

فیزیک مکانیک

جلسه هشتم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

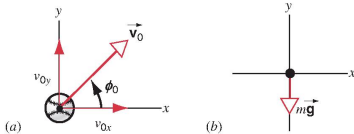
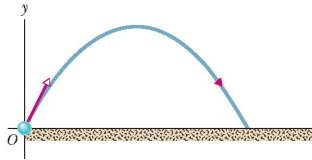


دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ جلسه هشتم رفع اشکال و حل تمرین

حل حرکت پرتابی در راستای افق



حرکت را در دو جهت عمودی و افقی تجزیه کرده و در ابتدا حرکت در راستای افق را حل می‌کنیم.

همانطور که در شکل پایین مشخص شده است، در راستای افق شتاب برابر صفر است. بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

از بحث‌های مربوط به فصل دوم می‌دانیم که سرعت در چنین حرکتی تغییر نمی‌کند:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \phi_0$$

در اینجا $v_{0x} = v_0 \cos \phi_0$ سرعت اولیه در راستای افق است.

همچنین، در یک حرکت یکنواخت، مکان به صورت خطی با زمان تغییر می‌کند (فصل دوم):

$$x(t) = v_{0x} t + x_0 = v_0 t \cos \phi_0 + x_0$$

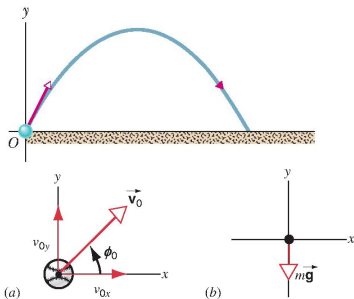
در اینجا x_0 مکان اولیه در راستای افق است.

شکل‌ها از مبانی هالیدی، ویرایش دهم، و فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

$$v_x(t) = v_0 \cos \phi_0$$

$$x(t) = v_0 t \cos \phi_0 + x_0$$

حل حرکت پرتابی در راستای عمود



$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \phi_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \phi_0 + y_0$$

در راستای عمود شتاب برابر $-g$ می باشد. بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

علامت منفی شتاب به این دلیل است که ما جهت محور عمود را به سمت بالا فرض کرده ایم.

از بحث های مربوط به فصل دوم می دانیم که سرعت در این نوع حرکت (حرکت با شتاب ثابت) به صورت خطی با زمان تغییر می کند:

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \phi_0$$

در اینجا $v_0 \sin \phi_0$ سرعت اولیه در راستای عمود است.

همچنین، در یک حرکت با شتاب ثابت، مکان به صورت توان دوم با زمان تغییر می کند (فصل دوم):

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \phi_0 t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \phi_0 + y_0$$

در اینجا y_0 مکان اولیه در راستای افق است.

دقت کنید که علامت جملات در این معادلات به انتخاب دستگاه مختصات توسط ما بستگی دارد؛ ولی شکل کلی معادلات تغییر نمی کند.

شکل ها از مبانی هالیدی، ویرایش دهم، و فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

تمرین

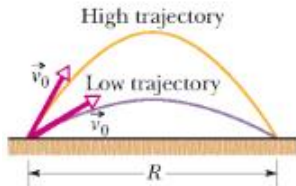
حرکت پرتابی:

پرتابه ای با سرعت اولیه $v_0 = 30 \text{ m/s}$ به سمت هدفی در فاصله $R = 20 \text{ m}$ پرتاب شده است. شکل روبه رو را ببینید. برای اصابت پرتابه به هدف می توان دو زاویه پرتاب را انتخاب کرد.

الف) با نوشتن معادلات حرکت در جهت های x و y (و یا معادله پرتابه) این زوایا را بیابید.

ب) مولفه های سرعت برخورد به زمین برای زاویه کوچکتر را نیز بیابید. توجه: مبدا و جهت محورهای مختصات انتخابی خود را بدقت مشخص کنید.

شکل از کتاب فیزیک هالیدی.



