

مساله ویژه مقداری و کاربردهای آن

یک مثال ساده از مساله ویژه مقداری

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

یک مثال ساده از مساله ویژه مقداری
پدیدار شدن معادله ویژه مقداری در یک مثال ساده



حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

- ظرف بیضی شکل (دوره ساسانیان، قرن هفتم میلادی، ایران، نگهداری در موزه متروپولیتن، نیویورک) زیر را در نظر بگیرید.



- ذره ای را در این ظرف بیضی شکل رها می کنیم. مسیر چنین حرکتی طبیعتاً بسیار پیچیده است. ولی ما می خواهیم مسیرهایی را بیابیم که ذره به سمت کمینه چاه پتانسیل ظرف حرکت می کند و یک حرکت نوسانی ساده را به وجود می آورد. آیا چنین حرکتی وجود دارد؟

حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

● فرض کنید که پتانسیل این ظرف با رابطه زیر داده می شود

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

که در آن a ، b و c ثوابت پتانسیل اند و $x = y = 0$ نقطه کمینه پتانسیل در مرکز ظرف است. نیروی وارده به ذره به صورت زیر داده می شود.

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2ax - by, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -bx - 2cy$$

اگر داشته باشیم $F_x/F_y = x/y$ ، آنگاه نیروها به سمت کمینه پتانسیل در نقطه $(0, 0)$ خواهند بود. هرچند، واضح است که در اکثر نقاط ظرف چنین شرطی برقرار نیست.

● ما به دنبال جهتی برای رهاکردن ذره هستیم، به طوری که نیروها به سمت نقطه کمینه $(0, 0)$ باشند. برای اینکار معادلات بالا را به صورت ماتریسی زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -b \\ -b & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad \mathbf{f} = \mathbf{H}\mathbf{r}$$

حالا شرط $F_x/F_y = x/y$ معادل است با اینکه بردارهای $\vec{f}$ و $\vec{r}$ ضریبی از همدیگر باشند؛ به عبارت دیگر اگر λ یک ثابت باشد داریم:

$$\mathbf{H}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$$

حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

- معادله بالا را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد که در آن $\mathbf{1}$ یک ماتریس همانی است (با ابعاد معادل H)

$$(H - \lambda \mathbf{1})\mathbf{r} = 0.$$

- در مبحث ماتریس و دترمینان آموختیم که این معادله یک جواب یکتا و بدیهی $\vec{r} = \vec{0}$ دارد، مگر اینکه شرط $\det(H - \lambda \mathbf{1}) = 0$ برقرار باشد. این شرط معادل است با

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

- این معادله را معادله سده ای (secular equation) می نامند که از مکانیک سماوی می آید. دترمینان بالا معادل است با

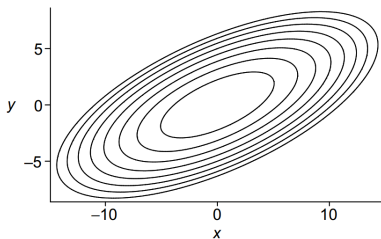
$$(h_{11} - \lambda)(h_{22} - \lambda) - h_{12}h_{21} = 0,$$

- که آن را معادله مشخصه (characteristic equation) نیز می نامند.

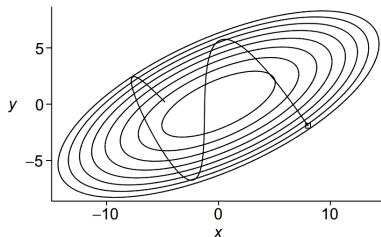
- پس از آن که مقدری از λ از معادله بالا به دست آمد، می توان به دستگاه معادلات همگن بازگشت و آن را برای بردار $\vec{r}$ حل کرد. این فرایند را می توان برای همه مقادیر λ که جواب های معادله سده ای هستند تکرار کرد و بدین ترتیب مجموعه ای از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر به دست آورد.

حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

خطوط هم‌پتانسیل چاه پتانسیل ظرف را ببینید.



مسیر حرکت یک ذره به جرم واحد که از نقطه $(\frac{1}{\omega}, -1/2)$ آغاز شده است را ببینید.



حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

- حالا فرض کنید که $a = 1$, $b = -\sqrt{5}$ و $c = 3$. بنابراین داریم

$$H = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 \end{pmatrix},$$

و معادله سده ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0.$$

چندجمله ای مشخصه را می توان به شکل زیر نوشت

$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = (\lambda + 1)(\lambda + 7)$$

که جواب های آن $\lambda = -1$ و $\lambda = -7$ می باشد. این ها ویژه مقادیر مساله می باشند.

