

مساله ویژه مقداری و کاربردهای آن

مساله ویژه مقداری برای یک ماتریس 3×3

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

● مساله ویژه مقداری برای یک ماتریس 3×3

● مساله ویژه مقداری برای یک ماتریس 3×3

روش کلی حل مساله ویژه مقدری

- روش کلی حل مساله ویژه مقدری به صورت زیر است:
- مساله ویژه مقدری را به شکل ماتریسی بنویسید؛ یعنی ماتریس مورد نظر را بنویسید.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- معادله سده ای $\det(H - \lambda I) = 0$ را نوشته و ویژه مقادیر λ را بیابید.
- ویژه مقدار λ_1 را وارد معادله $H\vec{r}_1 = \lambda_1\vec{r}_1$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_1$ را بیابید.
- در صورت لزوم ویژه بردار $\vec{r}_1$ را بهنجار کنید: $\hat{r}_1 = \vec{r}_1 / \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1}$
- ویژه مقدار λ_2 را وارد معادله $H\vec{r}_2 = \lambda_2\vec{r}_2$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_2$ را بیابید. ویژه بردار را در صورت لزوم بهنجار کنید.
- عملیات بالا را برای همه ویژه مقادیر انجام دهید.
- در ادامه مثال هایی را از حل مساله ویژه مقدری خواهیم دید.

مساله ویژه مقدری برای یک ماتریس 3×3

• می خواهیم ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس مقابل را بیابیم.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

حالا معادله سده ای $\det(H - \lambda I) = 0$ را نوشته و دترمینان مورد نظر را بسط می دهیم.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

بنابراین ویژه مقادیر مورد نظر به صورت $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = -1$ به دست می آیند.
دقت کنید که ترتیب نوشته شده کاملاً دلخواه است.

• ویژه مقدار λ_1 را وارد معادله $H\vec{r}_1 = \lambda_1\vec{r}_1$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_1 = (c_1, c_2, c_3)^T$ را می یابیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$$

از دو معادله اول می توان به راحتی دید که $c_1 = c_2 = 0$. از طرفی معادله سوم به ما هیچ اطلاعاتی نمی دهد. در نتیجه از معادله سوم به این نتیجه می رسیم که c_3 یک پارامتر دلخواه مانند C است. بردار بهنجار شده نیز واضح است.

مساله ویژه مقدری برای یک ماتریس 3×3

- حالا ویژه مقدار $\lambda_2 = 1$ را وارد معادله $H\vec{r}_2 = \lambda_2 \vec{r}_2$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_2 = (c'_1, c'_2, c'_3)^T$ را می یابیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c'_1 + c'_2 = 0 \\ c'_1 - c'_2 = 0 \\ c'_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} C' \\ C' \\ 0 \end{pmatrix}$$

از دو معادله اول می توان به راحتی دید که $c'_1 = c'_2 = C'$. از طرفی معادله سوم مقدار $c'_3 = 0$ را به ما می دهد.

تمرین: این بردار را بهنجار کنید.

- حالا ویژه مقدار $\lambda_3 = -1$ را وارد معادله $H\vec{r}_3 = \lambda_3 \vec{r}_3$ کرده و ویژه بردار $\vec{r}_3$ را می یابیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c''_1 \\ c''_2 \\ c''_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} c''_1 \\ c''_2 \\ c''_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c''_1 + c''_2 = 0 \\ c''_1 + c''_2 = 0 \\ c''_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} C'' \\ -C'' \\ 0 \end{pmatrix}$$

از دو معادله اول می توان به راحتی دید که $c''_1 = -c''_2 = C''$. از طرفی معادله سوم مقدار $c''_3 = 0$ را به ما می دهد.

تمرین: این بردار را بهنجار کنید.

ویژگی های بردارهای به دست آمده

● با بهنجار سازی سه ویژه بردار بالا می توان به مجموعه زیر رسید:

$$\lambda_1 = 2, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1, \quad \vec{r}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = -1, \quad \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

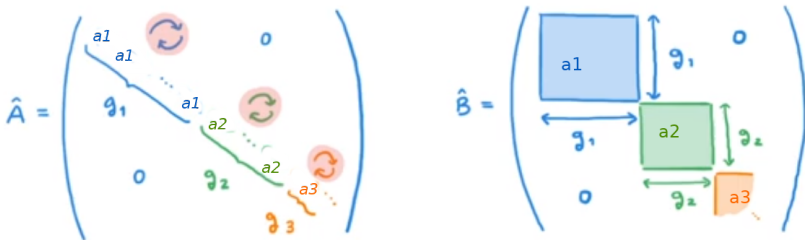
پرسش: تعداد ویژه مقادیر چه ارتباطی با ابعاد ماتریس H دارد؟
تمرین: بهنجار بودن و متعامد بودن بردارهای بالا را نشان دهید.

