

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

بسط متعامد در فضای توابع

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- ۱. بسط متعامد در فضای توابع
- بسط متعامد در فضای توابع
- بسط متعامد در عمل

پایه های متعامد و بهنجار: یکامتعامد

تعامد: اگر ضرب داخلی را مثلاً به صورت مقابل تعریف کنیم

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f^*(s) g(s) ds$$

آنگاه می توان دو تابع را متعامد نامید اگر $\langle f | g \rangle = 0$. در اینصورت حاصلضرب $\langle g | f \rangle$ نیز صفر خواهد شد.

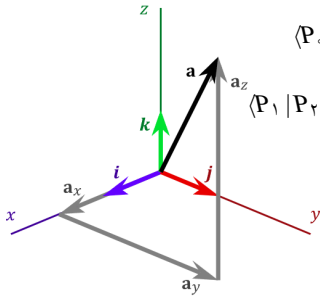
مثال: سه چندجمله ای اول لژاندر به صورت $P_0(s) = 1$ و $P_1(s) = s$ و $P_2(s) = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ را به یاد آورید. در اینصورت به راحتی می توان ثابت کرد که این توابع دو به دو بر هم عمودند. در واقع قبلاً تعامد دو تابع $P_0(s)$ و $P_2(s)$ را نشان داده ایم. همچنین، به راحتی می توان دید:

$$\langle P_0 | P_1 \rangle = \int_{-1}^1 P_0^*(s) P_1(s) ds = \int_{-1}^1 s ds = 0$$

$$\langle P_1 | P_2 \rangle = \int_{-1}^1 P_1^*(s) P_2(s) ds = \int_{-1}^1 s \left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2} \right) ds = 0$$

بهنجاری: یک تابع را بهنجار می نامند اگر اندازه (نرم)

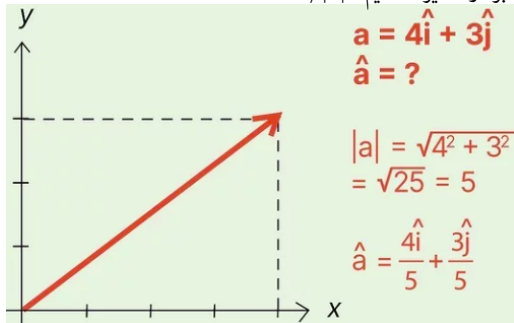
آن برابر یک باشد $\langle f | f \rangle = 1$. در فضای توابع این وضعیت شبیه به طول واحد بردارهای $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ در جبر بردارهاست.



پایه های متعامد و بهنجار: یکامتعامد

پایه های یکامتعامد: در محاسبات مربوط به فضاها برداری، به ویژه کاربردهای این نظریه در فیزیک، متوجه خواهیم شد که کار کردن با پایه های بهنجار و دو به دو متعامد بسیار راحت تر است. چنین پایه هایی را یکامتعامد (orthonormal) می نامند.

دقت کنید که اگر تابع f بهنجار نباشد، آنگاه همیشه می توان تابع جدید $\bar{f} = f / \sqrt{\langle f | f \rangle}$ را تعریف کرد که بهنجار است. این عملیات اصلاً تعامد بردارها را تغییر نخواهد داد. بنابراین، اگر توابع f ، g و ... متعامد باشند ولی بهنجار نباشند، همیشه می توان از آنها پایه های یکامتعامد را ساخت. همین وضعیت را در مبحث بردارها نیز داشتیم $\hat{a} = \vec{a} / |\vec{a}|$



بسط متعامد

- همانطور که گفته شد، اگر پایه های انتخاب شده یکا متعامد باشند، ضرایب بسط یک تابع بسیار ساده تر خواهند شد. مورد دو بعدی بسط تابع $f(s)$ با استفاده از توابع پایه یکا متعامد φ_1 و φ_2 را در نظر بگیرید. با ضرب داخلی φ_1 و $f(s)$ داریم:

$$\langle \varphi_1 | f \rangle = \langle \varphi_1 | (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2) \rangle = a_1 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle + a_2 \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$$

یکا متعامد توابع پایه φ_1 و φ_2 اینجا به کار می آید: حاصلضرب داخلی $\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle$ برابر یک است (شرط بهنجاری) و حاصلضرب داخلی $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$ نیز برابر صفر است (شرط تعامد)؛ در نتیجه به راحتی داریم $a_1 = \langle \varphi_1 | f \rangle$. به همین ترتیب به راحتی می توان ثابت کرد $a_2 = \langle \varphi_2 | f \rangle$.

