

# فیزیک مکانیک

## جلسه هفتم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

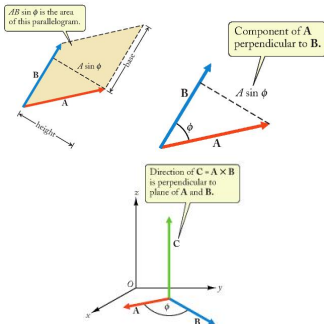


دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
  - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- [h.shenavar@gmail.com](mailto:h.shenavar@gmail.com)
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

## ۱ جلسه هفتم رفع اشکال و حل تمرین

## هندسه بردارها؛ ضرب خارجی ( برداری ) دو بردار



ضرب خارجی ( برداری ) دو بردار: عبارت  $\vec{A} \times \vec{B}$  را به صورت  $\vec{A}$  کراس  $\vec{B}$  بخوانید. حاصلضرب  $\vec{A} \times \vec{B}$  یک بردار است. پس ضرب خارجی کمیتی جهت دار است.

اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار  $\vec{A} \times \vec{B}$  برابر است با

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \phi$$

که همان مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار است ( چرا ؟ ).

راستای بردار  $\vec{A} \times \vec{B}$  بر هر دو بردار  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  عمود است. همچنین، جهت  $\vec{A} \times \vec{B}$  با استفاده از قاعده دست راست پیدا می شود؛ به این صورت که چهار انگشت دست راست را در جهت بردار اول قرار داده و آنها را به سمت بردار دوم میپیچانیم. آنگاه انگشت شست جهت بردار حاصلضرب را نشان می دهد. با توجه به این نکته درمی یابیم که ضرب خارجی دو بردار خاصیت پادجابیه جایی دارد:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

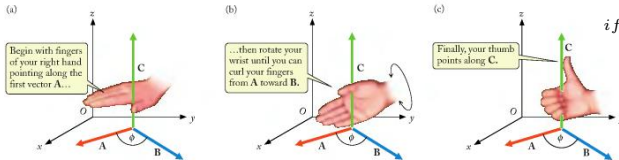
برای دو بردار همراستا داریم:

$$\text{if } \phi = 0 \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

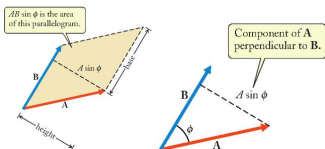
نمونه ضرب خارجی:  
گشاور

$$\vec{r} = \vec{r} \times \vec{F}$$

شکل ها از اوهایان.



## جبر بردارها؛ ضرب خارجی دو بردار



نتیجه ضرب خارجی دو بردار به صورت مولفه ای:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i}$$

$$+ (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j}$$

$$+ (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ضرب خارجی خاصیت پادجابه جایی دارد:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

برای پیدا کردن نتیجه جبری ضرب خارجی دو بردار، یعنی  $\vec{A} \times \vec{B}$ ، باید در ابتدا نتیجه ضرب خارجی بردارهای پایه را بیابیم. برای اینکار، با توجه به تعامد بردارهای پایه متفاوت داریم:

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

و همچنین با توجه به اینکه هر بردار با خودش همجهت است داریم:

$$\phi = 0 \Rightarrow \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

بنابراین حاصلضرب خارجی دو بردار  $\vec{A} \times \vec{B}$  برابر است با

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

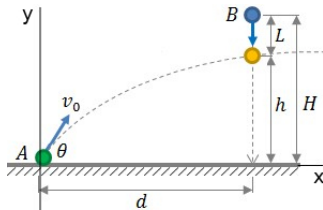
$$= A_x B_x \cancel{\hat{i} \times \hat{i}} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k}$$

$$+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \cancel{\hat{j} \times \hat{j}} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k}$$

$$+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \cancel{\hat{k} \times \hat{k}}$$

شکل ها از او هانین.