مثال حرکت پرتابی - روش اول

بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{2 \times 4.9}{3 \times 30} \approx 0.11$$

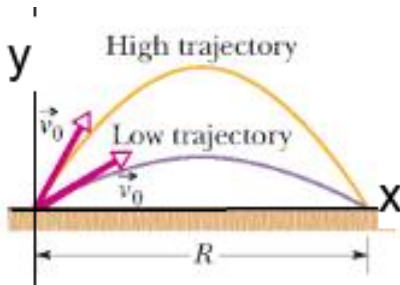
و یا (نکته: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$)

$$\sin 2\theta = 0.22 \Rightarrow 2\theta = k\pi \pm \arcsin 0.22$$

و در نهایت (در بازه مورد سوال یعنی $0 < \theta < \pi/2$) داریم:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin 0.22 = 6.3^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin 0.22 = 83.7^\circ$$



پاسخ: جهت مثبت محور عمود را به سمت بالا و جهت مثبت محور افقی را به سمت راست فرض می‌کنیم. حال علامت همه کمیت‌ها را با استفاده از جهت قراردادی محورها تعیین می‌کنیم. چهار رابطه اصلی حرکت پرتابه به صورت زیر هستند:

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta$$

$$x(t) = v_0 t \cos \theta + x_0$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + y_0$$

در لحظه برخورد داریم:

$$x(t) = v_0 t \cos \theta + x_0 \Rightarrow 20 = 30 t \cos \theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + y_0 \Rightarrow 0 = -4.9t^2 + 30 t \sin \theta$$

$$t(-4.9t + 30 \sin \theta) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = \frac{30 \sin \theta}{4.9}$$

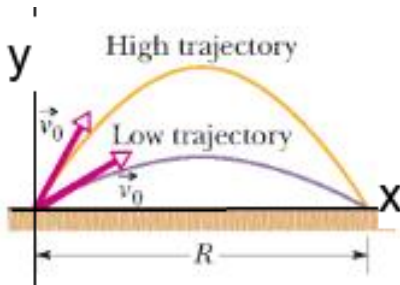
یعنی دو معادله و دو مجهول داریم. زمان را از معادله اول یافته

$$t = \frac{20}{30 \cos \theta} = \frac{2}{3 \cos \theta}$$

و برابر با زمان در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$t = t \Rightarrow \frac{30 \sin \theta}{4.9} = \frac{2}{3 \cos \theta}$$

مثال حرکت پرتابی - روش اول



پاسخ ب: جهت مثبت محور عمود را به سمت بالا و جهت مثبت محور افقی را به سمت راست فرض می‌کنیم. حال علامت همه کمیت‌ها را با استفاده از جهت قراردادی محورها تعیین می‌کنیم. چهار رابطه اصلی حرکت پرتابه به صورت زیر هستند:

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta$$

$$x(t) = v_0 t \cos \theta + x_0$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + y_0$$

پیدا کردن سرعت برخورد به زمین برای زاویه برخورد θ_1 :

$$v_x = v_0 \cos \theta = 30 \cos 63^\circ = 29.8 \text{ m/s}$$

برای پیدا کردن سرعت عمودی احتیاج به زمان برخورد پرتابه به زمین داریم:

$$t = \frac{y}{v_y} = \frac{y}{v_0 \sin \theta} = 0.67 \text{ s}$$

از اینجا می‌توان نوشت:

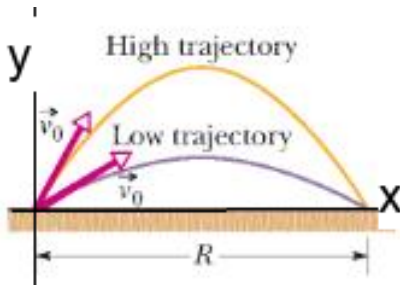
$$v_y = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$v_y = -9.8 \times 0.67 + 30 \sin 63^\circ = -3.3 \text{ m/s}$$

اندازه بردار سرعت نیز برابر است با

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{29.8^2 + (-3.3)^2} \approx 30 \text{ m/s}$$

تمرین - روش دوم



حرکت پرتابی:

پرتابه ای با سرعت اولیه $v_0 = 30 \text{ m/s}$ به سمت هدفی در فاصله $R = 20 \text{ m}$ پرتاب شده است. شکل روبه رو را ببینید. برای اصابت پرتابه به هدف می توان دو زاویه پرتاب را انتخاب کرد.

