

فیزیک مکانیک

جلسه چهارم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ جلسہ چہارم رفع اشکال و حل تمرین

تمرین های تحلیل حرکت

● تحلیل حرکت یک بعدی: مکان یک ذره در امتداد محور x با رابطه ی

$$x(t) = \frac{t}{t+1}$$

داده می شود.

(الف) سرعت متوسط را در بازه زمانی $t = 0$ s تا $t = 1$ s بیابید.

(ب) سرعت لحظه ای در لحظات $t = 0$ s و $t = 1$ s را بیابید.

(پ) سرعت لحظه ای وقتی که ذره در وسط مسیر بین این دو لحظه قرار

دارد چقدر است؟ سرعت در $t = 0.5$ s چقدر است؟

(ت) شتاب در لحظات $t = 0$ s و $t = 1$ s را بیابید.

● پاسخ الف:

$$x(t=0) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$x(t=1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t=1) - x(t=0)}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1} = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

پاسخ ب:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{t+1-t}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$v(t=0) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1 \text{ m/s}$$

$$v(t=1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \text{ m/s}$$

● پاسخ پ: پیدا کردن نقطه وسط

$$\bar{x} = \frac{x(t=1) + x(t=0)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4} \text{ m}$$

$$x(t) = \frac{1}{4} \Rightarrow t = ? \text{ زمان در نقطه وسط}$$

$$\frac{t}{t+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t = t+1$$

$$t = \frac{1}{3} \text{ s}$$

در این زمان، سرعت لحظه ای برابر است با

$$v(t = \frac{1}{3}) = \frac{1}{(\frac{1}{3} + 1)^2} = \frac{9}{16} \text{ m/s}$$

سرعت در $t = 0.5$ s

$$v(t = \frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{2} + 1)^2} = \frac{4}{9} \text{ m/s}$$

پاسخ ت:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{(t+1)^3}$$

$$a(t=0) = -\frac{2}{(0+1)^3} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$a(t=1) = -\frac{2}{(1+1)^3} = -\frac{1}{4} \text{ m/s}^2$$

تمرین

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

جسمی با سرعت 20 m/s به سمت بالا پرتاب می شود. الف: بالاترین نقطه ای را که جسم به آن می رسد پیدا کرده و آن را h بنامید. ب: زمان رسیدن به این نقطه را نیز بیابید. پ: زمانی را که جسم به نصف این ارتفاع می رسد بیابید.

پاسخ ب: جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می کنیم و فرض می کنیم که مبدا مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ باشد. در بالاترین نقطه سرعت توپ صفر است:

$$v_y = -gt + v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{9.8} = 2.04 \text{ s}$$

پاسخ الف: ارتفاع اوج:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 = -\frac{1}{2}(9.8)(2.04)^2 + 20 \times 2.04 + 0 = 20.4 \text{ m}$$

پاسخ پ: زمانی که جسم به نیمه راه می رسد:

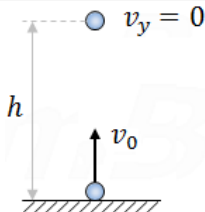
$$\frac{h}{2} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{20.4}{2} = -4.9t^2 + 20t$$

و یا

$$4.9t^2 - 20t + 10.2 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 4.9 \times 10.2}}{9.8}$$

$$t_1 = 0.6 \text{ s} \quad \text{and} \quad t_2 = 3.48 \text{ s}$$

جسم مورد نظر یکبار در رفت و یکبار در برگشت از این نقطه عبور خواهد کرد.



شکل از

<http://www.ambrsoft.com/>

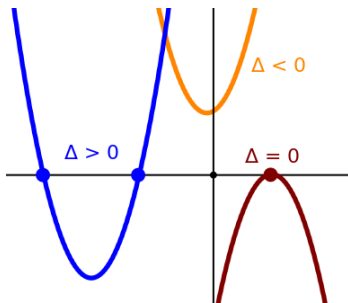
یادآوری حل معادلات درجه دوم

● جواب یک معادله جبری یعنی مکانی که نمودار آن معادله محور x را قطع می‌کند. یعنی

$$y(x) = 0 \Rightarrow x = ?$$

● دو جواب $\Delta > 0$
 یک جواب $\Delta = 0$
 بدون جواب $\Delta < 0$

● شکل‌ها از ویکی.



