

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

مقدمه ای بر جبر تانسورها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ مقدمه ای بر جبر تانسورها
- مقدمات جبر تانسور
- تبدیل وارون تانسور

جمع دو تانسور - تقارن تانسورها

- می توان دو تانسور با مرتبه های برابر و ویژگی های وردایی یکسان (هر دو هم وردا، یا هر دو پاد وردا و یا هر دو مخلوط به صورت یکسان) را با هم جمع کرد. نتیجه تانسوری با مرتبه یکسان خواهد بود که مولفه های آن از همان قانون تبدیل تانسورهای اولیه پیروی می کنند (همان ویژگی های وردایی را دارند). مثلاً

$$C^{ij} = A^{ij} + B^{ij} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B$$

- ترتیب قرار گرفتن اندیس ها در تانسور بسیار مهم است و در حالت کلی A^{mn} متفاوت از A^{nm} می باشد. در حالت کلی اگر با جابجایی دو اندیس به همان تانسور اولیه برسیم،

$$A^{mn} = A^{nm}, \quad A \text{ is symmetric}$$

تانسور را متقارن می نامیم. همچنین اگر با جابجایی دو اندیس مقدار مولفه منفی شود،

$$A^{mn} = -A^{nm}, \quad A \text{ is antisymmetric}$$

تانسور را پادمتقارن می نامیم.

- تمرین: نشان دهید که هر تانسور مرتبه دوم را می توان به صورت مجموع دو تانسور متقارن و پادمتقارن نوشت:

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm})$$

دلتای کرونکر یک تانسور است!

- برای درک مفاهیم تانسورها نشان خواهیم داد که دلتای کرونکر δ_1^k یک تانسور مخلوط مرتبه دوم است.
- تمرین: سوالی که باید به آن پاسخ دهید این است که آیا دلتای کرونکر مطابق با قانون تبدیل تانسورهای مرتبه دوم مخلوط (فرمول دوم) تبدیل می شود و یا خیر؟ این سوال را پاسخ دهید. پاسخ در اسلاید بعد آمده است.

$$(A')^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} A^{kl}, \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور پادوردای مرتبه دو} \end{array}$$

$$(B')^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} B^k_l, \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور مخلوط مرتبه دو} \end{array}$$

$$(C')_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} C_{kl}. \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور هموردای مرتبه دو} \end{array}$$

دلتای کرونکر یک تانسور است!

● اگر دلتای کرونکر δ_l^k یک تانسور مخلوط مرتبه دوم باشد، آنگاه باید از قانون تبدیل زیر پیروی کند:

$$(\delta')^i_j = \frac{\partial(x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} \delta_l^k = \frac{\partial(x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^j}$$

دقت کنید که از نمادگذاری اینشتین برای جمع‌بندی استفاده کرده ایم. همچنین اثر دلتای کرونکر این بوده است که یکی از جمع‌بندی‌ها از بین رفته است. چرا؟!
به علاوه با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial(x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^j} = \frac{\partial(x')^i}{\partial (x')^j}$$

در اینجا توجه کنید که اگر دو مختصه $x^{\hat{i}}$ و $x^{\hat{j}}$ با هم برابر باشند، مقدار بالا برابر با یک و در غیر اینصورت برابر با صفر خواهد بود. یعنی

$$\frac{\partial(x')^i}{\partial (x')^j} = (\delta')^i_j$$

$$(\delta')^i_j = \frac{\partial(x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} \delta_l^k \quad \text{و بنابراین}$$

پس δ_l^k واقعا یک تانسور مخلوط مرتبه دوم است. این نتیجه در هر ابعادی درست است.

تانسور همسانگرد

- ویژگی جالب تانسور دلتای کرونکر این است که مقدار مولفه های آن در همه دستگاه های دوران یافته تغییر نمی کند. چنین تانسوری را یک تانسور همسانگرد (isotropic) می نامند.
- بعداً با یک تانسور مرتبه سوم همسانگرد و سه تانسور مرتبه چهارم همسانگرد هم آشنا خواهیم شد.
- توجه: هیچ تانسور مرتبه اول (بردار) همسانگردي وجود ندارد.