الف) با نوشتن معادلات حرکت در جهت های x و y (و یا معادله پرتابه) این زوایا را بیابید.

ب) مولفه های سرعت برخورد به زمین برای زاویه کوچکتر را نیز بیابید. توجه: مبدأ و جهت محورهای مختصات انتخابی خود را بدقت مشخص کنید.

روش دوم) همین مساله را می توان مستقیما با استفاده از معادله سهمی مسیر حل کرد:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \tan \theta$$

$$0 = -\frac{9.8}{2 \times 30^2 \times \cos^2 \theta} 20^2 + 20 \tan \theta$$

$$0 = 20 \left(-\frac{9.8}{2 \times 30^2 \times \cos^2 \theta} 20 + \tan \theta \right)$$

$$0 = -0.11(1 + \tan^2 \theta) + \tan \theta$$

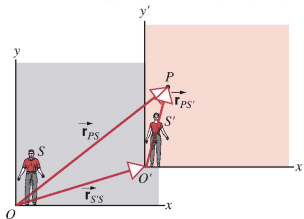
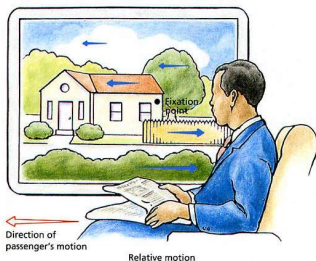
از روش دلتا داریم:

$$\tan \theta = 0.11 \quad \text{and} \quad \tan \theta = 9.07$$

که همان جواب های اسلاید قبلی است.

شکل از کتاب فیزیک هالیدی.

سینماتیک حرکت نسبی



سوالی که می‌خواهیم به آن پاسخ دهیم این است که موقعیت، سرعت و شتاب در دستگاه‌های مختلف چطور به هم ارتباط دارند؟

موقعیت ذره P در دستگاه S را می‌توان با استفاده از رابطه زیر به موقعیت این ذره در دستگاه S' مربوط کرد:

$$\vec{r}_{PS} = \vec{r}_{PS'} + \vec{r}_{S'S}$$

یعنی مکان ذره P در دستگاه S برابر است با مکان این ذره در دستگاه S' به علاوه مکان دستگاه S' نسبت به دستگاه S .

اگر آهنگ تغییر در بردارهای موقعیت در رابطه قبل را پیدا کنیم؛ آنگاه می‌توانیم رابطه بین سرعت ذره در هر دستگاه را بیابیم:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_{PS} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_{PS'} + \vec{r}_{S'S}) \Rightarrow \vec{v}_{PS} = \vec{v}_{PS'} + \vec{v}_{S'S}$$

یعنی سرعت ذره P در دستگاه S برابر است با سرعت این ذره در دستگاه S' به علاوه سرعت دستگاه S' نسبت به دستگاه S .

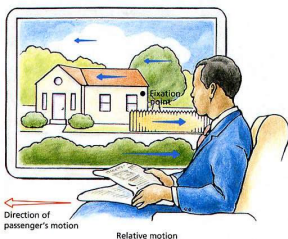
و در انتها می‌توانیم رابطه بین شتاب ذره در هر دستگاه را بیابیم:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_{PS} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_{PS'} + \vec{v}_{S'S}) \Rightarrow \vec{a}_{PS} = \vec{a}_{PS'} + \vec{a}_{S'S}$$

یعنی شتاب ذره P در دستگاه S برابر است با شتاب این ذره در دستگاه S' به علاوه شتاب دستگاه S' نسبت به دستگاه S .

شکل بالا از *rhsmpsychology* و شکل پایین از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.