● معادله زیر را

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله درجه دوم و یا معادله سهمی می‌نامند.

● روش‌های مختلفی برای حل این معادله وجود دارند؛ ولی، کلی‌ترین روش حل این معادله روش Δ نام دارد. روش Δ : اگر کمیت زیر را

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

در نظر بگیریم آنگاه جواب معادله درجه دوم بالا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

علامت Δ تعداد جواب‌های معادله درجه دوم را تعیین می‌کند.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تمرین

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

توپ A از بالای برجی به ارتفاع 200 m رها شده است (یعنی سرعت اولیه اش صفر است). همزمان، توپ B با سرعت اولیه 8 m/s به سمت بالا پرتاب شده است. الف: زمان و ارتفاعی که این دو توپ به هم می‌رسند را بیابید. ب: کمترین سرعت اولیه توپ B را برای هم ارتفاع شدن دو توپ بیابید.

پاسخ الف: جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مبدا مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ B باشد.

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_A t} + y_{0A} = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t + \cancel{y_B} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

فرض کنید که این دو جسم در لحظه t به ارتفاع یکسان h می‌رسند. در این صورت داریم:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

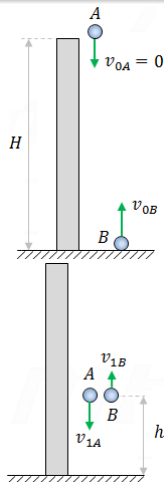
$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

و یا

$$-\frac{1}{2}gt_a^2 + H = -\frac{1}{2}gt_a^2 + v_{0B}t_a \Rightarrow t_a = \frac{H}{v_{0B}} = \frac{200}{8} = 25 \text{ s}$$

همچنین، نقطه هم ارتفاع شدن دو توپ در ارتفاع زیر قرار دارد:

$$h = -\frac{1}{2}gt_a^2 + v_{0B}t_a = 8 \times 25 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (25)^2 = 169.4 \text{ m}$$



شکل از

<http://www.ambrsoft.com/>

تمرین

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

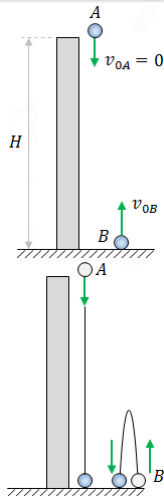
توپ A از بالای برجی به ارتفاع 200 m رها شده است (یعنی سرعت اولیه اش صفر است). همزمان، توپ B با سرعت اولیه 80 m/s به سمت بالا پرتاب شده است. الف: زمان و ارتفاعی که این دو توپ به هم می‌رسند را بیابید. ب: کمترین سرعت اولیه توپ B را برای هم ارتفاع شدن دو توپ بیابید.

پاسخ ب: کمترین سرعت اولیه توپ B وقتی خواهد بود که دو توپ بر روی زمین هم-ارتفاع شوند؛ مانند شکل پایین. در این حالت، زمان پرواز توپ A برابر است با

$$H = \frac{1}{2} g t_b^2 \Rightarrow t_b = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 200}{9.8}} = 6.4 \text{ s}$$

همچنین، بیشترین ارتفاع توپ B در نصف این زمان اتفاق می‌افتد و در آن لحظه سرعت توپ B برابر صفر است:

$$v_{yB} = -g \frac{t_b}{2} + v'_{0B} = 0 \Rightarrow v'_{0B} = g \frac{t_b}{2} = 9.8 \times 3.2 = 31.4 \text{ m/s}$$



شکل از

<http://www.ambrsoft.com/>

تمرین

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

توپ A از بالای یک برج به ارتفاع 300 m و با سرعت اولیه 20 m/s به سمت پایین پرتاب می شود. در همین زمان، توپ دیگری با سرعت اولیه v_{0B} به سمت بالای برج پرتاب می شود. سرعت اولیه v_{0B} را در صورتی که دو توپ در ارتفاع 100 m همدیگر را ملاقات کنند، بیابید. پاسخ: جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می کنیم و فرض می کنیم که مبدا مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ B باشد.

