

فیزیک مکانیک

جلسه دوم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

حل تمرین فصل چهارم ۱

تمرین

مثال: مکان ذره ای برحسب متر در هر لحظه از زمان، توسط بردار

$$\vec{r}(t) = (\sin \pi t - t^2) \hat{i} + \left(\frac{2}{3}t^3 + \cos \pi t\right) \hat{j} + \left(-t^{\frac{3}{2}} + 5e^{-t}\right) \hat{k}$$

توصیف می شود.

الف) بردار سرعت ذره در هر لحظه از زمان را بیابید. بردار سرعت ذره در لحظه $t = 1$ s را بیابید. اندازه بردار سرعت در این لحظه چقدر است؟
 ب) بردار شتاب ذره در هر لحظه از زمان را بیابید. بردار شتاب ذره در لحظه $t = 1$ s را بیابید. اندازه بردار شتاب در این لحظه چقدر است؟

تمرین

مثال: مکان ذره ای برحسب متر در هر لحظه از زمان، توسط بردار

$$\vec{r}(t) = \left(\sin \pi t - t^2 \right) \hat{i} + \left(\frac{2}{3} t^3 + \cos \pi t \right) \hat{j} + \left(-t^{\frac{3}{4}} + 5e^{-t} \right) \hat{k}$$

توصیف می شود.
الف) بردار سرعت ذره در هر لحظه از زمان را بیابید. بردار سرعت ذره در لحظه $t = 1$ s را بیابید. اندازه بردار سرعت در این لحظه چقدر است؟
پاسخ الف: با مشتق گیری از بردار مکان می توان بردار سرعت را پیدا کرد (فراموش نکنیم که مشتق بردارهای $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ ، و $\hat{k}$ برابر صفر است.):

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \left(\sin \pi t - t^2 \right) \hat{i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} t^3 + \cos \pi t \right) \hat{j} + \frac{d}{dt} \left(-t^{\frac{3}{4}} + 5e^{-t} \right) \hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = (\pi \cos \pi t - 2t) \hat{i} + (2t^2 - \pi \sin \pi t) \hat{j} + \left(-\frac{3}{4} t^{-\frac{1}{4}} - 5e^{-t} \right) \hat{k}$$

سرعت در لحظه $t = 1$ s برابر است با

$$\vec{v}(t = 1) = (\pi \cos(\pi \times 1) - 2 \times 1) \hat{i} + (2 \times 1^2 - \pi \sin(\pi \times 1)) \hat{j} + \left(-\frac{3}{4} 1^{-\frac{1}{4}} - 5e^{-1} \right) \hat{k}$$

$$\vec{v}(t = 1) = -(\pi + 2) \hat{i} + 2 \hat{j} - \left(\frac{3}{4} + 5e^{-1} \right) \hat{k}$$

$$|\vec{v}|(t = 1) = \sqrt{(\pi + 2)^2 + 4 + \left(\frac{3}{4} + 5e^{-1} \right)^2} = \dots$$

تمرین

مثال: مکان ذره ای برحسب متر در هر لحظه از زمان، توسط بردار

$$\vec{r}(t) = (\sin \pi t - 3^2) \hat{i} + \left(\frac{2}{3}t^3 + \cos \pi t\right) \hat{j} + \left(-t^{\frac{3}{2}} + 5e^{-t}\right) \hat{k}$$

توصیف می شود.
 ب) بردار شتاب ذره در هر لحظه از زمان را بیابید. بردار شتاب ذره در لحظه $t = 1$ s را بیابید. اندازه بردار شتاب در این لحظه چقدر است؟
 پاسخ ب: با مشتق گیری از بردار سرعت می توان بردار شتاب را پیدا کرد:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (\pi \cos \pi t - 2t) \hat{i} + \frac{d}{dt} (2t^2 - \pi \sin \pi t) \hat{j} + \frac{d}{dt} \left(-\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}} - 5e^{-t}\right) \hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \left(-\pi^2 \sin \pi t - 2\right) \hat{i} + \left(4t - \pi^2 \cos \pi t\right) \hat{j} + \left(\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}} + 5e^{-t}\right) \hat{k}$$

