

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

بردارها در فضای توابع

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ بردارها در فضای توابع
- بردارها در فضای توابع
- ضرب داخلی

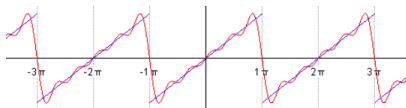
فضاهای برداری

● فضاهای برداری (vector spaces) و یا فضاهای خطی (linear spaces) مجموعه ای از موجودات به نام بردارها هستند که می توان آنها را به طریق خاصی با هم جمع و یا ضرب کرد.

● فضاهای برداری در بخش های بزرگی از ریاضیات، فیزیک و مهندسی کاربرد دارند. به ویژه کاربرد این نظریه در مکانیک کوانتومی برای ما اهمیت بنیادین دارد؛ هرچند، سیستم های کلاسیک شامل حرکت های نوسانی، انتقال جرم و انرژی و حتی نظریه های ذرات بنیادی نیز از این ساختار بهره می برند.

● ایده اساسی فضاهای برداری از تعمیم ایده بردارها در فضای حقیقی می آید؛ هرچند این تشابه در ابتدا چندان واضح به نظر نمی رسد. در واقع در این نظریه ما یک تابع دلخواه را بر اساس یک مجموعه از توابع پایه بسط می دهیم؛ همانطور که تاکنون یک بردار دلخواه را بر اساس مجموعه ای از بردارهای پایه بسط داده ایم.

● مانند مفهوم بردارها، در اینجا نیز ویژگی های تبدیل موجودات و نظریه برای ما مهم است.



● یک مفهوم اساسی در نظریه فضاهای برداری مفهوم

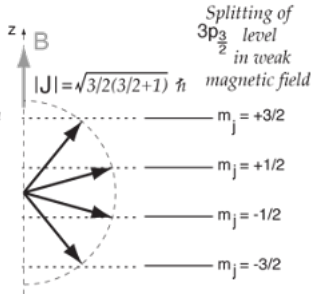
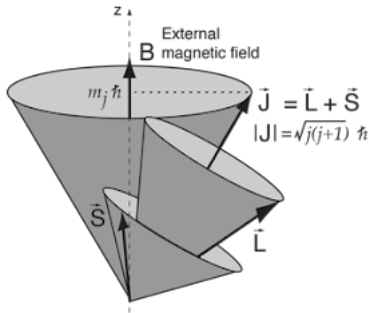
عملگر (operator) است. عملگر موجودی است

که بر روی بردارها عمل کرده و بردارهای جدیدی را

خلق می کند. با عملگر در آینده بیشتر آشنا می شویم.

فضاهای برداری در مکانیک کوانتومی

- چرا فضاهای برداری در مکانیک کوانتومی مهم اند؟
- نکته اینجاست که برخی مشاهده پذیرها (مانند موقعیت و تکانه) در مکانیک طیفی پیوسته دارند در حالی که برخی دیگر از مشاهده پذیرها (مانند اسپین و تکانه زاویه ای) طیفی گسسته دارند. فضاهای برداری به ما کمک می کنند که همه این موجودات را با ریاضیات واحدی توصیف کنیم.
- فضایی که موجودات کوانتومی در آن توصیف می شوند را فضای هیلبرت می نامند. با تعریف دقیق این فضا در ادامه آشنا می شویم.



بردارها در فضای توابع

● فضایی دو بعدی را در نظر بگیرید که با دو مختصه (حقیقی و یا مختلط) a_1 و a_2 توصیف می شود. این دو مختصه به ترتیب با دو تابع $\varphi_1(s)$ و $\varphi_2(s)$ مربوط هستند. توجه کنید که این فضای توابع ربطی به مختصات دکارتی xy و یا دیگر انواع مختصات ندارد.

● حال، همانطور که همیشه می توان یک بردار در فضای دو بعدی را به صورت زیر با استفاده از بردارهای یکه بسط داد:

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2$$

می توان یک تابع دلخواه مانند $f(s)$ را نیز با استفاده از مختصات a_1 و a_2 بسط داد:

$$f(s) = a_1 \varphi_1(s) + a_2 \varphi_2(s)$$

● توجه: مختصات a_1 و a_2 را ضرایب بسط و توابع $\varphi_1(s)$ و $\varphi_2(s)$ را پایه های فضا می نامند.

