

فیزیک مکانیک

جلسه اول رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

حل تمرین فصل دوم ۶

تمرین های تحلیل حرکت

● تحلیل حرکت یک بعدی: مکان یک ذره در امتداد محور x با رابطه ی

$$x(t) = \sin(\pi t) + 2 \cos(\pi t)$$

داده می شود.

الف) سرعت متوسط را در بازه زمانی $t = 1s$ تا $t = 2s$ بیابید.

ب) سرعت لحظه ای در لحظات $t = 1s$ و $t = 2s$ را بیابید.
پ) سرعت لحظه ای وقتی که ذره در وسط مسیر بین این دو لحظه قرار دارد چقدر است؟
ت) شتاب در لحظات $t = 1s$ و $t = 2s$ را بیابید.

● پاسخ الف:

$$x(t = 1) = \sin(\pi) + 2 \cos(\pi) = -2$$

$$x(t = 2) = \sin(2\pi) + 2 \cos(2\pi) = 2$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t = 2) - x(t = 1)}{2 - 1} = \frac{2 - (-2)}{1} = 4$$

پاسخ ب:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pi \cos(\pi t) - 2\pi \sin(\pi t)$$

$$v(t = 1) = \pi \cos(\pi) - 2\pi \sin(\pi) = -\pi$$

$$v(t = 2) = \pi \cos(2\pi) - 2\pi \sin(2\pi) = \pi$$

● پاسخ پ: پیدا کردن نقطه وسط

$$\bar{x} = \frac{x(t = 2) + x(t = 1)}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

زمان در نقطه وسط

$$\sin(\pi t) + 2 \cos(\pi t) = 0 \Rightarrow \tan(\pi t) = -2$$

$$\pi t = \tan^{-1}(-2) \Rightarrow t = \frac{\tan^{-1}(-2)}{\pi} + k\pi$$

تنها زمان قابل قبول در بازه $t = 1s$ تا $t = 2s$ برابر $t = 1/65s$ به دست می آید. در این زمان، سرعت لحظه ای برابر است با

$$v(t = 1/65) = \pi \cos(1/65\pi) - 2\pi \sin(1/65\pi) = 7$$

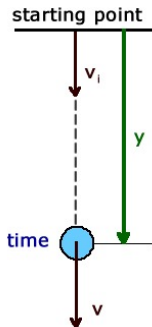
پاسخ ت:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\pi^2 \sin(\pi t) - 2\pi^2 \cos(\pi t)$$

$$a(t = 1) = -\pi^2 \sin(\pi) - 2\pi^2 \cos(\pi) = 2\pi^2$$

$$a(t = 2) = -\pi^2 \sin(2\pi) - 2\pi^2 \cos(2\pi) = -2\pi^2$$

تمرین



شکل از نت.

سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

فردی توپی را با سرعت v_i (به سمت پایین) از بالای ساختمانی به ارتفاع $y = 55 \text{ m}$ پرتاب میکند.

الف) اگر دو ثانیه طول بکشد تا سنگ با زمین برخورد کند سرعت v_i چقدر بوده است؟

پاسخ الف: جهت محور عمودی را به سمت پایین فرض می کنیم و فرض می کنیم که مبدا مختصات در مکان اولیه پرتاب توپ باشد:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_i t + y_0 \Rightarrow 55 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 2^2 + 2v_i + 0 \Rightarrow v_i = 17.7 \text{ m/s}$$

ب) سرعت توپ در هنگام برخورد با زمین چقدر است؟

پاسخ ب:

$$v = gt + v_i \Rightarrow v(t = 2s) = 9.8 \times 2 + 17.7 = 37.3 \text{ m/s}$$

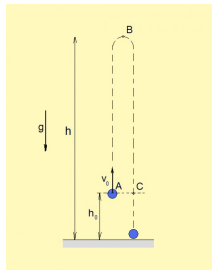
پ) چقدر طول میکشد تا توپ به ارتفاع 10 متری بالای سطح زمین برسد؟

پاسخ پ:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_i t + y_0 \Rightarrow 45 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 + 17.7t + 0$$

$$4.9t^2 + 17.7t - 45 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-17.7 \pm \sqrt{17.7^2 - 4 \times 4.9 \times (-45)}}{2 \times 4.9} = 1.7s$$

تمرین



سقوط آزاد ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$):

سنگی با سرعت $v_0 = 15 \text{ m/s}$ از ارتفاع $h_0 = 2 \text{ m}$ به صورت عمودی به سمت بالا پرتاب می شود.