تنجش و یا انقباض تانسورها

- قبلا دیده ایم که می توان یک اسکالر را با استفاده از دو بردار و مفهوم ضرب داخلی ساخت:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i$$

- تعمیم این فرایند در تانسورها را تنجش و یا انقباض تانسور (contraction) می نامند. این عمل رتبه تانسور را دو مرتبه کاهش می دهد و بنابراین تانسور مرتبه دوم را به یک اسکالر تبدیل می کند.

- روش محاسبه تنجش: تانسور مورد نظر باید حداقل یک اندیس هموردا و یک اندیس پادوردا داشته باشد. این دو اندیس را با هم برابر قرار دهید و بنا به نمادگذاری اینشتین، بر روی این اندیس های تکراری جمع بندی کنید.

- مثلا برای محاسبه تنجش تانسور B^i_j داریم:

$$B^i_i \equiv \sum_i B^i_i = B^1_1 + B^2_2 + B^3_3$$

اگر تانسور مورد نظر در $d = 3$ بعد تعریف شده باشد.

- تمرین: نشان دهید که کمیت B^i_i یک اسکالر است.

ضرب مستقیم تانسورها

- مولفه های هر دو تانسور (هم‌وردا، پادوردا و یا مخلوط) را می‌توان در هم ضرب کرد تا تانسور جدیدی با مولفه های جدید به وجود آید. مرتبه تانسور حاصلضرب برابر است با مجموع مرتبه های دو تانسور دیگر و تانسور حاصلضرب مجموع ویژگی های وردایی دو تانسور قبلی را نیز دارد. دو مثال زیر را ببینید:
- $$C_{klm}^{ij} = A_k^i B_{lm}^j, \quad F_{kl}^{ij} = A^j B_{lk}^i$$

توجه بسیار مهم: دقت کنید که در ضرب مستقیم تانسورها علی‌الاصول می‌توان ترتیب قرار گرفتن اندیس ها را هرطور که می‌خواهیم "تعریف کنیم"، ولی ویژگی وردایی عامل های ضرب مستقیم تانسورها باید حفظ شود.

- مثال: می‌توان با استفاده از ضرب مستقیم یک تانسور هم‌وردای مرتبه اول a_i و یک تانسور پادوردای مرتبه اول b^j یک تانسور مخلوط $C_i^j = a_i b^j$ ساخت. همچنین می‌توان به راحتی اثبات کرد که این موجود یک تانسور مرتبه دوم مخلوط است، زیرا
- $$(C')_i^j = \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} a_k \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} b^l = \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} a_k b^l = \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} C_k^l$$
- توجه: فرمول ۱۷، ۴ کتاب اشتباه هست!

- تمرین: نشان دهید که تنجش تانسور بالا یک اسکالر را نتیجه خواهد داد، یعنی
- $$a_i b^i = (a')_i (b')^i$$

عملگرهای تانسوری

- توجه کنید که موجوداتی مانند $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ در آنالیز برداری تعریف نمی شوند؛ ولی با استفاده از مفهوم ضرب مستقیم تانسورها می توان این عملگر، و برخی عملگرهای مشابه، را در آنالیز تانسوری تعریف کرد.
- البته باید در این زمینه مراقب باشیم، زیرا عملگرهای دیفرانسیلی مانند $\vec{\nabla}$ فقط در مختصات دکارتی قانون تبدیل ساده ای دارند. در واقع در مختصات غیر دکارتی عملگر $\partial/\partial x^i$ بر روی جملات تبدیل هم اثر می گذارد و بنابراین قانون تبدیل پیچیده تر خواهد شد.
- **جمع بندی این بخش: ضرب مستقیم تانسورها یک روش برای ساختن تانسورها با مراتب بالاتر است.**

تبدیل وارون

• خوب تا اینجا تبدیل تانسورها از دستگاه قدیم (بدون پریم) به دستگاه جدید (پریم) را یاد گرفته ایم:

$$(A')^j = \frac{\partial (x')^j}{\partial x^i} A^i$$

ولی با جابجا کردن علامت پریم می توان به راحتی تبدیل وارون از دستگاه جدید به قدیم را نیز ساخت

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial (x')^j} (A')^j$$

این رابطه را می توان همچنین با ضرب $\partial (x')^k / \partial x^i$ در طرفین رابطه بالا اثبات کرد:

$$\frac{\partial (x')^k}{\partial x^i} A^i = \frac{\partial (x')^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial (x')^j} (A')^j = \delta_j^k (A')^j = (A')^k$$

در نتیجه رابطه اول بازیابی می شود.