- در واقع اگر پایه های فضا یکا متعامد باشند $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ ، ضرایب بسط به راحتی به صورت مقابل به دست می آیند. If $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ and $f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$, then $a_i = \langle \varphi_i | f \rangle$.
یادآوری: دلتای کرونکر δ_{ij} برابر یک است اگر $i = j$ و در غیر اینصورت صفر است.

- اگر توابع φ_i متعامد باشند ولی بهنجار نباشند، آنگاه ضرایب بسط به صورت زیر به دست می آیند: If the φ_i are orthogonal and $f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$, then $a_i = \frac{\langle \varphi_i | f \rangle}{\langle \varphi_i | \varphi_i \rangle}$.
این بسط وقتی مفید است که ضرایب بهنجارش پیچیده هستند و پیدا کردن آنها دردسرساز است.

مثالی از بسط بر حسب توابع یکا متعامد

- توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ برای مقادیر طبیعی $n = 1, 2, 3, \dots$ را در نظر بگیرید که متغیر x در بازه $0 \leq x \leq \pi$ تعریف شده است. همچنین ضرب داخلی به صورت زیر معرفی می شود:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\pi} f^*(x) g(x) dx$$

تمرین:

الف) آیا توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ به ازای مقادیر مختلف n متعامد هستند؟ب) آیا توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ بهنجار هستند؟پ) تابع $(\pi - x)^2$ را بر حسب توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ بسط دهید.

مثالی از بسط بر حسب توابع یکا متعامد

- توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ برای مقادیر طبیعی $n = 1, 2, 3, \dots$ را در نظر بگیرید که متغیر x در بازه $0 \leq x \leq \pi$ تعریف شده است. همچنین ضرب داخلی به صورت زیر معرفی می شود:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\pi} f^*(x) g(x) dx$$

- الف) آیا توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ به ازای مقادیر مختلف n متعامد هستند؟ بله. ضرب داخلی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_{nm} = \int_0^{\pi} \chi_n^*(x) \chi_m(x) dx = \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx$$

$$S_{nm} = \frac{n \sin(\pi m) \cos(\pi n) - m \cos(\pi m) \sin(\pi n)}{m^2 - n^2} = 0 \quad n \neq m \quad \text{تمرین:}$$

- ب) آیا توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ بهنجار هستند؟ خیر. در این مورد باید مقدار S_{nn} را بیابیم و خواهیم دید که این مقدار غیر ۱ است: $S_{nn} = \int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2}$

پس توابع χ_n بهنجار نیستند؛ ولی می توان با تقسیم این توابع بر $\sqrt{\pi/2}$ آنها را بهنجار کرد:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثالی از بسط برحسب توابع یکا متعامد

- توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ برای مقادیر طبیعی $n = 1, 2, 3, \dots$ را در نظر بگیرید که متغیر x در بازه $0 \leq x \leq \pi$ تعریف شده است. همچنین ضرب داخلی به صورت زیر معرفی می شود:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\pi} f^*(x) g(x) dx$$

پ) تابع $x^2 (\pi - x)$ را بر حسب توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ بسط دهید. برای بسط این تابع باید ضرایب بسط را از فرمول آن به دست آوریم:

$$a_n = \langle \varphi_n | x^2 (\pi - x) \rangle = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\pi} (\sin nx) x^2 (\pi - x) dx,$$

این انتگرال ها را می توان به صورت تحلیلی و یا به وسیله ماشین محاسبه کرد. کد متمتیکای زیر را ببینید:

```
In[1]:= Table[Sqrt[2 / Pi] NIntegrate[(x ^ 2) * (Pi - x) * Sin[n * x], {x, 0, Pi}], {n, 1, 8}]
Out[1]= {5.01326, -1.87997, 0.185676, -0.234996, 0.0401061, -0.0696286, 0.0146159, -0.0293746}
```

سپس می توانیم تابع $x^2 (\pi - x)$ را به صورت زیر بسط دهیم.