الف) در چه زمانی سنگ به نقطه B می رسد؟

پاسخ الف: جهت محور عمودی را به سمت بالا فرض می کنیم. در نقطه B سرعت عمودی صفر خواهد شد:

$$v = -gt + v_0 = 0 \quad t_B = v_0 / g = 15 / 9.8 = 1.5 \text{ s}$$

ب) ارتفاع نقطه B (یعنی h) نسبت به زمین را بیابید.

پاسخ ب: مبدا مختصات را روی سطح زمین فرض می کنیم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 1.5^2 + 15 \times 1.5 + 2 = 13.5 \text{ m}$$

پ) در چه زمان هایی سنگ از ارتفاع $h_1 = 4 \text{ m}$ نسبت به سطح زمین می گذرد؟

پاسخ پ:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 = 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} \times 9.8 t^2 + 15 t + 2 = 4$$

$$-4.9 t^2 + 15 t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4(-4.9)(-2)}}{-2 \times 4.9} = 2.9 \text{ s}, 0.14 \text{ s}$$

شکل از نت.

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

$$a(t) = -\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t} - 1$$

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = -1 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = 6 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ : راهنمایی}$$

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

$$a(t) = -\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t} - 1$$

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = -1 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

پاسخ الف) برای راحتی در انتگرال گیری، شتاب را با استفاده توان های کسری بازنویسی می کنیم:
حال می توانیم با انتگرال گیری از تابع شتاب، تابع سرعت را به دست آوریم

$$dv = a(t)dt \Rightarrow \int_{-1}^v dv = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \left(-t^{\frac{1}{4}} + t^{\frac{1}{3}} - 1 \right) dt$$

در نتیجه (فراموش نکنیم که $n \neq -1$) $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$

$$[v]_{-1}^v = \left[-\frac{1}{\frac{1}{4}+1} t^{\frac{1}{4}+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} t^{\frac{1}{3}+1} - t \right]_0^t = \left[-\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t \right]_0^t$$

$$v - (-1) = \left[-\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t \right] - \left[-\frac{4}{5} \cdot 0^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} \cdot 0^{\frac{4}{3}} - 0 \right]$$

$$v - (-1) = -\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - t - 1 \quad \text{بنابراین}$$

دو چک جواب را پیگیری کنید (شرط اولیه، مشتق گیری).

تمرین: انتگرال گیری از مسیر حرکت

$$a(t) = -\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t} - 1$$

جسمی بر روی یک خط مستقیم با شتاب

حرکت میکند.

الف) اگر سرعت اولیه $v(t=0) = -1 \text{ m/s}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dv = a(t)dt$ سرعت را به عنوان تابعی از زمان $v(t)$ تعیین کنید.

ب) اگر مکان اولیه $x(t=0) = 6 \text{ m}$ باشد، با انتگرال گیری از معادله $dx = v(t)dt$ مکان را به عنوان تابعی از زمان $x(t)$ تعیین کنید.

پاسخ ب) از تابع سرعت به دست آمده در اسلاید قبل انتگرال میگیریم تا موقعیت به دست آید:

$$dx = v(t)dt \Rightarrow \int_2^x dx = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left(-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} - t - 1 \right) dt$$

بنابراین

$$[x]_2^x = \left[-\frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{5}{4}+1} t^{\frac{5}{4}+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{4}{3}+1} t^{\frac{4}{3}+1} - \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t = \left[-\frac{1}{5} \times \frac{4}{9} t^{\frac{9}{4}} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t$$

$$x-6 = \left[-\frac{16}{45} t^{\frac{9}{4}} + \frac{9}{28} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t \right]_0^t = \left[-\frac{16}{45} t^{\frac{9}{4}} + \frac{9}{28} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t \right] - \left[-\frac{16}{45} \cdot \frac{9}{4} + \frac{9}{28} \cdot \frac{7}{3} - \frac{0^2}{2} - 0 \right]$$

و یا

$$x = -\frac{16}{45} t^{\frac{9}{4}} + \frac{9}{28} t^{\frac{7}{3}} - \frac{t^2}{2} - t + 6$$

دو چک جواب را پیگیری کنید (شرط اولیه، مشتق گیری).

با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.