- برای پیدا کردن ویژه بردارها در ابتدا $\lambda = -1$ را در دستگاه همگن قرار می دهیم.

$$(H - \lambda \mathbf{1})\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 - (-1) & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$-x + \sqrt{5}y = 0$$

که معادل است با

$$\sqrt{5}x - 5y = 0.$$

تمرین: جواب های این دستگاه همگن و وابسته خطی را بیابید.

حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

● دستگاه زیر یک دستگاه وابسته خطی است

$$-x + \sqrt{5}y = 0$$

$$\sqrt{5}x - 5y = 0.$$

در واقع اگر دستگاه به دست آمده مستقل خطی می بود، آنگاه ما حتما به جواب بدیهی $x = 0$ می رسیدیم (که مد نظر ما نیست).

● از هر کدام از معادلات بالا می توان یافت $x = \sqrt{5}y$. بنابراین جواب ویژه برداری معادله بالا به صورت زیر است

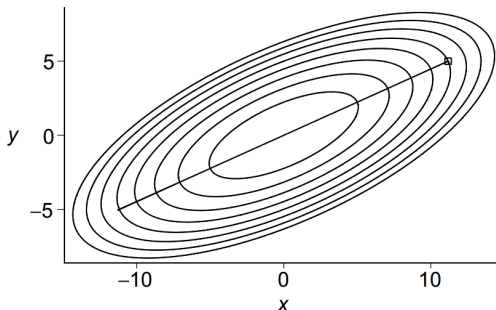
$$\lambda_1 = -1, \quad \mathbf{r}_1 = C \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

که در آن C ثابتی است که می تواند هر مقداری اختیار کند.

● در نتیجه، تعداد نامتناهی زوج های (x, y) وجود دارد که یک جهت را در فضای دوبعدی تعریف می کنند، در حالی که اندازه جابه جایی در آن جهت دلخواه است. دلخواه بودن مقیاس پیامد طبیعی همگن بودن دستگاه معادلات است؛ هر مضربی از یک جواب دستگاه معادلات خطی همگن نیز خود یک جواب خواهد بود. این بردار ویژه متناظر با مسیرهایی است که از ذره ای که در هر نقطه ای روی خط تعریف شده توسط $\vec{r}_1$ در حال سکون است، آغاز می شوند.

حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

نمونه‌ای از چنین مسیری را در شکل زیر ببینید.



با در نظر گرفتن $\lambda = -7$ نیز داریم

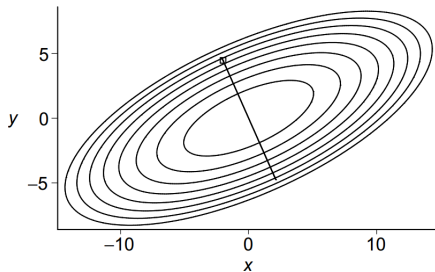
$$(H - \lambda I)\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2+7 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

که از آن داریم $y = -x\sqrt{5}$ و در نتیجه

$$\lambda_2 = -7, \quad \mathbf{r}_2 = C' \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

حرکت ذره در یک ظرف بیضی شکل

نمونه‌ای از چنین مسیری را در شکل زیر ببینید.



پس معلوم شد که دو مسیر متعامد غیر بدیهی در جهت های

$$\frac{dy}{dx} = 1/\sqrt{5} \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{5}$$

برای طی یک حرکت نوسانی ساده وجود دارند که در امتداد قطر بزرگ و کوچک بیضی اند.

چک کردن درستی جواب مساله ویژه مقداری همیشه ممکن و ساده است:

$$\mathbf{H}\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\sqrt{5} \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} C\sqrt{5} \\ C \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{r}_1$$

بهنجار سازی جواب ها

- اغلب مفید است که بردارهای ویژه را نرمال سازی کنیم؛ این کار را می توان با انتخاب ثابت C یا C' به گونه ای انجام داد که بردار $\vec{r}$ دارای اندازه واحد شود. در مثال حاضر مثلاً داریم:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C^2(5 + 1) = 1 \quad C = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C'^2(1 + 5) = 1 \quad C' = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

و در نتیجه ویژه بردارهای یافت شده به صورت زیر بهنجار می شوند:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5/6} \\ \sqrt{1/6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1/6} \\ \sqrt{5/6} \end{pmatrix}$$

- تمرین: نشان دهید که $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ بر هم عمودند.

- با ضرب هر کدام از ویژه بردارهای بالا در هر ضریب (حقیقی و یا مختلط) می توان باز هم یک ویژه بردار ساخت؛ یعنی ضریب C همیشه دلخواه است. ولی با اعمال شرط بهنجاری می توان این آزادی در ضریب را کنترل کرد.