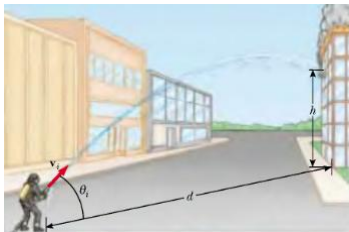
شتاب در لحظه $t = 1$ s برابر است با

$$\vec{a}(t=1) = \left(-\pi^2 \sin \pi - 2\right) \hat{i} + \left(4 - \pi^2 \cos \pi\right) \hat{j} + \left(\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)1^{-\frac{3}{2}} + 5e^{-1}\right) \hat{k}$$

$$\vec{a}(t=1) = -2\hat{i} + (4 + \pi^2)\hat{j} + \left(\frac{3}{16} + 5e^{-1}\right)\hat{k}$$

$$|\vec{a}|(t=1) = \sqrt{2^2 + (4 + \pi^2)^2 + \left(\frac{3}{16} + 5e^{-1}\right)^2} = \dots$$

تمرین



حرکت پرتابی ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

در شکل مقابل آشنشانی در فاصله $d = 15 \text{ m}$ از یک ساختمان در حال آتش قرار گرفته است. سرعت خروج آب از لوله برابر $v_i = 20 \text{ m/s}$ و زاویه پرتاب $\theta_i = 60^\circ$ می باشد.

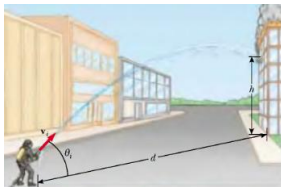
الف) زمان برخورد آب با ساختمان را بیابید.

ب) آب در چه ارتفاع h با ساختمان برخورد می کند؟

پ) مولفه های سرعت برخورد آب با ساختمان چقدر است؟
توجه: محورهای مختصات را به دقت با رسم شکل تعیین کنید.

شکل از فیزیک هالیدی.

تمرین



اندازه بردار سرعت (که البته در اینجا خواسته نشده است):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{10^2 + (2.62)^2}$$

$$v = 10.33 \text{ m/s}$$

حرکت پرتابی ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):
در شکل مقابل آشنشانی در فاصله $d = 15 \text{ m}$ از یک ساختمان در حال آتش قرار گرفته است.
سرعت خروج آب از لوله برابر $v_i = 20 \text{ m/s}$ و زاویه پرتاب $\theta_i = 60^\circ$ می باشد.

الف) زمان برخورد آب با ساختمان را بیابید.

ب) آب در چه ارتفاع h با ساختمان برخورد می کند؟

پ) مولفه های سرعت برخورد آب با ساختمان چقدر است؟
توجه: محورهای مختصات را به دقت با رسم شکل تعیین کنید.

شکل از فیزیک هالیدی.

محور x را به سمت ساختمان و محور y را در جهت عمود به سمت بالا در نظر میگیریم.

پاسخ الف: از رابطه مکان افقی داریم:

$$x - x_0 = v_i t \cos \theta_i \Rightarrow t = \frac{d}{v_i \cos \theta_i} = \frac{15}{20 \cos 60^\circ} = 1.5 \text{ s}$$

پاسخ ب: از رابطه مکان عمودی داریم:

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_i t \sin \theta_i$$

$$\Rightarrow h = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 1.5^2 + 20 \times 1.5 \times \sin 60^\circ = 14.95 \text{ m}$$

پاسخ پ: در راستای افقی شتابی نداریم و بنابراین سرعت تغییری نمی کند (یعنی سرعت افقی در هر لحظه برابر سرعت اولیه افقی است):

$$v_x = v_i \cos \theta_i = 20 \times \cos 60^\circ = 10 \text{ m/s}$$

در راستای عمودی سرعت متغیر است چون در راستای عمود شتاب داریم:

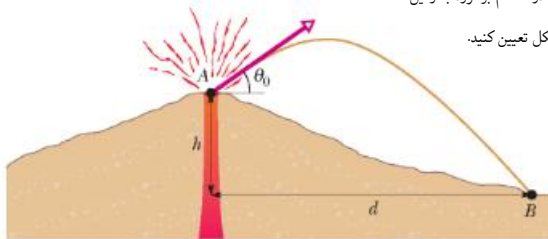
$$v_y = -gt + v_i \sin \theta_i = -9.8 \times 1.5 + 20 \times \sin 60^\circ = 2.62 \text{ m/s}$$

تمرین

حرکت پرتابی:

شکل مقابل انفجار یک کوه آتشفشان را نشان می دهد که در آن گدازه ها از ارتفاع h با سرعت اولیه v_0 پرتاب شده و تا فاصله $d = 8 \text{ km}$ هم رسیده اند. فرض کنید که زمان پرواز $t = 15 \text{ s}$ می باشد. الف) اگر گدازه ها با زاویه $\theta_0 = 30^\circ$ پرتاب شده باشند، اندازه سرعت اولیه آنها چقدر بوده است؟ ب) گدازه ها از چه ارتفاع h پرتاب شده اند؟ پ) مولفه های افقی و عمودی سرعت گدازه ها در هنگام برخورد به زمین چقدر است؟ توجه: محورهای مختصات را به دقت با رسم شکل تعیین کنید.

شکل از فیزیک هالیدی.



تمرین

حرکت پرتابی:

شکل مقابل انفجار یک کوه آتشفشان را نشان می دهد که در آن گدازه ها از ارتفاع h با سرعت اولیه v پرتاب شده و تا فاصله $d = 8 \text{ km}$ هم رسیده اند. فرض کنید که زمان پرواز $t = 15 \text{ s}$ می باشد.

الف) اگر گدازه ها با زاویه $\theta = 30^\circ$ پرتاب شده باشند، اندازه سرعت اولیه آنها چقدر بوده است؟ ب) گدازه ها از چه ارتفاع h پرتاب شده اند؟ پ) مولفه های افقی و عمودی سرعت گدازه ها در هنگام برخورد به زمین چقدر است؟ توجه: محورهای مختصات را به دقت با رسم شکل تعیین کنید.

شکل از فیزیک هالیدی.

محور x را به سمت راست و محور y را در جهت عمود به سمت بالا در نظر میگیریم.

پاسخ الف: از رابطه مکان افقی داریم:

$$x - x_0 = v_0 t \cos \theta \Rightarrow v_0 = \frac{d}{t \cos \theta} = \frac{8000}{15 \cos 30^\circ} = 615.8 \text{ m/s}$$

پاسخ ب: از رابطه مکان عمودی داریم:

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta$$

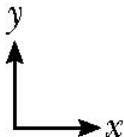
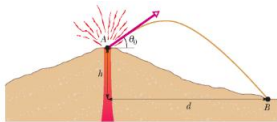
$$\Rightarrow h = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 15^2 + 615.8 \times 15 \times \sin 30^\circ = 3516 \text{ m}$$

پاسخ پ: در راستای افقی شتابی نداریم و بنابراین سرعت تغییری نمی کند:

$$v_x = v_0 \cos \theta = 615.8 \times \cos 30^\circ = 533.3 \text{ m/s}$$

در راستای عمودی سرعت متغیر است چون شتاب داریم:

$$v_y = -gt + v_0 \sin \theta = -9.8 \times 15 + 615.8 \times \sin 30^\circ = 160.8 \text{ m/s}$$



تمرین

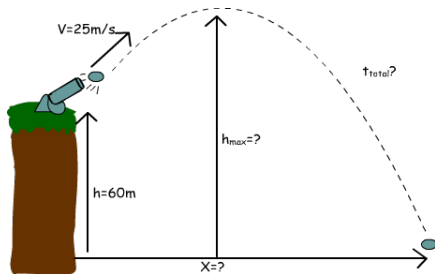
حرکت پرتابی ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

مطابق شکل مقابل، گلوله ای از بالای تپه ای به ارتفاع $h = 60 \text{ m}$ با سرعت اولیه $v = 25 \text{ m/s}$ شلیک می شود. زاویه پرتاب $\theta = 60^\circ$ می باشد.

الف) زمان کل پرواز چقدر است؟

ب) بیشترین ارتفاعی که گلوله به آن می رسد نسبت به سطح زمین چقدر است؟

پ) بیشترین فاصله افقی از نقطه پرتاب X چقدر است؟
توجه: محورهای مختصات را به دقت با رسم شکل تعیین کنید.



تمرین

حرکت پرتابی ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):مطابق شکل مقابل، گلوله ای از بالای تپه ای به ارتفاع $h = 60 \text{ m}$ با سرعت اولیه $v = 25 \text{ m/s}$ شلیک می شود. زاویه پرتاب $\theta = 60^\circ$ می باشد.

