردار در مختصات عام

- چکار می توان کرد؟ بردارهای پایه هموردا را از جلسه قبل به یاد آورید:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x}{\partial q^i} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial q^i} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial q^i} \hat{\mathbf{e}}_z$$

با استفاده از این بردارها می توان مشتق بردار $\mathbf{V}'$ را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \frac{\partial V^k}{\partial q^j} \mathbf{e}_k + V^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$$

- تمرین: با مشتق گیری از $\mathbf{V}' = V^k \mathbf{e}_k$ نسبت به q^j درستی رابطه بالا را نشان دهید.
- تمرین: با توجه به رابطه اول موجود در این اسلاید عبارت $\partial \mathbf{e}_k / \partial q^j$ را محاسبه کنید و توضیح دهید که این عبارت در چه جهتی خواهد بود؟ آیا این عبارت در جهت $\mathbf{e}_k$ می باشد؟ اسلاید بعد را ببینید.

نمادهای کریستوفل نوع دوم

- عبارت $V' = V^k e_k$ در حالت کلی در یک جهت دلخواه (یک برهمنه‌ی از e_μ ها) می باشد. برای نشان دادن این برهمنه‌ی از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial e_k}{\partial q^j} = \Gamma_{jk}^\mu e_\mu$$

در اینجا Γ_{jk}^μ را نمادهای کریستوفل نوع دوم می نامند. نمادهای کریستوفل نوع اول را نیز در درس بعد خواهیم دید.

- با استفاده از ویژگی تعامد بردارهای پایه e_μ می توان نمادهای گاما را برحسب بردارهای پایه نوشت:

$$\Gamma_{jk}^m = e^m \cdot \frac{\partial e_k}{\partial q^j}$$

- تمرین: با ضرب طرفین رابطه اول این اسلاید در e^m درستی رابطه اخیر را نشان دهید.

- تمرین: نشان دهید $\Gamma_{jk}^m = \Gamma_{kj}^m$.

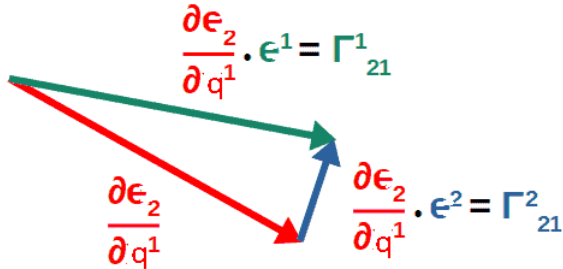
- تمرین: آیا گاماها‌ی کریستوفل تانسور مرتبه سوم هستند؟ قانون تبدیل آنها را بنویسید و نشان دهید که جواب منفی است. پاسخ دقیق در صفحه ۶۴ کتاب هابسون و همکاران آمده است.

General Relativity, An Introduction for Physicists,

M.P. HOBSON, G.P. EFSTATHIOU and A.N. LASENBY

معنی هندسی نمادهای کریستوفل نوع دوم

• پرسش: فرض کنید فضا دو بعدی است. حال با توجه به شکل زیر

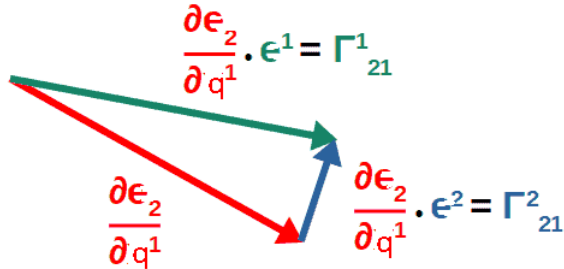


معنی هندسی نمادهای کریستوفل نوع دوم را با استفاده از رابطه زیر توضیح دهید.

$$\Gamma_{jk}^m = \epsilon^m \cdot \frac{\partial \epsilon_k}{\partial q^j}$$

معنی هندسی نمادهای کریستوفل نوع دوم

- پرسش: فرض کنید فضا دو بعدی است. حال با توجه به شکل زیر



معنی هندسی نمادهای کریستوفل نوع دوم را با استفاده از رابطه زیر توضیح دهید.

$$\Gamma_{jk}^m = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$$

- پاسخ: نمادهای کریستوفل نوع دوم نشان دهنده مولفه های مختلف مشتق بردارهای پایه هستند.

