

# فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

## هشتمین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



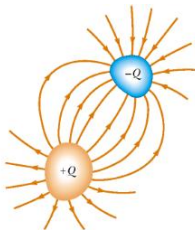
دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار ۱۴۰۰ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
  - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- [h.shenavar@gmail.com](mailto:h.shenavar@gmail.com)
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

## ۱ هشتمین جلسه حل تمرین

- یادآوری از خازن و ظرفیت
- مدار

## یادآوری: ظرفیت خازن



شکل از مبانی هالیدی.

خازن انرژی الکتریکی را در خود ذخیره می کند.

ظرفیت خازن  $C$  : میزان باری که خازن در یک اختلاف پتانسیل مشخص  $\Delta V$  ذخیره می کند:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$C$  : Capacitor

ظرفیت خازن مستقل از بار الکتریکی و یا اختلاف پتانسیل دو سر خازن است!

ظرفیت خازن فقط به هندسه و نوع ماده دی الکتریک خازن ربط دارد.

واحد ظرفیت  $F = C/V$  است که آن را فاراد می نامیم. واحد های معمول ظرفیت:

$$\mu F = 10^{-6} F$$

$$n F = 10^{-9} F$$

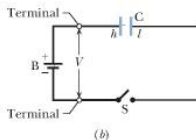
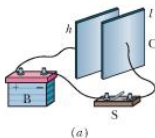
$$p F = 10^{-12} F$$

انرژی ذخیره شده در خازن:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} q \Delta V$$

حضور ماده دی الکتریک در بین صفحات خازن، ظرفیت خازن را به اندازه  $\kappa_e$  (ظریف دی الکتریک ماده) افزایش می دهد.

# روش عمومی محاسبه ظرفیت خازن



شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

نکته: نتیجه به دست آمده برای اختلاف پتانسیل  $\Delta V$  حتما به بار الکتریکی  $q$  ربط خواهد داشت. بنابراین در مرحله سوم اثری از  $\Delta V$  و  $q$  در ظرفیت خازن باقی نمی ماند. در نتیجه ظرفیت خازن فقط به هندسه و نوع ماده دی الکتریک خازن ربط خواهد داشت.

به مثال های زیر دقت کنید ↓↓↓↓ .

میدان الکتریکی بین دو خازن را با استفاده از قانون گوس

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

به دست آورید.

از میدان به دست آمده در قسمت قبل استفاده کرده و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن را با استفاده از رابطه

$$\Delta V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

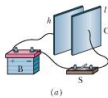
به دست آورید. قرارداد  $\int_+^-$  به دلیل مثبت بودن ظرفیت انتخاب شده است.

از اختلاف پتانسیل به دست آمده در قسمت قبل استفاده کنید و با استفاده از تعریف زیر

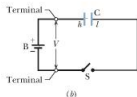
$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

ظرفیت را محاسبه کنید.

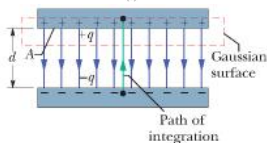
## مثال: ظرفیت خازن تخت



(a)



(b)



اجازه می دهیم خازن پر شود ( شکل مقابل، بالا).

میدان الکتریکی بین دو خازن را با استفاده از قانون گوس  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$  به دست

می آوریم  $E_+ = E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  بنابراین

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

که در آن  $\sigma = q/A$  چگالی سطحی بار روی هرکدام از دو صفحه است.

از میدان به دست آمده در قسمت قبل استفاده کرده و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن را با استفاده از رابطه

$$\Delta V = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- E ds \cos 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^d ds = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{qd}{A\epsilon_0}$$

به دست می آوریم.

از اختلاف پتانسیل به دست آمده در قسمت قبل استفاده می کنیم و با استفاده از تعریف زیر

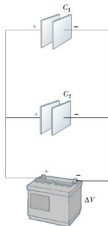
$$C \equiv \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{qd}{A\epsilon_0}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

ظرفیت را محاسبه می کنیم.

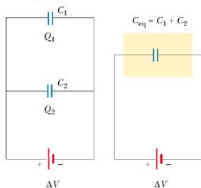
شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی.

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{ظرفیت خازن تخت:}$$

# به هم بستن موازی خازن ها



$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$



سوال: چه خازنی را در مدار به جای ترکیب موازی  $C_1$  و  $C_2$  قرار دهیم تا بتواند به اندازه این دو ظرفیت داشته باشد؟

**نکته بسیار مهم:** به شکل دقت کنید. در خازن های موازی همیشه صفحات همنام به هم متصل هستند. این را به عنوان علامت خازن های موازی به یاد داشته باشید.