(الف) زمان کل پرواز چقدر است؟

(ب) بیشترین ارتفاعی که گلوله به آن می رسد نسبت به سطح زمین چقدر است؟

(پ) بیشترین فاصله افقی از نقطه پرتاب X چقدر است؟

توجه: محورهای مختصات را به دقت با رسم شکل تعیین کنید.

محور x را به سمت راست و محور y را در جهت عمود به سمت بالا در نظر میگیریم. همچنینمبدأ محور بر روی سطح زمین قرار دارد؛ یعنی $h = y_0$.

پاسخ الف: از رابطه مکان عمودی داریم:

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \sin \theta$$

$$0 - 60 = -\frac{1}{2} \times 9.8t^2 + 25t \sin 60^\circ \Rightarrow -4.9t^2 + 12.5\sqrt{3}t + 60 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-12.5\sqrt{3} \pm \sqrt{(12.5\sqrt{3})^2 - 4 \times 60 \times (-4.9)}}{-2 \times 4.9} = 6.35 \text{ s}$$

پاسخ ب: در لحظه ای که متحرک به بالاترین نقطه می رسد، سرعت عمودی آن صفر می شود:

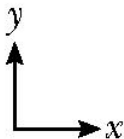
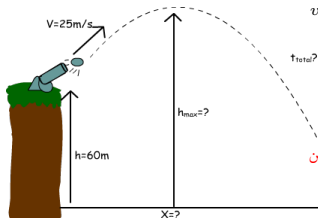
$$v_y = -gt + v \sin \theta = 0 \Rightarrow -9.8 \times t + 25 \sin 60^\circ \Rightarrow t = 2.2 \text{ s}$$

در این لحظه مکان عمودی متحرک برابر است با:

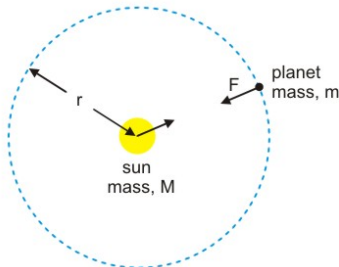
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \sin \theta + y_0 = -4.9 \times 2.2^2 + 25 \times 2.2 \times \sin 60^\circ + 60 = 83.8 \text{ m}$$

پاسخ پ: از رابطه مکان افقی داریم:

$$x - x_0 = vt \cos \theta \Rightarrow X = 25 \times 6.35 \times \cos 60^\circ = 79.4 \text{ m}$$



تمرین



مقادیر جدول از نوشته های کپلر (سال ۱۶۱۸ میلادی) استخراج شده اند. از نتیجه قسمت (ب) می توان جرم خورشید را پیدا کرد.

Planet	r (AU)	T (day)	$\frac{r^3}{T^2} (10^6 \frac{AU^3}{day^2})$
Mercury	0.389	87.77	7.64
Venus	0.724	224.70	7.52
Earth	1	365.25	7.50
Mars	1.524	686.95	7.50
Jupiter	5.2	4332.62	7.49
Saturn	9.510	10759.2	7.43

حرکت دایره ای یکنواخت:

سیاره ای به جرم m با سرعت یکنواخت v در حال دوران به دور خورشید به جرم M می باشد. شتاب جانب مرکز این دوران برابر

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{و نیروی گرانش برابر} \quad F = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{می باشد.}$$

شعاع دوران سیاره r ، سرعت آن v و دوره تناوب آن T می باشد. الف) رابطه بین v و T و r را بنویسید.

ب) با استفاده از قانون دوم نیوتن ($F = ma$) مقدار کسر

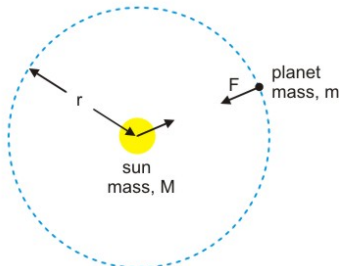
$$\frac{r^3}{T^2} \quad \text{را بر حسب} \quad G \quad \text{و} \quad M \quad \text{بیابید.}$$

اطلاعات عمومی: این نتیجه را قانون سوم کپلر می نامند. بنا به

این قانون، همانطور که در ستون چهارم جدول زیر می بینید، مقدار

$$\frac{r^3}{T^2} \quad \text{برای تمام سیارات منظومه شمسی تقریباً ثابت است.}$$

تمرین



مقادیر جدول از نوشته های کپلر (سال ۱۶۱۸ میلادی) استخراج شده اند. از نتیجه قسمت (ب) می توان جرم خورشید را پیدا کرد.