$$x^2 (\pi - x) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

مثالی از بسط برحسب توابع یکا متعامد

- توابع $\chi_n(x) = \sin nx$ برای مقادیر طبیعی $n = 1, 2, 3, \dots$ را در نظر بگیرید که متغیر x در بازه $0 \leq x \leq \pi$ تعریف شده است. همچنین ضرب داخلی به صورت زیر معرفی می شود:

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{\pi} f^*(x)g(x)dx$$

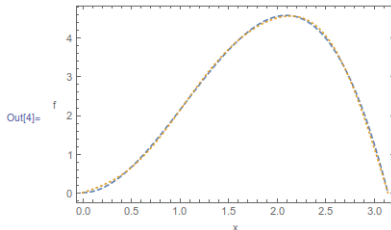
توافق تابع $x^2 (\pi - x)$ و بسط آن، حتی تا جمله $n = 5$ ، بسیار خیره کننده است.

```
In[1]:= an = Table[Sqrt[2 / Pi] NIntegrate[(x ^ 2) * (Pi - x) * Sin[n * x], {x, 0, Pi}], {n, 1, 5}];
```

```
In[2]:= f1[x_] := (x ^ 2) * (Pi - x)
```

```
In[3]:= f2[x_] := Sqrt[2 / Pi] Sum[an[[i]] * Sin[i * x], {i, 1, 5}]
```

```
In[4]:= Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, 0, Pi}, PlotStyle -> {Dashed, Dotted}, Frame -> True, FrameLabel -> {"x", Rotate
```



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید بسط متعامد در فضای توابع و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از تعامد دو تابع چیست؟
- ۲ منظور از بهنجاری یک تابع چیست؟
- ۳ منظور از یکامتعامد بودن توابع پایه چیست؟
- ۴ منظور از بسط متعامد یک تابع چیست؟
- ۵ چرا در بسط متعامد یک تابع ترجیح می دهیم از توابع پایه یکامتعامد استفاده کنیم؟
- ۶ اگر پایه ها بهنجار نباشند، چطور می توان آنها را بهنجار کرد.
- ۷ در بسط متعامد توابع، چطور می توان ضرایب بسط را یافت؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

- توابع $\chi_n(x) = \cos nx$ برای مقادیر طبیعی $n = 1, 2, 3, \dots$ را در نظر بگیرید که متغیر x در بازه $0 \leq x \leq \pi$ تعریف شده است. همچنین ضرب داخلی به صورت زیر معرفی می شود:

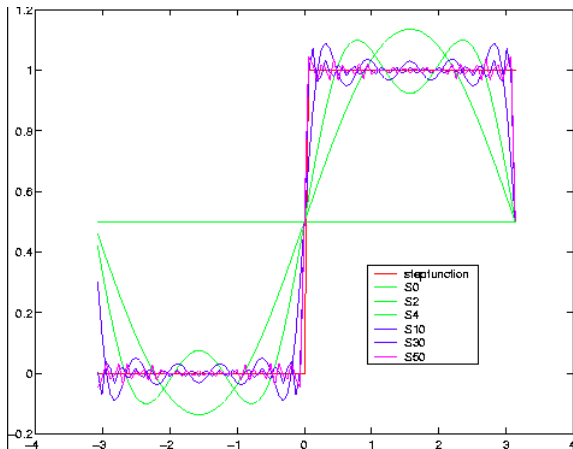
$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\pi} f^*(x) g(x) dx$$

تمرین:

الف) آیا توابع $\chi_n(x) = \cos nx$ به ازای مقادیر مختلف n متعامد هستند؟ب) آیا توابع $\chi_n(x) = \cos nx$ بهنجار هستند؟پ) تابع $(\pi - x)^2$ را بر حسب توابع $\chi_n(x) = \cos nx$ بسط دهید.ت) تابع $1 - x + 2x^2 - 3x^3$ را بر حسب توابع $\chi_n(x) = \cos nx$ بسط دهید.

مبحث بعدی: رابطه بسط توابع و ضرب داخلی

• در جلسه بعد رابطه بسط توابع و ضرب داخلی را بررسی خواهیم کرد.



منابع

- ➊ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ➋ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ➌ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ➍ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ➎ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ➏ <https://math.libretexts.org/>
- ➐ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