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0A}t + y_{0A} = -\frac{1}{2}gt^2 - 20t + 300$$

$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t + y_{0B} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t$$

در هنگام ملاقات دو توپ، برای توپ اول داریم:

$$100 = -4.9t^2 - 20t + 300 \Rightarrow 9.8t^2 + 40t - 200 = 0$$

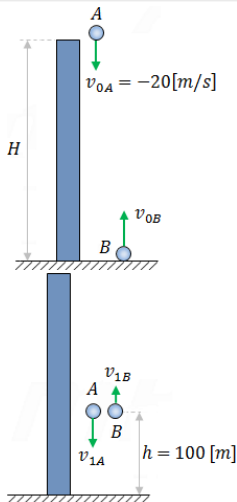
$$t_1 = 4.67, \quad t_2 = -8.75$$

فقط t_1 قابل قبول است (چرا؟). در این زمان برای متحرک B داریم:

$$y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0B}t \quad 100 = -4.9 \times (4.67)^2 + 4.67v_{0B}$$

$$v_{0B} = 44.3 \text{ m/s}$$

از اینجا نتیجه می گیریم:



تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

$$a(t) = -\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t} - 1$$

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = -1 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = 6 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

راهنمایی:

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

$$a(t) = -\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t} - 1$$

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = -1 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

پاسخ الف) برای راحتی در انتگرال گیری، شتاب را با استفاده توان های کسری بازنویسی می کنیم:
حال می توانیم با انتگرال گیری از تابع شتاب، تابع سرعت را به دست آوریم

$$dv = a(t)dt \Rightarrow \int_{-1}^v dv = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \left(-t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{1}{3}} - 1 \right) dt$$

در نتیجه (فراموش نکنیم که $n \neq -1$) $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$

$$[v]_{-1}^v = \left[-\frac{1}{\frac{1}{4}+1} t^{\frac{1}{4}+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} t^{\frac{1}{3}+1} - t \right]_0^t = \left[-\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t \right]_0^t$$

$$v - (-1) = \left[-\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t \right] - \left[-\frac{4}{5} \cdot 0^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} \cdot 0^{\frac{4}{3}} - 0 \right]$$

$$v - (-1) = -\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t - 1 \quad \text{بنابراین}$$

دو چک جواب را پیگیری کنید (شرط اولیه، مشتق گیری).

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

$$a(t) = -\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t} - 1$$

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = -1 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = 6 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

پاسخ ب) از تابع سرعت به دست آمده در اسلاید قبل انتگرال میگیریم تا موقعیت به دست آید:

$$dx = v(t)dt \Rightarrow \int_6^x dx = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} - t - 1 \right) dt$$

بنابراین

$$[x]_6^x = \left[-\frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{5}{4}+1} t^{\frac{5}{4}+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{4}{3}+1} t^{\frac{4}{3}+1} - \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t = \left[-\frac{1}{5} \times \frac{4}{9} t^{\frac{9}{4}} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t$$

$$x-6 = \left[-\frac{16}{45} t^{\frac{9}{4}} + \frac{9}{28} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t = \left[-\frac{16}{45} t^{\frac{9}{4}} + \frac{9}{28} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t \right] - \left[-\frac{16}{45} \cdot \frac{9}{4} + \frac{9}{28} \cdot \frac{7}{3} - \frac{0^2}{2} - 0 \right]$$

و یا

$$x = -\frac{16}{45} t^{\frac{9}{4}} + \frac{9}{28} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t + 6$$

دو چک جواب را پیگیری کنید (شرط اولیه، مشتق گیری).

با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.