## مثال از حرکت پرتابی



<http://www.ambrsoft.com/>

مساله شلیک به میمون اسباب بازی: دو جسم  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید که به فاصله  $d$  از هم قرار دارند. جسم  $A$  با زاویه  $\theta$  و سرعت اولیه  $v_0$  شلیک شده و همزمان جسم  $B$  رها می شود. دو جسم در ارتفاع  $h$  با هم برخورد می کنند. زاویه  $\theta$  و سرعت اولیه  $v_0$  پرتابه را بیابید.

ویدئوی مربوطه را ببینید.

راهنمایی: معادلات حرکت را برای هر دو متحرک به صورت مجزا نوشته و شرط برابر بودن ارتفاع آن دو (در لحظه برخورد) را اعمال کنید.

## مثال حرکت پرتابی- پاسخ اول

بنابراین گلوله باید دقیقاً به سمت میمون شلیک شود.

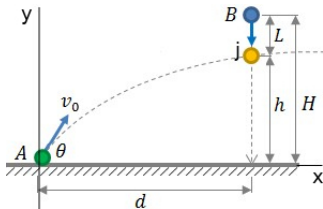
پیدا کردن سرعت اولیه: در نقطه برخورد داریم:

$$-\frac{1}{2}gt_j^2 + H = h \Rightarrow t_j = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

از طرفی داریم  $\sin \theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + d^2}}$  بنابراین:

$$v_o = \frac{H}{t_j \sin \theta} = \frac{H}{\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \frac{H}{\sqrt{H^2 + d^2}}}$$

$$v_o = \sqrt{g \frac{H^2 + d^2}{2(H-h)}}$$



<http://www.ambrsoft.com/>

پاسخ: جهت محور عمود را به سمت بالا و جهت محور افقی را به سمت راست فرض می‌کنیم. حال علامت همه کمیت‌ها را با استفاده از جهت قراردادی محورها تعیین می‌کنیم. چهار رابطه اصلی حرکت گلوله به صورت زیر هستند:

$$x_b(t) = v_o t \cos \theta + x_o$$

$$v_{b,y}(t) = -gt + v_o \sin \theta$$

$$y_b(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t \sin \theta + y_o$$

همچنین برای حرکت میمون ( حرکت با شتاب ثابت در راستای خط راست ) داریم:

$$x_m(t) = d$$

$$y_m = -\frac{1}{2}gt^2 + H$$

$$v_{m,y}(t) = -gt$$

در نقطه برخورد داریم:

$$y_m(t) = y_b(t) = h \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_o t \sin \theta = -\frac{1}{2}gt^2 + H \Rightarrow t_j = \frac{H}{v_o \sin \theta}$$

$$x_m(t) = x_b(t) \Rightarrow v_o t \cos \theta = d \Rightarrow t_j = \frac{d}{v_o \cos \theta}$$

با مساوی قرار دادن این دو زمان داریم:

$$t_j = t_j \Rightarrow \frac{H}{v_o \sin \theta} = \frac{d}{v_o \cos \theta} \Rightarrow \tan \theta = \frac{H}{d}$$

## مثال از حرکت پرتابی- پاسخ دوم

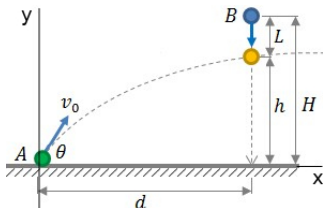
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{2h - 2H + 2h}{2d} = \frac{H}{d}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{H}{d}\right)$$

$$v_0 = \frac{d}{\cos \theta} \sqrt{\frac{g}{2L}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + H^2}}$$

$$v_0 = \sqrt{g \frac{H^2 + d^2}{2(h - H)}}$$



<http://www.ambrsoft.com/>

مساله شلیک به میمون اسباب بازی: دو جسم  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید که به فاصله  $d$  از هم قرار دارند. جسم  $A$  با زاویه  $\theta$  و سرعت اولیه  $v_0$  شلیک شده و همزمان جسم  $B$  رها می شود. دو جسم در ارتفاع  $h$  با هم برخورد می کنند. زاویه  $\theta$  و سرعت اولیه  $v_0$  پرتابه را بیابید.