- چند نکته مهم در زمینه مساله ویژه مقداری در ادامه آمده اند.

چند نکته مهم درباره جواب های مساله ویژه مقداری

- چند نکته مهم درباره جواب های مساله ویژه مقداری را در ادامه جمعبندی می کنیم:
- تعداد ویژه مقادارها برابر است با ابعاد ماتریس H . این البته نتیجه قضیه اساسی جبر است: هر معادله چندجمله ای درجه n فقط n ریشه دارد (شامل ریشه های تکراری).
- در این مثال خاص ریشه ها حقیقی به دست آمدند؛ ولی معادله سده ای می تواند ریشه های مختلط نیز داشته باشد.
- دو ویژه بردار یافت شده بر هم عمود هستند.
- بعدا به این سه نکته برمی گردیم.

تفسیر فیزیکی جواب پیدا شده

● جواب های پیدا شده بالا را می توان به راحتی به صورت فیزیکی تفسیر کرد. در واقع جهت هایی که در آن ها جابه جایی و نیرو هم خط هستند، یعنی $\vec{F} \propto \vec{r}$ ، جهت های تقارن میدان پتانسیل بیضوی را تشکیل می دهند و با مقادیر ویژه متفاوتی (ثابت تناسب میان مکان و نیرو یعنی λ) متناظرند، زیرا بیضی ها محورهایی با طول های متفاوت دارند. در واقع، ما محورهای اصلی حوضه پتانسیل خود را شناسایی کرده ایم. با پارامترهای $a = 1$ ، $b = -\sqrt{5}$ و $c = 3$ که ما

برای مثال بالا انتخاب کردیم، می توان پتانسیل کلی

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

را به شکل مقابل بازنویسی کرد، $V = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}x + y}{\sqrt{6}} \right)^2 + \frac{7}{2} \left(\frac{x - \sqrt{5}y}{\sqrt{6}} \right)^2 = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{7}{2}(y')^2$.

این رابطه نشان می دهد پتانسیل V به دو جمله درجه دوم تجزیه می شود که هر یک به کمیتی درون پراتنز (یک مختصه جدید) وابسته است؛ مختصه ای که متناسب با یکی از بردارهای ویژه ماست. مختصات جدید با یک دوران که توسط یک تبدیل یکه ای U توصیف می شود، به مختصات اولیه x و y مرتبط هستند.

$$U^T = \begin{pmatrix} \sqrt{5/6} & \sqrt{1/6} \\ \sqrt{1/6} & -\sqrt{5/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{5}x + y)/\sqrt{6} \\ (x - \sqrt{5}y)/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

در نهایت، یادآور می شویم که وقتی نیرو را در دستگاه مختصات پرایم دار محاسبه می کنیم، به دست

$$F_{x'} = -x', \quad F_{y'} = -7y'$$

می آوریم که

که مطابق با ویژه مقادیری است که پیشتر یافته ایم.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید معادلات ویژه مقداری و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

تلاش کنید مسائل ویژه مقداری را در کتاب های فیزیکی یافته و روش حل آنها را با روش بالا مقایسه کنید. چه شباهتها و تفاوت هایی می بینید؟



اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

● برای ماتریس های داده شده در سطر سوم، ویژه مقادیر و ویژه بردارها را یافته و آنها را با سطرهای پنجم و هشتم مقایسه کنید.

Eigenvalues of geometric transformations

	Scaling	Unequal scaling	Rotation	Horizontal shear	Hyperbolic rotation
Illustration					
Matrix	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}$
Characteristic polynomial	$(\lambda - k)^2$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$	$\lambda^2 - 2 \cos(\theta)\lambda + 1$	$(\lambda - 1)^2$	$\lambda^2 - 2 \cosh(\varphi)\lambda + 1$
Eigenvalues, λ_i	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1$ $\lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = e^{i\theta}$ $= \cos \theta + i \sin \theta$ $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ $= \cos \theta - i \sin \theta$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = e^{\varphi}$ $= \cosh \varphi + \sinh \varphi$ $\lambda_2 = e^{-\varphi}$ $= \cosh \varphi - \sinh \varphi$
Algebraic mult., $\mu_i = \mu(\lambda_i)$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$
Geometric mult., $\gamma_i = \gamma(\lambda_i)$	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$
Eigenvectors	All nonzero vectors	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +i \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

مبحث بعدی: مساله ویژه مقدراری برای یک ماتریس 3×3

- در جلسه بعد با یک مثال ساده بررسی معادلات ویژه مقدار ماتریسی را شروع خواهیم کرد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

منابع

- 1 Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- 2 Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- 3 Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- 4 Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- 5 Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- 6 <https://math.libretexts.org/>
- 7 <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