دستگاه های لخت



اگر دو دستگاه S و S' با سرعت ثابتی نسبت به هم حرکتی کنند، یعنی $\vec{a}_{S'S} = \vec{0}$ ، آنگاه:

$$\vec{a}_{S'S} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{PS} = \vec{a}_{PS'}$$

یعنی شتاب های اندازه گیری شده توسط هر دو ناظر S و S' برابر خواهند بود. بنابراین، اگر یکی از این ناظرها دستگاه لخت محسوب شود، ناظر دیگر نیز دستگاه لخت خواهد بود. پس با شناخت یک دستگاه لخت می توان دستگاه های لخت دیگر را نیز شناسایی کرد.

دستگاه لخت دستگاهی است که قانون اول نیوتن در آن صادق باشد. یعنی اگر نیرویی به جسم وارد نشود، جسم حالت حرکت خود را حفظ کند.

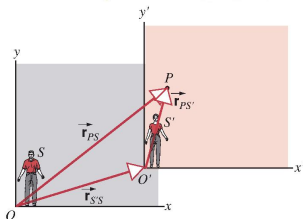
مثلا ماشینی که در $U - turn$ مشغول چرخیدن است، مطمئناً دستگاه لخت محسوب نمی شود زیرا بدون اینکه نیرویی به فرد درون ماشین وارد شود، فرد شتاب احساس می کند.

اهمیت دستگاه های لخت: معادلات فیزیک نیوتنی در دستگاه های لخت شکل یکسانی دارند.

اگر سعی کنیم که مکانیک مورد نظر خود را در دستگاهی غیر لخت بنویسیم، آنگاه جملاتی از جنس $m\vec{a}_{S'S}$ در معادلات ظاهر می شوند. این جملات را اصطلاحاً نیروهای مجازی می نامند (مثل نیروی مرکزگریز، نیروی کوریولی و ...). نکته مهم این است که اینها نیرو نیستند (یعنی ربطی به برهمکنش جسم با محیط اطراف ندارند) بلکه به دلیل غیر لخت بودن دستگاه انتخابی ما ظاهر شده اند.

هیچ دستگاه دقیقاً لختی وجود ندارد؛ همه دستگاه های لخت با تقریب مناسب مساله لخت محسوب می شوند (اسلاید بعد را ببینید).

شکل بالا از *rhsmpsychology* و شکل پایین از فیزیک هالیدی، ویرایش پنجم.



مزه ای از نسبیت

خلبانانی قرار است که به شرق پرواز کنند، از نقطه A به B ، و بعد دوباره به غرب و نقطه A بازگردند. سرعت هواپیما نسبت به باد برابر $\vec{v}$ و سرعت باد نسبت به زمین برابر $\vec{u}$ می باشد. فاصله بین نقاط A و B برابر l و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت است.

الف) اگر سرعت هوا نسبت به زمین صفر باشد، یعنی $|\vec{u}| = 0$ ، نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر $t_0 = 2l/v$ می باشد.

ب) فرض کنید که باد به سمت شرق (و یا غرب) می وزد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

پ) فرض کنید که سرعت باد به سمت شمال و یا جنوب می باشد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_E = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

مزه ای از نسبیت- پاسخ الف

سرعت هواپیما نسبت به زمین را با $\vec{v}_{ag}$ نشان می دهیم. در این صورت، سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با سرعت هواپیما نسبت به هوا (باد) به علاوه سرعت باد نسبت به زمین:

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v}_{aw} + \vec{v}_{wg} = \vec{v} + \vec{u}$$

a : airplane

w : wind

g : ground

در قسمت الف، سرعت هوا نسبت به زمین صفر است، یعنی باد نمی وزد $|\vec{u}| = 0$ ، در نتیجه

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

فاصله کل پرواز برابر $2l$ است و بنابراین زمان رفت و برگشت برابر $t_0 = 2l/v$ می باشد.

خلیانی قرار است که به شرق پرواز کند، از نقطه A به B ، و بعد دوباره به غرب و نقطه A بازگردد. سرعت هواپیما نسبت به باد برابر $\vec{v}$ و سرعت باد نسبت به زمین برابر $\vec{u}$ می باشد. فاصله بین نقاط A و B برابر l و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت است.

الف) اگر سرعت هوا نسبت به زمین صفر باشد، یعنی $|\vec{u}| = 0$ ، نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر $t_0 = 2l/v$ می باشد.