Planet	r (AU)	T (day)	$\frac{r^3}{T^2} (10^6 \frac{AU^3}{day^2})$
Mercury	0.389	87.77	7.64
Venus	0.724	224.70	7.52
Earth	1	365.25	7.50
Mars	1.524	686.95	7.50
Jupiter	5.2	4332.62	7.49
Saturn	9.510	10759.2	7.43

حرکت دایره ای یکنواخت:
سیاره ای به جرم m با سرعت یکنواخت v در حال دوران به دور خورشید به جرم M می باشد. شتاب جانب مرکز این دوران برابر $a = \frac{v^2}{r}$ و نیروی گرانش برابر $F = \frac{GMm}{r^2}$ می باشد. شعاع دوران سیاره r ، سرعت آن v و دوره تناوب آن T می باشد.

الف) رابطه بین v و T و r را بنویسید.
پاسخ الف: $v = \frac{2\pi r}{T}$

ب) با استفاده از قانون دوم نیوتن ($F = ma$) مقدار کسر $\frac{r^3}{T^2}$ را بر حسب G و M بیابید.
پاسخ ب:

$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

اطلاعات عمومی: این نتیجه را قانون سوم کپلر می نامند. بنا به این قانون، همانطور که در ستون چهارم جدول زیر می بینید، مقدار $\frac{r^3}{T^2}$ برای تمام سیارات منظومه شمسی تقریباً ثابت است.

تمرین

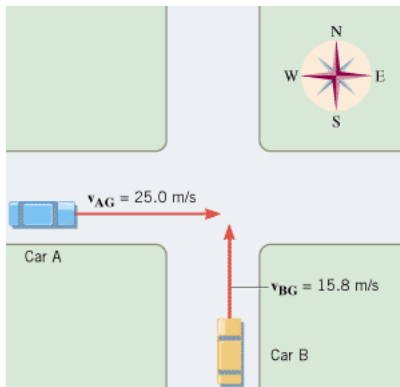
سرعت هرکدام از ماشین های A و B نسبت به زمین معلوم شده است.

الف) سرعت ماشین A نسبت به ماشین B را بیابید. زاویه θ چقدر است؟

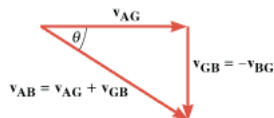
ب) سرعت ماشین B نسبت به ماشین A را بیابید.

پ) سرعت های پیدا شده در جواب های الف و ب با هم چه ارتباطی دارند؟

شکل از <https://webassign.net/>



(a)



(b)

تمرین

پاسخ پ:

$$\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$$

<https://webassign.net/>
شکل از
net/سرعت هرکدام از ماشین های A و B نسبت به زمین در شکل معلوم شده است.الف) سرعت ماشین A نسبت به ماشین B را بیابید. زاویه θ چقدر است؟ب) سرعت ماشین B نسبت به ماشین A را بیابید.

پ) سرعت های پیدا شده در جواب های الف و ب با هم چه ارتباطی دارند؟

پاسخ الف: با توجه به اینکه داریم:

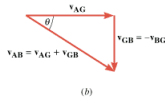
$$\vec{v}_{AG} = -\vec{v}_{GA} = 25 \hat{i}, \quad \vec{v}_{BG} = -\vec{v}_{GB} = 15.8 \hat{j}$$

بنابراین سرعت ماشین A نسبت به ماشین B برابر است با

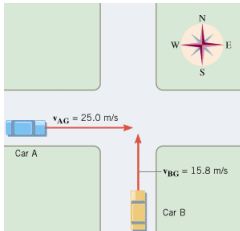
$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AG} + \vec{v}_{GB} = 25 \hat{i} - 15.8 \hat{j}$$

زاویه θ برابر است با

$$\sin \theta = \frac{v_{BG}}{\sqrt{v_{AG}^2 + v_{GB}^2}} = \frac{15.8}{\sqrt{25^2 + 15.8^2}} = 0.53$$

یا $\theta = 32^\circ$ پاسخ ب: به همین صورت سرعت ماشین B نسبت به ماشین A برابر است با

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{BG} + \vec{v}_{GA} = 15.8 \hat{j} - 25 \hat{i}$$



با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.