$$t_A = t_B = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{\frac{2(h - H)}{g}}$$

$$d = v_0 t_B \cos \theta$$

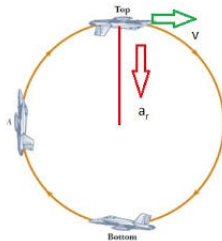
$$h = v_0 \sin \theta t_B + g t_B^2 / 2$$

$$v_0 = \frac{d}{t_B \cos \theta} \quad v_0 = \frac{2h - g t_B^2}{2 t_B \sin \theta}$$

$$\frac{d}{t_B \cos \theta} = \frac{2h - g t_B^2}{2 t_B \sin \theta}$$

$$\frac{d}{\cos \theta} = \frac{2h - g \left(\frac{2L}{g}\right)}{2 \sin \theta}$$

# تمرین: تولید شتاب $1g$

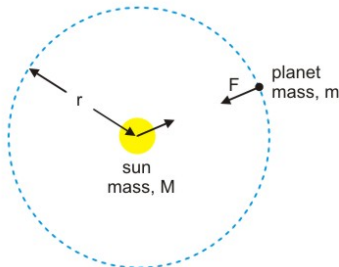


یک جت با سرعت  $134\text{ m/s}$  در حال حرکت مستقیم است. خلبان تصمیم می‌گیرد که با یک چرخش عمودی، شتابی برابر  $1g$  تولید کند. اگر در حین این چرخش، سرعت تغییر نکند، شعاع دایره طی شده توسط هواپیما چقدر باید باشد؟

پاسخ:

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a} = \frac{134^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 182 \text{ km}$$

# تمرین



مقادیر جدول از نوشته های کپلر ( سال ۱۶۱۸ میلادی) استخراج شده اند. از نتیجه قسمت (ب) می توان جرم خورشید را پیدا کرد.

| Planet  | r (AU) | T (day) | $\frac{r^3}{T^2} (10^6 \frac{AU^3}{day^2})$ |
|---------|--------|---------|---------------------------------------------|
| Mercury | 0.389  | 87.77   | 7.64                                        |
| Venus   | 0.724  | 224.70  | 7.52                                        |
| Earth   | 1      | 365.25  | 7.50                                        |
| Mars    | 1.524  | 686.95  | 7.50                                        |
| Jupiter | 5.2    | 4332.62 | 7.49                                        |
| Saturn  | 9.510  | 10759.2 | 7.43                                        |

حرکت دایره ای یکنواخت:

سیاره ای به جرم  $m$  با سرعت یکنواخت  $v$  در حال دوران به دور خورشید به جرم  $M$  می باشد. شتاب جانب مرکز این دوران برابر

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{و نیروی گرانش برابر} \quad F = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{می باشد.}$$

شعاع دوران سیاره  $r$ ، سرعت آن  $v$  و دوره تناوب آن  $T$  می باشد. الف) رابطه بین  $v$  و  $T$  و  $r$  را بنویسید.

ب) با استفاده از قانون دوم نیوتن ( $F = ma$ ) مقدار کسر

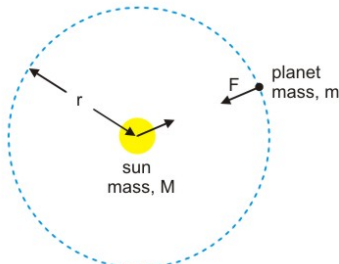
$$\frac{r^3}{T^2} \quad \text{را بر حسب} \quad G \quad \text{و} \quad M \quad \text{بیابید.}$$