● دقت کنید که هر تابع دیگر در این فضای توابع را نیز می توان بر اساس این دو توابع پایه بسط داد:

$$g(s) = b_1 \varphi_1(s) + b_2 \varphi_2(s)$$

همچنین از جمع هر دو تابع در این فضا تابع جدیدی تولید می شود:

$$h(s) = f(s) + g(s) = (a_1 + b_1) \varphi_1(s) + (a_2 + b_2) \varphi_2(s)$$

به علاوه از ضرب هر تابع در یک عدد حقیقی و یا مختلط k می توان تابع جدیدی ساخت:

$$u(s) = k f(s) = k a_1 \varphi_1(s) + k a_2 \varphi_2(s)$$

بردارها در فضای توابع

- یک فضای برداری که برای آن، جمع هر دو عضو با هم و یا ضرب هر عضو در یک اسکالر k باز هم عضوی از آن فضا شود را تحت عملیات جمع و ضرب در اسکالر بسته (closed) می نامند.
- به تشابه کلی جبر بردارها و جبر فضای توابع دقت کنید. درک درست این تشابه کلید درک فضاهای برداری است.
- توابعی که به عنوان پایه فضا در نظر گرفته می شوند می توانند توابع معمولی، مانند توابع توانی s^n ، باشند. و یا این پایه های فضا می توانند توابع پیچیده تر مانند $e^s = (1 + 3s + 3s^2)$ ، φ_1 ، ماتریس های پائولی و یا حتی موجودات جبری با ویژگی های کاملاً جدید باشند.
- تعداد توابع پایه را ابعاد فضا می نامند. این تعداد می تواند یک عدد طبیعی مانند ۲، ۵، ۸ و ... باشد، و یا بینهایت شمارا.
- **مهمترین محدودیت بر روی پایه های فضا این است که این پایه ها از هم مستقل باشند. این ویژگی باعث می شود که یک موجود مشخص را بتوان به صورت یک بسط یکتا از پایه های فضا نوشت.**
- به مثال هایی که در ادامه می آیند دقت کنید.

توابع لژاندر به عنوان پایه های فضا

- به عنوان اولین مثال، فضای توابعی را در نظر می گیریم که سه بعدی است و توسط سه تابع پایه $P_0(s) = 1$ و $P_1(s) = s$ و $P_2(s) = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ بسط داده شده است. حال به بسط سه تابع زیر بر اساس توابع پایه یاد شده دقت کنید:

$$s + 3 = 3P_0(s) + P_1(s), \quad s^2 = \frac{1}{3}P_0(s) + \frac{2}{3}P_2(s), \quad 4 - 3s = 4P_0(s) - 3P_1(s)$$

- در واقع می توان نشان داد که هر تابع درجه دوم $c_0 + c_1s + c_2s^2$ را بر اساس سه تابع بالا نوشت، چون هر سه تابع مهم ۱ و s و s^2 را می توان با استفاده از پایه های بالا نوشت.
- مثلا به بسط تابع زیر دقت کنید.

$$\begin{aligned} s^2 - 2(s + 3) &= \left[\frac{1}{3}P_0(s) + \frac{2}{3}P_2(s) \right] - 2[3P_0(s) + P_1(s)] \\ &= \left(\frac{1}{3} - 6 \right) P_0(s) - 2P_1(s) + \frac{2}{3}P_2(s). \end{aligned}$$

- توجه کنید که عملیات محاسباتی فقط بر روی ضرایب بسط (و نه پایه های فضا) انجام می شوند. وضعیت کاملا شبیه به جبر بردارهاست که در آن پایه های $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بدون تغییر باقی می مانند، ولی ضرایب آنها در اثر عملیات جبری تغییر می کنند.

فضای توابع

- البته راه های مختلفی برای انتخاب پایه های فضا وجود دارد. یک راه مطمئن استفاده از قضیه های بنیادین آنالیز ریاضی است. مثلاً می توان از بسط مک لورن استفاده کرده

$$f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

و تابع را بر اساس توابع توانی s^n بسط داد.

- البته فضاهای برداری فقط به این موارد محدود نمی شوند. مثلاً فرض کنید اسپین یک الکترون را بر اساس بردارهای α و β بسط می دهیم.

$$f = a_1 \alpha + a_2 \beta \quad g = b_1 \alpha + b_2 \beta$$

این البته یک فضای دو بعدی است. ما هنوز هیچ چیز درباره α و β و به ویژه فیزیک آنها نمی دانیم. ولی می دانیم که تابع زیر نیز یک اسپین الکترون معقول است، چون در فضای اسپینی قرار دارد.

$$f + ig = (a_1 + ib_1)\alpha + (a_2 + ib_2)\beta$$

- توابع اسپینی را با نمادگذاری های $\{ |+\rangle, |-\rangle \}$ ، $\{ |0\rangle, |1\rangle \}$ و غیره در کتاب های فیزیکی نمایش می دهند.