• توجه کنید که

$$\frac{\partial x^i}{\partial (x')^j} \neq \left[\frac{\partial (x')^j}{\partial x^i} \right]^{-1}$$

زیرا، همانطور که پیشتر اشاره شد، پارامترهای ثابت نگه داشته شده در طرفین روابط بالا با هم یکی نیستند. هرچند، در مختصات دکارتی می توان نوشت:

$$\frac{\partial x^i}{\partial (x')^j} = \frac{\partial (x')^j}{\partial x^i}$$

زیرا هر دو عبارت برابر با کسینوس زاویه بین محورهای x^i و $(x')^j$ هستند.

توجه: این تساوی فقط در مختصات دکارتی برقرار است.

قانون خارج قسمت

- تاکنون متوجه شده ایم که اگر A_{ij} و B_{kl} دو تانسور باشند، آنگاه ضرب مستقیم آنها نیز $A_{ij}B_{kl}$ تانسور است (یعنی از قانون تبدیل تانسورها پیروی می کند). ولی ما حالا می خواهیم این سوال را در روابطی مانند زیر که A و B تانسورهایی با مرتبه مشخص هستند، بپرسیم:

$$K_i A^i = B,$$

$$K_i^j A_j = B_i,$$

$$K_i^j A_{jk} = B_{ik},$$

$$K_{ijkl} A^{ij} = B_{kl},$$

$$K^{ij} A^k = B^{ijk}.$$

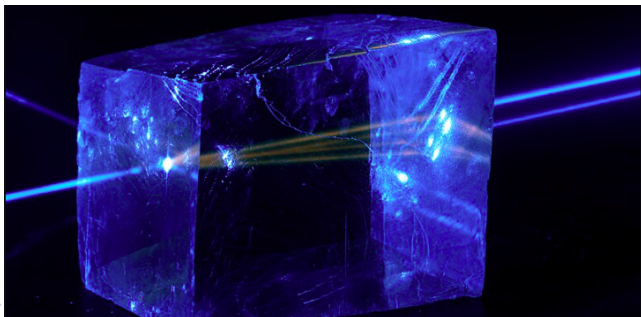
- ”آیا موجوداتی مانند K نیز تانسورند؟“ در واقع می خواهیم قانون تبدیل حاکم بر K ها را بیابیم. قانون خارج قسمت به ما کمک می کند:

قانون خارج قسمت: اگر روابطی مانند روابط بالا در همه تبدیلات مختصات برقرار باشند، آنگاه K ها تانسورهایی با مرتبه و وردایی مشخص شده هستند.

- اهمیت قانون خارج قسمت در این است که طبیعت تانسوری کمیت ها در قوانین فیزیک را تضمین می کند.

مواد غیرهمسانگرد

- اهمیت قانون خارج قسمت در این است که طبیعت تانسوری کمیت ها در قوانین فیزیک را تضمین می کند. مثلاً یک محیط غیرهمسانگرد را در نظر بگیرید که میدان الکتریکی $\vec{E}$ به آن اعمال شده و در نتیجه ممان دوقطبی الکتریکی $\vec{m}$ در آن القا شده است و این دو با رابطه $m_i = P_{ij} E_j$ به هم مربوط اند. حال با توجه به ذات برداری $\vec{E}$ و $\vec{m}$ نتیجه می گیریم که "ماتریس قطبش P یک تانسور از مرتبه دوم است.
- توجه کنید که رابطه اخیر به این معنی است که کمیت های $\vec{E}$ و $\vec{m}$ در حالت کلی هم جهت نیستند و این باعث پدیده های بسیار جذابی در خواص الکتریکی مواد و اپتیک می شود.