تغییرات یک بردار در مختصات عام

● حالا به مساله تغییرات یک بردار در مختصات عام برمی گردیم و رابطه زیر

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \frac{\partial V^k}{\partial q^j} \mathbf{e}_k + V^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$$

را با استفاده از گاماهاى کریستوفل بازنویسی می کنیم

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \frac{\partial V^k}{\partial q^j} \mathbf{e}_k + V^k \Gamma_{jk}^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$$

البته اندیس های k و μ اندیس های جمع بندی هستند و می توان جای این دو را عوض کرد. در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = \left(\frac{\partial V^k}{\partial q^j} + V^{\mu} \Gamma_{j\mu}^k \right) \mathbf{e}_k$$

عبارت داخل پرانتز بالا را مشتق هموردای بردار $\mathbf{V}$ می نامند و معمولا با علامت $;$ نمایش داده می شود.

$$V_{;j}^k = \frac{\partial V^k}{\partial q^j} + V^{\mu} \Gamma_{j\mu}^k, \text{ so } \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial q^j} = V_{;j}^k \mathbf{e}_k$$

گاهی نمادهای دیگر مانند ∇_a و D_a و ... نیز برای نشان دادن مشتق هموردای یک موجود به کار می رود.

● پرسش: کمیت $V_{;j}^k$ چه نوع موجودی است؟ پاسخ در اسلاید بعد.

مشتق هموردا

می توان معادله اخیر را به شکل دیفرانسیلی زیر نوشت

$$dV' = [V_{;j}^k dq^j] \epsilon_k$$

از اینجا می توان دید که با توجه به اینکه dq^j یک بردار پادوردا و ϵ_k یک بردار همورداست، کمیت $V_{;j}^k$ باید یک تانسور مخلوط مرتبه دوم باشد.

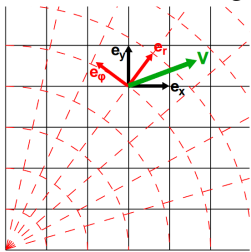
توجه: هیچکدام از کمیت های Γ_{ij}^k و یا $\partial N^k / \partial q^j$ تانسور نیستند، با وجودی که اندیس دارند. دلیل این امر آن است که این دو موجود از قانون تبدیل تانسورهای مرتبه سوم و دوم پیروی نمی کنند.

تمرین: نشان دهید که مشتق هموردای یک بردار هموردا مانند V_i را می توان به صورت زیر نوشت:

$$V_{i;j} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k$$

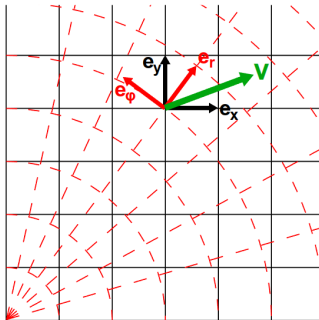
این موجود یک تانسور هموردای مرتبه دوم است.

پرسش: چرا به مشتق هموردا نیاز داریم؟ پاسخ در اسلاید بعد.



اهمیت مشتق هموردا در ریاضی، فیزیک و مهندسی

- در دستگاه مختصات دکارتی و فضای تخت، مشتق گرفتن از یک میدان برداری بسیار ساده است. کافی است از مؤلفه‌های آن مشتق بگیریم، یعنی $\partial V^i / \partial x^j$. اما این روش فقط وقتی درست است که:



- ۱ بردارهای پایه ثابت باشند،
- ۲ فضا تخت (غیرخمیده) باشد،
- ۳ جهات مختصاتی هنگام حرکت در فضا تغییر نکنند.