ضرب داخلی

- مانند مورد بردارها، یک تعریف بسیار اساسی در اینجا نیز تعریف ضرب داخلی دو بردار در فضای توابع است.
- ضرب داخلی دو بردار در فضای توابع را با علامت های $\langle f | g \rangle$ ، $[f, g]$ و یا (f, g) نشان می دهند. هرچند، نمادگذاری اول (نمادگذاری دیراک) در کتاب های فیزیکی مرسوم تر است و بنابراین ما بیشتر از آن استفاده می کنیم.
- ضرب داخلی دو بردار باید ویژگی های زیر را داشته باشد:
- مقدار ضرب یک بردار در خودش $\langle f | f \rangle$ باید یک عدد (و نه یک تابع) باشد. این کمیت قرار است که مجذور اندازه بردار f را نشان دهد (ضرب داخلی یک بردار در خودش را به یاد آورید $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$)
- ضرب داخلی باید نسبت به هر دو عضو خطی باشد. توضیحات بیشتر در ادامه!
- تاکنون تعاریف مفید مختلفی برای ضرب داخلی ارائه شده است. هرچند، تعریفی که در فیزیک (به ویژه مکانیک کوانتومی) مقبولیت دارد تعریف زیر است:

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f^*(s) g(s) w(s) ds$$

ضرب داخلی

- تاکنون تعاریف مفید مختلفی برای ضرب داخلی ارائه شده است. هرچند، تعریفی که در فیزیک (به ویژه مکانیک کوانتومی) مقبولیت دارد تعریف زیر است:

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(s)g(s) w(s) ds$$

- در اینجا حدود a و b و تابع وزنی $w(s)$ کاملاً بستگی به مبحث مورد نظر ما دارد. ولی با توجه به اینکه ما معمولاً مقدار $\langle f|f \rangle$ را به عنوان طول بردار تفسیر می کنیم، و از آنجا که $f^*(s)f(s) \geq 0$ ، نتیجه می گیریم که تابع وزنی $w(s)$ باید در بازه انتگرال گیری $[a, b]$ مثبت باشد.

- توجه کنید که رابطه بالا قرار است یک رابطه کلی برای طیف های پیوسته (مانند موقعیت و مکان) و طیف های گسسته (مانند اسپین) باشد. اگر متغیرهای مد نظر ما دارای طیف پیوسته اند، آنگاه رابطه بالا واقعاً یک انتگرال خواهد بود. ولی اگر یک طیف گسسته داشته باشیم، آنگاه رابطه بالا نشان دهنده نوعی جمع بندی است. مثال بعدی را ببینید.

ضرب داخلی در فضای اسپینی

- مثلا ضرب داخلی برای فضای اسپینی الکترون را طوری تعریف می کنیم که پایه های اسپین الکترون بهنجار بوده و بر هم عمود باشند.

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = 1, \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0,$$

فرض کرده ایم که تابع وزنی همان تابع واحد است. در اینصورت با ضرب دو اسپین دلخواه زیر

$$f = a_1 \alpha + a_2 \beta, \quad g = b_1 \alpha + b_2 \beta,$$

می توان نتیجه معمول ضرب داخلی را به دست آورد.

$$\langle f | g \rangle = a_1 b_1 \langle \alpha | \alpha \rangle + a_1 b_2 \langle \alpha | \beta \rangle + a_2 b_1 \langle \beta | \alpha \rangle + a_2 b_2 \langle \beta | \beta \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

این نتیجه با فرض حقیقی بودن ضرایب بسط نوشته شده است.

- دقت کنید که نتیجه اخیر به دلیل یکامتعامد بودن پایه های α و β به دست آمد. بنابراین، تشابه بین فضای اسپینی و بردارها در این است که هر دو یک مجموعه بردارهای یک متعامد دارند و هر دو شکل ضرب داخلی یکسانی دارند.

- فضاهای برداری که تحت جمع بردارها و ضرب آنها در یک اسکالر بسته اند و همچنین برای هر دو عضو آنها یک ضرب داخلی تعریف شده است را فضای هیلبرت می نامند. فضاهای هیلبرت در فیزیک اهمیت اساسی دارند. این نوع فضاها را در جلسات بعدی به صورت دقیق تر بررسی می کنیم.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید بردارها در فضای توابع و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ مفهوم فضای برداری را به زبان ساده بیان کنید.

۲ درباره کاربردهای فضاهای برداری در بخش های مختلف فیزیک تحقیق کنید.

۳ منظور از ضرایب بسط و پایه های فضا در فضای توابع چیست؟

۴ منظور از بسته بودن یک فضا تحت عملیات جبری خاص چیست؟

۵ درباره اسپین الکترون تحقیق کنید.

۶ منظور از ضرب داخلی در فضای توابع چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

• این جلسه تمرین نداریم!

مبحث بعدی: فضای هیلبرت

- در جلسه بعد تعریف و ویژگی های فضای هیلبرت را بیان کرده و سپس نامساوی شوارتس را بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