اثبات قانون خارج قسمت

در ادامه درستی یکی از موارد قانون خارج قسمت را نشان خواهیم داد. می خواهیم نشان دهیم که اگر رابطه $K_i^j A_j = B_i$ در یک دستگاه مختصات مانند x درست باشد، آنگاه رابطه $(K')_i^j A'_j = B'_i$ در دستگاه مختصات جدید x' نیز درست است:

$$K_i^j A_j = B_i \longrightarrow (K')_i^j A'_j = B'_i$$

ما از رابطه سمت راست شروع کرده و نشان خواهیم داد که این رابطه فقط در صورتی برقرار است که K' از قانون تبدیل تانسورها پیروی کند.

$$B'_i = \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} B_m = \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} K_m^j A_j = \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} K_m^j \frac{\partial (x')^n}{\partial x^j} A'_n$$

دقت کنید که در آخرین بخش از رابطه بالا از تبدیل وارون A_j استفاده کرده ایم. حال اگر جای اندیس های جمع بندی n و j را با هم عوض کنیم، آنگاه شکل رابطه واضح تر می شود:

$$B'_i = \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^n} K_m^n A'_j$$

که البته با توجه به اولین رابطه موجود برای B'_i می تواند به شکل زیر هم نوشته شود:

$$\left[(K')_i^j - \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^n} K_m^n \right] A'_j = 0$$

اثبات قانون خارج قسمت

در رابطه زیر

$$\left[(K')^j_i - \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^n} K^n_m \right] A'_j = 0$$

با توجه به اینکه بردار A' کاملاً دلخواه است، ضریب داخل پرانتز باید صفر شود. در نتیجه قانون تبدیل موجود K' به صورت زیر است

$$(K')^j_i = \frac{\partial x^m}{\partial (x')^i} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^n} K^n_m$$

پس موجود K واقعا یک تانسور مخلوط مرتبه دوم است.

تمرین: نشان دهید که K در همه روابط زیر یک تانسور است:

$$K_i A^i = B,$$

$$K_i^j A_j = B_i,$$

$$K_i^j A_{jk} = B_{ik},$$

$$K_{ijkl} A^{ij} = B_{kl},$$

$$K^{ij} A^k = B^{ijk}.$$

ذات تانسوری معادلات حرکت و معادلات میدان

- قانون خارج قسمت کجا به کار می آید؟ به مثال های زیر دقت کنید.
- بنا به قانون خارج قسمت، در معادله حرکت نیوتن $\vec{F} = m\vec{v}$ متوجه می شویم که اگر جرم یک اسکالر و نیرو یک بردار باشد، آنگاه شتاب نیز یک بردار است.
- ولی عکس این را نمی توان نتیجه گرفت! یعنی از بردار بودن شتاب و نیرو نمی توان نتیجه گرفت که ضریب شتاب حتما یک تانسور مرتبه صفر است. مثلا شکل دورانی قانون دوم نیوتن را می توان به شکل $\vec{\tau} = I \vec{\alpha}$ نوشت. در اینجا شتاب زاویه ای و گشتاور هر دو بردار هستند؛ ولی لختی دورانی I یک تانسور مرتبه دوم است.

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2) = 1$$

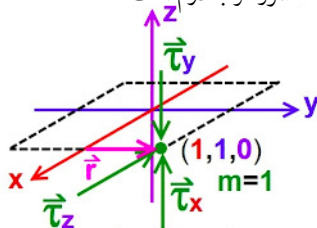
$$I_{yy} = m(x^2 + z^2) = 1$$

$$I_{zz} = m(x^2 + y^2) = 2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -mxy = -1$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -mxz = 0$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -mxy = 0$$



$$I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ذات تانسوری معادلات حرکت و معادلات میدان

- قانون خارج قسمت کجا به کار می آید؟ به مثال های زیر دقت کنید.
- شکل نسبیتی معادله موج در الکترودینامیک به صورت زیر نوشته می شود:

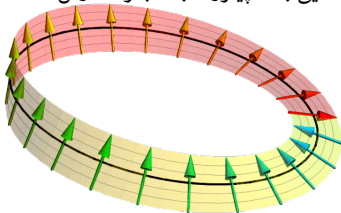
$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] A^\mu = J^\mu$$

در اینجا J^μ همان چاربردار چگالی جریان و A^μ چاربردار پتانسیل است. همچنین می توان نشان داد که مشتقات موجود در پرانتز بالا یک اسکالر می سازند. در نتیجه J^μ و A^μ باید تانسورهایی هم مرتبه و با ویژگی وردایی یکسان باشند.