● توجه کنید که ماتریس H قطری-مربعی است، یعنی یک ماتریس مربعی 2×2 در بالا-چپ ماتریس H داریم و یک ماتریس 1×1 هم در پایین-راست داریم. در نتیجه معادله سده ای به حاصلضرب دو دترمینان مربوط به این دو ماتریس تجزیه شده است. بنابراین، جواب های یافت شده نیز به هر کدام از این دو ماتریس مربعی مربوط اند و در هر جواب، ضریب مربوط به مربع دیگر صفر است. مثلاً جواب مربوط به $\lambda_1 = 2$ مربوط به مربع پایین است. بنابراین c_3 غیر صفر بوده و دو ضریب دیگر صفرند. همچنین، جواب های $\lambda = \pm 1$ مربوط به مربع بالا هستند. در نتیجه ضریب c_3 صفر است.

● اگر هر کدام از ماتریس های مربعی موجود در ماتریس قطری-مربعی خود قطری $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ باشند (مانند ماتریس 1×1 در پایین-راست)، آنگاه ویژه مقدار مربوطه همان عناصر روی قطری اصلی هستند، مانند $\lambda_1 = 2$. ویژه بردار مربوطه هم فقط یک عنصر $c_3 = 1$ دارد. این نتیجه کاملاً کلی است.

عملگرهای قطری-مربعی در مکانیک کوانتومی

- درباره اهمیت عملگرهای قطری-مربعی در درس مکانیک کوانتومی بیشتر خواهید آموخت.



- تمرین: ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

تمرین

تمرین: ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

بخشی از پاسخ: برای پیدا کردن ویژه مقادیر، معادله سده ای را می نویسیم.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9 - \lambda \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(9 - \lambda) - 16]$$

پس ویژه مقادیر عبارتند از $\lambda = 2, 1, 11$. حال شما ویژه بردارهای متناظر با این ویژه مقادیر را بیابید. آیا ویژه بردارها بر هم عمودند؟

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_3 = \lambda_2^* = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرین: مثالی از ویژه مقادیر مختلط.

درستی ویژه مقادیر مربوط به ماتریس A

را نشان داده و ویژه بردارها را بیابید.

آیا ویژه بردارها بر هم عمودند؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید معادلات ویژه مقداری و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

روش کلی حل مسائل ویژه مقداری را توضیح دهید. 

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

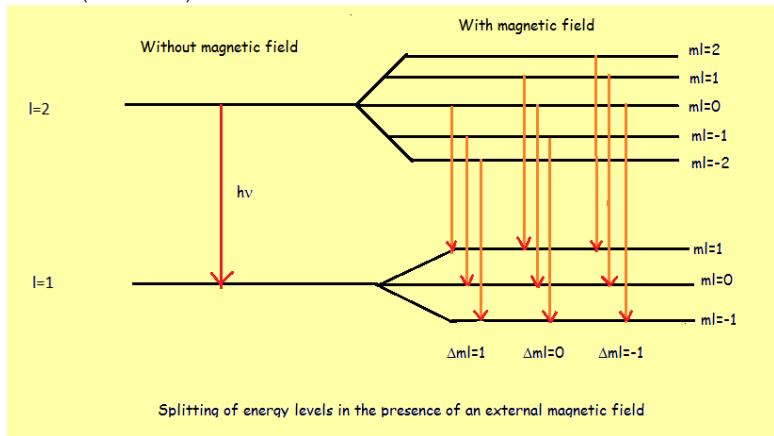
● ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس زیر را بیابید. آیا ویژه بردارها بر هم عمودند؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

مبحث بعدی: تبهگنی جواب ها در حل مساله ویژه مقداری

در جلسه بعد با تبهگنی جواب ها در حل برخی مساله های ویژه مقداری آشنا خواهیم شد.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>
- ➐ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