- ولی اگر این شرایط برقرار نباشد چکار کنیم؟
در اینجا مشتق هموردای بردار به کمک ما می آید:

$$V_{i;j} = \frac{\partial V_i}{\partial q^j} - V_k \Gamma_{ij}^k$$

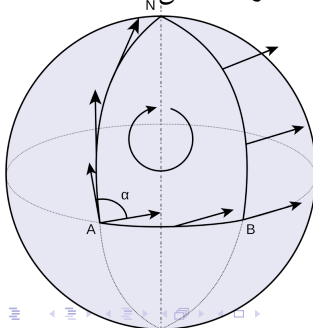
- ۱ جمله اول تغییر مؤلفه‌ها را حساب می‌کند؛
- ۲ جمله دوم تغییر پایه‌ها را جبران می‌کند.

- به این ترتیب مشتق هموردای یک بردار واقعاً یک تانسور است، برخلاف مشتق معمولی.

انتقال موازی و تفسیر هندسی مشتق هموردا

- مشتق همورداى اندازه‌گیری می‌کند که:
یک بردار هنگام جابه‌جایی بسیار کوچک در راستای q^i ، بر حسب تغییر "واقعی" خودش چه اندازه تغییر می‌کند.
این مفهوم بر پایه مفهوم انتقال موازی (parallel transport) معنا پیدا می‌کند.

- اگر یک بردار را به صورت موازی انتقال دادید و مؤلفه‌هایش تغییر کردند، این تغییر تنها ناشی از تغییر دستگاه مختصات است، نه تغییر واقعی بردار.
مشتق هموردا این تغییرات "کاذب" ناشی از هندسه مختصات را حذف می‌کند.



- مثلاً اگر روی سطح کره زمین قدم بزنید و یک بردار را بدون چرخاندن واقعی آن حمل کنید (انتقال موازی)، مؤلفه‌های آن در مختصات θ و ϕ تغییر می‌کنند، زیرا محورهای $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_\phi$ با حرکت شما می‌چرخند.
اما تانسورها نباید تحت این تغییرات مختصاتی دچار رفتار غیرتانسوری شوند؛ و جملات کریستوفل دقیقاً این چرخش‌های مختصاتی را جبران می‌کنند.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مشتق هموردا و نمادهای کریستوفل و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ توضیح دهید که چرا مشتق یک بردار از قانون تبدیل تانسورها پیروی نمی کند.
- ۲ منظور از نمادهای کریستوفل نوع دوم چیست؟
- ۳ منظور از مشتق هموردای یک بردار چیست؟ مفهوم این مشتق چیست؟
- ۴ درباره مفهوم انتقال موازی تحقیق کنید.
- ۵ تفسیر هندسی مشتق هموردا را بیان کنید.
- ۶ گامهای کریستوفل در محاسبه مشتق هموردا چه نقشی دارند؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

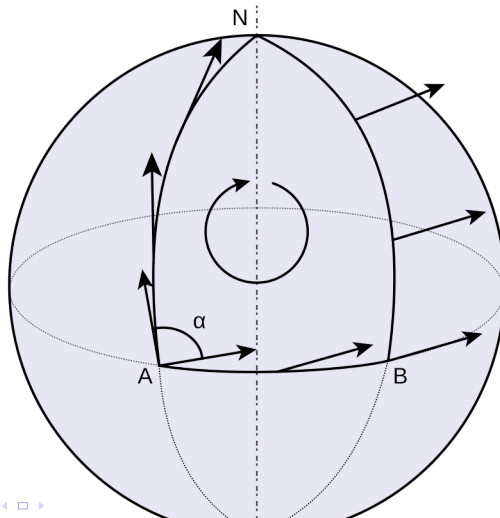


تمرین

- مسائل موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: نمادهای کریستوفل و محاسبه آنها

• در جلسه بعد با محاسبه نمادهای کریستوفل از تانسور متریک آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