ب) فرض کنید که باد به سمت شرق (و یا غرب) می وزد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

پ) فرض کنید که سرعت باد به سمت شمال و یا جنوب می باشد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_E = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

مزه ای از نسبیت - پاسخ ب

سرعت هواپیما نسبت به زمین را با $\vec{v}_{ag}$ نشان می دهیم. در این صورت، سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با سرعت هواپیما نسبت به هوا (باد) به علاوه سرعت باد نسبت به زمین:

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v} + \vec{u}$$

در قسمت ب، باد به سمت شرق (و یا غرب) می وزد. وقتی سرعت باد و هواپیما هم جهت هستند داریم

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v} + \vec{u} \Rightarrow v_{ag} = v + u$$

زمان طی شده در این قسمت از مسیر برابر است با $t_1 = l/(v + u)$.

از طرف دیگر در مسیر برگشت هواپیما، سرعت باد و هواپیما در خلاف جهت هم هستند

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v} + \vec{u} \Rightarrow v_{ag} = v - u$$

زمان طی شده در این قسمت از مسیر برابر است با $t_2 = l/(v - u)$.

زمان کل مسیر برابر است با مجموع این دو زمان:

$$t_E = t_1 + t_2 = \frac{l}{v + u} + \frac{l}{v - u}$$

$$t_E = l \left(\frac{v - u + v + u}{v^2 - u^2} \right) = \frac{2lv}{v^2 - u^2}$$

$$t_E = \frac{2l/v}{1 - u^2/v^2} = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

خلیانی قرار است که به شرق پرواز کند، از نقطه A به B ، و بعد دوباره به غرب و نقطه A بازگردد. سرعت هواپیما نسبت به باد برابر $\vec{v}$ و سرعت باد نسبت به زمین برابر $\vec{u}$ می باشد. فاصله بین نقاط A و B برابر l و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت است.

الف) اگر سرعت هوا نسبت به زمین صفر باشد، یعنی $|\vec{u}| = 0$ ، نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر $t_0 = 2l/v$ می باشد.

ب) فرض کنید که باد به سمت شرق (و یا غرب) می وزد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

پ) فرض کنید که سرعت باد به سمت شمال و یا جنوب می باشد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_E = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

مزه ای از نسبیت- پاسخ پ

سرعت هواپیما نسبت به زمین را با $\vec{v}_{ag}$ نشان می دهیم. در این صورت، سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با سرعت هواپیما نسبت به هوا (باد) به علاوه سرعت باد نسبت به زمین:

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v} + \vec{u}$$

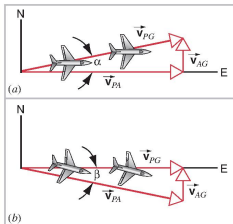
در قسمت پ، سرعت باد به سمت شمال (و یا جنوب) می باشد. بنابراین

$$\vec{v}_{ag} = \vec{v} + \vec{u} \Rightarrow v_{ag} = \sqrt{v^2 - u^2}$$

بردار $\vec{v}$ وتر مثلث است. زمان طی شده در این حالت برابر است با

$$t_E = \frac{l}{\sqrt{v^2 - u^2}} + \frac{l}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

$$\frac{2l/v}{\sqrt{1 - u^2/v^2}} = \frac{t_o}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$



خلیانی قرار است که به شرق پرواز کند، از نقطه A به B ، و بعد دوباره به غرب و نقطه A بازگردد. سرعت هواپیما نسبت به باد برابر $\vec{v}$ و سرعت باد نسبت به زمین برابر $\vec{u}$ می باشد. فاصله بین نقاط A و B برابر l و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت است.

الف) اگر سرعت هوا نسبت به زمین صفر باشد، یعنی $|\vec{u}| = 0$ ، نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر $t_o = 2l/v$ می باشد.

ب) فرض کنید که باد به سمت شرق (و یا غرب) می وزد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر

$$t_E = \frac{t_o}{1 - u^2/v^2}$$

پ) فرض کنید که سرعت باد به سمت شمال و یا جنوب می باشد. نشان دهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_E = \frac{t_o}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.