اختلاف پتانسیل دوسر خازن های موازی با هم برابر است. اختلاف پتانسیل دوسر خازن معادل هم باید همین مقدار را داشته باشد:  $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$ .

بار کل ذخیره شده در دو خازن برابر است با:  $Q = Q_1 + Q_2$ .  
همین مقدار بار باید در خازن معادل هم ذخیره شده باشد.

از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$C \Delta V = C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2$$

ولی از طرفی داریم  $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$ . بنابراین به نتیجه مهم زیر می رسم:

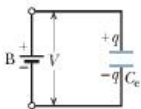
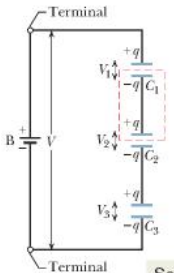
$$C = C_1 + C_2$$

در حالت کلی برای تعداد زیادی خازن موازی داریم:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots = \sum_i C_i$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی.

## به هم بستن متوالی خازن ها



سوال: چه خازنی را در مدار به جای ترکیب متوالی  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  قرار دهیم تا بتواند به اندازه این سه ظرفیت داشته باشد؟

**نکته بسیار مهم:** به شکل دقت کنید. در خازن های متوالی همیشه صفحات غیر همانام به هم متصل هستند. این را به عنوان علامت خازن های متوالی به یاد داشته باشید.

بار دوسر خازن های متوالی با هم برابر است. چرا؟! بنابراین بار دوسر خازن معادل هم باید همین مقدار را داشته باشد:  $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ .

اختلاف پتانسیل کل دو سر مدار برابر است با:  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$ . همین مقدار اختلاف پتانسیل باید در دوسر خازن معادل هم برقرار باشد.

از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

ولی از طرفی داریم  $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ . بنابراین به نتیجه مهم زیر می رسم:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

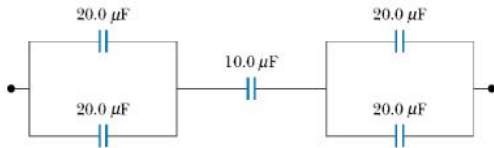
در حالت کلی برای تعداد زیادی خازن متوالی داریم:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی.

## تمرین

خازن معادل این مجموعه را بیابید.



پاسخ: دو خازن سمت چپ و همچنین دو خازن سمت راست موازی هستند؛ بنابراین

$$C_L = 20\ \mu F + 20\ \mu F = 40\ \mu F \quad C_R = 20\ \mu F + 20\ \mu F = 40\ \mu F$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

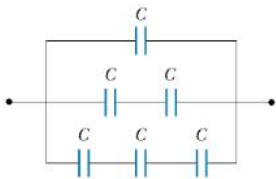
حال خازن های  $C_L$ ،  $10\ \mu F$  و  $C_R$  با هم به صورت متوالی بسته شده اند؛ بنابراین

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_L} + \frac{1}{10} + \frac{1}{C_R} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1+4+1}{40} = \frac{3}{20}$$

$$C = \frac{20}{3}\ \mu F$$

## تمرین



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

در شکل مقابل خازن معادل را بر حسب  $C$  بیابید.  
پاسخ: دو خازن وسط با هم متوالی اند؛ بنابراین خازن معادل دو خازن وسطی برابر است با

$$\frac{1}{C_m} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \Rightarrow C_m = \frac{C}{2}$$

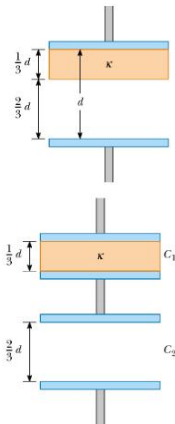
به همین ترتیب، سه خازن پایین با هم متوالی اند؛ بنابراین خازن معادل سه خازن پایینی برابر است با

$$\frac{1}{C_b} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C} \Rightarrow C_b = \frac{C}{3}$$

حال هر سه خازن بالایی، وسطی  $C_m$  و پایینی  $C_b$  با هم موازی اند؛ بنابراین:

$$C_T = C + C_m + C_b = C + \frac{C}{2} + \frac{C}{3} = \frac{11}{6}C$$

# مثال: اثر یک قطعه دی الکتریک درون خازن بر ظرفیت آن



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی.

قطعه ای دی الکتریک به ضخامت  $d/3$  و ضریب دی الکتریک  $\kappa$  را درون خازنی به ضخامت  $d$  قرار می دهیم. ظرفیت خازن در این حالت را بیابید.