تقسیم تانسورها بی معنی (غیرمجاز) است. ولی ما در عوض از قانون خارج قسمت استفاده می کنیم.

اسپینورها

- تا مدتها تصور می شد که اسکالرها، بردارها و تانسورها (با مرتبه های گوناگون) برای توصیف کمیت های فیزیکی (به صورت مستقل از دستگاه مختصات) کافی هستند. ولی بعدا معلوم شد که موجودات ریاضیاتی بسیار جالب دیگری نیز وجود دارند.
- در فیزیک ذرات بنیادی همه ذرات دارای اندازه حرکت ذاتی هستند که اسپین نامیده شده و با واحد $\hbar$ اندازه گیری می شود. مثلا ذراتی مانند پایون (Pion π) وجود دارند که اسپین آنها صفر است و با اسکالرها توصیف می شوند. همچنین ذراتی مانند دوترون با اسپین ۱ را با بردار و ذراتی مانند گراویتون با اسپین ۲ را با تانسورها توصیف می کنیم.
- ولی ذراتی مانند الکترون، پروتون و نوترون نیز وجود دارند که اسپین آنها $\frac{1}{2}$ است و با موجوداتی ریاضیاتی به نام اسپینور spinors توصیف می شوند. قانون تبدیل اسپینورها تحت دوران متفاوت از اسکالرها، بردارها و تانسورها می باشد. برای آشنایی با اسپینورها به مجموعه درس های "مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی" مراجعه کنید.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید جبر مقدماتی تانسورها و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ کدام انواع تانسورها را می توان با هم جمع کرد. قانون جمع دو تانسور جمع پذیر را بنویسید.
 - ۲ منظور از تانسور متقارن و پادمقارن چیست؟
 - ۳ توضیح دهید که چطور می توان هر تانسوری را به صورت جمع دو تانسور متقارن و پادمقارن نوشت.
 - ۴ چطور می توان تانسور بودن و یا نبودن یک موجود مشخص ریاضیاتی را تعیین کرد؟
 - ۵ منظور از تانسور همسانگرد چیست؟
 - ۶ منظور از تنش و یا انقباض تانسورها را توضیح دهید.
 - ۷ شرط تنش پذیری یک تانسور چیست؟ چطور می توان تنش یک تانسور را محاسبه کرد؟
 - ۸ منظور از ضرب مستقیم تانسورها چیست؟ چطور می توان با استفاده از ضرب مستقیم، تانسورهایی با مرتب بالاتر ساخت؟
 - ۹ منظور از تبدیل وارون تانسورها چیست؟
 - ۱۰ قانون خارج قسمت تانسورها را به زبان ریاضیاتی توضیح دهید.
 - ۱۱ اهمیت قانون خارج قسمت در فیزیک توضیح دهید.
 - ۱۲ توضیح دهید که چرا تقسیم دو تانسور بی معنی است.
 - ۱۳ درباره اسپینورها و ویژگی های تبدیلی آنها تحقیق کنید.
- اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراغوش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

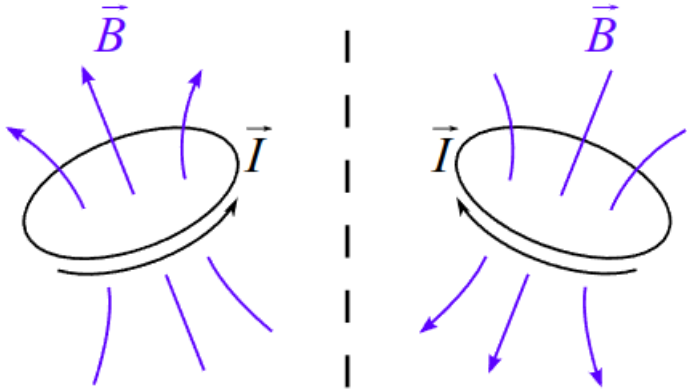


تمرین

- تمرینات بخش اول از فصل چهارم ویرایش هفتم کتاب آرفکن و همکاران را حل کنید.

مبحث بعدی: شبه تانسور و تانسور دوگان

- در جلسه بعد درباره شبه تانسور و تانسور دوگان بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