پاسخ: خازن جدید را می توان به صورت مجموعه ای از دو خازن به ضخامت  $d/3$ ، به ظرفیت  $\kappa \epsilon_0 A/(d/3)$  و دیگری به ضخامت  $2d/3$ ، به ظرفیت  $\epsilon_0 A/(2d/3)$  که به صورت متوالی به هم بسته شده اند در نظر گرفت. شکل پایین را ببینید.

چرا متوالی؟ جواب این سوال را با رسم دقیق بارها برای خود تحلیل کنید.

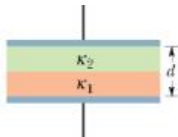
بنابراین خازن معادل برابر است با

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\kappa \epsilon_0 A/(d/3)} + \frac{1}{\epsilon_0 A/(2d/3)}$$

$$\Rightarrow C = \left( \frac{3\kappa}{2\kappa + 1} \right) \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

لطفا دقت کنید که در حالت  $\kappa = 1$  به نتیجه مربوط به خازن تخت در خلاء می رسمیم که قابل انتظار است.

## این تمرین هم مشابه مثال بالاست.

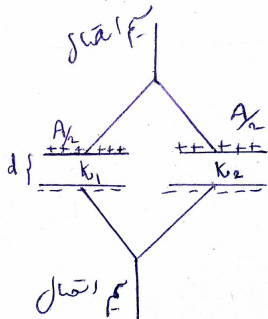
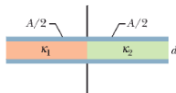


شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

خازن معادل:  
یک خازن تخت با مساحت  $A$  و فاصله صفحات  $d$  با دو نوع ماده ی دی الکتریک با ثابت های دی الکتریک  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  به صورت مقابل پر شده است. الف) استدلال کنید که این خازن را می توان به صورت دو خازن موازی فرض کرد و یا متوالی؟ ب) ظرفیت این خازن را بدست آورید.

این دو خازن متوالی اند.

## تمرین



شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

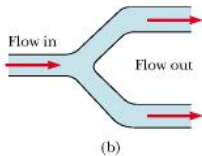
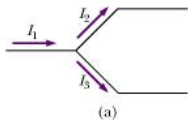
خازن معادل:  
یک خازن تخت با مساحت  $A$  و فاصله صفحات  $d$  با دو نوع ماده ی دی الکتریک با ثابت های دی الکتریک  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  به صورت مقابل پر شده است. الف) استدلال کنید که این خازن را می توان به صورت دو خازن موازی فرض کرد و یا متوالی؟ ب) ظرفیت این خازن را بدست آورید.  
پاسخ الف: این ترکیب را باید به صورت دو خازن موازی در نظر گرفت زیرا صفحات همنام به هم متصل هستند ( شکل پایین).  
مساحت صفحات هرکدام از دو خازن برابر  $A/2$  می باشد؛ بنابراین:

$$C = \kappa_1 \epsilon_0 \frac{A/2}{d} + \kappa_2 \epsilon_0 \frac{A/2}{d}$$

و یا

$$C = \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

## قوانین کیرشهوف



شکل از مبانی فیزیک.

قانون اول کیرشهوف: جمع جبری جریان های ورودی و خروجی به یک گره، در هر لحظه، برابر صفر است.  
این قانون نتیجه ای از پایدگی بار الکتریکی است:

$$\sum_j q_j = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j q_j = 0 \Rightarrow \sum_j i_j = 0$$

مثلا در شکل بالا داریم:  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

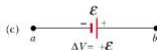
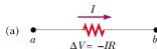
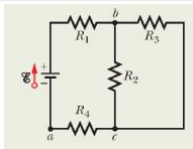
قانون دوم کیرشهوف: جمع جبری اختلاف پتانسیل ها در یک حلقه بسته برابر صفر است.  
قانون دوم کیرشهوف نتیجه پایدگی انرژی است:

$$\sum_j dW_j = 0 \Rightarrow \sum_j dq V_j = 0 \Rightarrow \sum_j V_j = 0$$

برای فهم و استفاده درست از قوانین کیرشهوف باید مفاهیمی مانند گره، حلقه، شاخه و ... را بهتر بشناسیم و بعضی قراردادهای مشخص در نوشتن این قوانین را رعایت کنیم.

- Kirchhoff's current law: KCL
- Kirchhoff's voltage law: KVL

# مفاهیم و قراردادهای استفاده از قوانین کیرشهوف



شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی.

گره: محل اتصال دو یا چند شاخه است. مثل نقاط  $b$  و  $c$  در شکل مقابل.

حلقه: هر مسیر بسته در مدار را یک حلقه می نامیم. مثل مسیر  $abca$  در شکل مقابل.

قرارداد اول: در حالت کلی، جریان از شاخه ای به شاخه دیگر تغییر خواهد کرد. بنابراین، در هر شاخه مدار جهت مشخصی را برای جریان در نظر بگیرید. جهت انتخاب شده هیچ تاثیری در جواب نهایی نخواهد داشت؛ اگر مقدار جریان منفی به دست آمد به این معنی است که جهت اصلی در خلاف جهت انتخابی است؛ هر چند مقدار به دست آمده برای جریان در هر صورت درست خواهد بود.

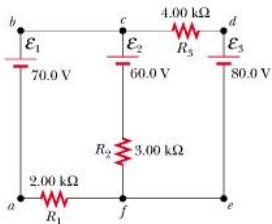
قرارداد دوم: اگر در جهت جریان از مقاومت عبور کردید، در قانون دوم کیرشهوف به اندازه  $-iR$  پتانسیل را کاهش دهید. اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت عبور کردید، در قانون دوم کیرشهوف به اندازه  $+iR$  پتانسیل را افزایش دهید. شکل های  $(a)$  و  $(b)$  را ببینید.

قرارداد سوم: اگر از سر منفی به سر مثبت باتری عبور کردید، در قانون دوم کیرشهوف پتانسیل را به اندازه  $\mathcal{E}$  افزایش و در غیر این صورت کاهش دهید. شکل های  $(c)$  و  $(d)$  را ببینید. دقت کنید که این قرارداد به جهت جریان ربطی ندارد! چرا؟

تعداد معادلات فراهم شده توسط قوانین کیرشهوف همیشه برابر با تعداد مجهولات مساله خواهد بود. بنابراین، در انتها باید یک دستگاه چند معادله-چند مجهول را حل کنیم.

## تمرین

حل مدار:

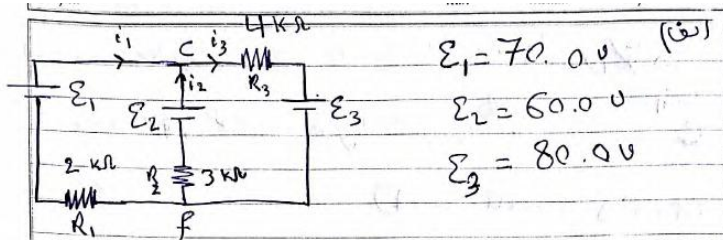


شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

الف) جریان را در هر سه شاخه مدار بیابید.

ب) توان های تولید شده ( و یا ذخیره شده ) در باتری ها و مصرف شده در مقاومت ها را یافته و پایداری انرژی را نشان دهید.

## پاسخ



$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_2 = i_3 \quad : \text{KCL} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -i_1 R_1 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 = 0 \\ -i_2 R_2 + \mathcal{E}_2 - i_3 R_3 - \mathcal{E}_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{KVL}$$

$i_3$  را از معادله اول در دو معادله دیگر جایگزین می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} -i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_2 R_2 + (i_1 + i_2) R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \rightarrow (R_2 + R_3) i_2 + i_1 R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \end{array} \right.$$

## پاسخ

$$\begin{cases} -2000 i_1 + 3000 i_2 = 60 - 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3000 + 4000) i_2 + 4000 i_1 = 600 - 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2 i_1 + 3 i_2 = -10 \times 10^{-3}) \times 2 \\ 7 i_2 + 4 i_1 = -20 \times 10^{-3} \end{cases}$$

طریق را به اول را در 2  
ضرب کنیم تا  $i_1$  حذف شود

$$\begin{cases} -4 i_1 + 6 i_2 = -20 \times 10^{-3} \\ 4 i_1 + 7 i_2 = -20 \times 10^{-3} \end{cases}$$

$$13 i_2 = -40 \times 10^{-3} \rightarrow i_2 = \frac{-40}{13} \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$i_2 = -3.08 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$i_1 = \frac{3 i_2 + 10 \times 10^{-3}}{2} = 3.85 \times 10^{-4} \text{ A}$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = -2.69 \times 10^{-3} \text{ A}$$

Pasha

## پاسخ

$$P_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 I_1 = \quad (ب)$$

$$= 70 \times 3.85 \times 10^{-4} = 0.027 \text{ W}$$

$$V_f - i_2 R_2 + \varepsilon_2 = V_c \quad (ج)$$

$$\rightarrow V_f - V_c = i_2 R_2 - \varepsilon_2$$

$$= (-3.08 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3) - 60$$

$$= -69.24 \text{ V}$$

(ادامه ب)

$$P_{R_2} = i_2^2 R_2 =$$

$$= (3.08 \times 10^{-3})^2 \times 3 \times 10^3$$

$$= 0.028 \text{ W}$$

با سپاس از توجه شما،  
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود  
باشید.