اطلاعات عمومی: این نتیجه را قانون سوم کپلر می نامند. بنا به

این قانون، همانطور که در ستون چهارم جدول زیر می بینید، مقدار

$$\frac{r^3}{T^2} \quad \text{برای تمام سیارات منظومه شمسی تقریباً ثابت است.}$$

## تمرین



مقادیر جدول از نوشته های کپلر ( سال ۱۶۱۸ میلادی) استخراج شده اند. از نتیجه قسمت (ب) می توان جرم خورشید را پیدا کرد.

| Planet  | r (AU) | T (day) | $\frac{r^3}{T^2} (10^6 \frac{AU^3}{day^2})$ |
|---------|--------|---------|---------------------------------------------|
| Mercury | 0.389  | 87.77   | 7.64                                        |
| Venus   | 0.724  | 224.70  | 7.52                                        |
| Earth   | 1      | 365.25  | 7.50                                        |
| Mars    | 1.524  | 686.95  | 7.50                                        |
| Jupiter | 5.2    | 4332.62 | 7.49                                        |
| Saturn  | 9.510  | 10759.2 | 7.43                                        |

حرکت دایره ای یکنواخت:  
سیاره ای به جرم  $m$  با سرعت یکنواخت  $v$  در حال دوران به دور خورشید به جرم  $M$  می باشد. شتاب جانب مرکز این دوران برابر  $a = \frac{v^2}{r}$  و نیروی گرانش برابر  $F = \frac{GMm}{r^2}$  می باشد. شعاع دوران سیاره  $r$ ، سرعت آن  $v$  و دوره تناوب آن  $T$  می باشد.

الف) رابطه بین  $v$  و  $T$  و  $r$  را بنویسید.  
پاسخ الف:  $v = \frac{2\pi r}{T}$

ب) با استفاده از قانون دوم نیوتن ( $F = ma$ ) مقدار کسر  $\frac{r^3}{T^2}$  را بر حسب  $G$  و  $M$  بیابید.  
پاسخ ب:

$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

اطلاعات عمومی: این نتیجه را قانون سوم کپلر می نامند. بنا به این قانون، همانطور که در ستون چهارم جدول زیر می بینید، مقدار  $\frac{r^3}{T^2}$  برای تمام سیارات منظومه شمسی تقریباً ثابت است.

## تمرین

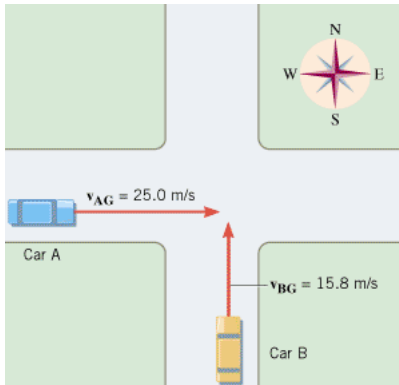
سرعت هرکدام از ماشین های  $A$  و  $B$  نسبت به زمین در شکل معلوم شده است.

الف) سرعت ماشین  $A$  نسبت به ماشین  $B$  را بیابید. زاویه  $\theta$  چقدر است؟

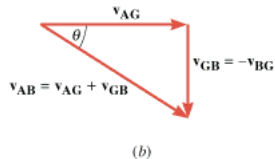
ب) سرعت ماشین  $B$  نسبت به ماشین  $A$  را بیابید.

پ) سرعت های پیدا شده در جواب های الف و ب با هم چه ارتباطی دارند؟

شکل از <https://webassign.net/>



(a)



(b)

## تمرین

پاسخ پ:

$$\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$$

<https://webassign.net/>
شکل از  
net/سرعت هرکدام از ماشین های  $A$  و  $B$  نسبت به زمین در شکل معلوم شده است.الف) سرعت ماشین  $A$  نسبت به ماشین  $B$  را بیابید. زاویه  $\theta$  چقدر است؟ب) سرعت ماشین  $B$  نسبت به ماشین  $A$  را بیابید.

پ) سرعت های پیدا شده در جواب های الف و ب با هم چه ارتباطی دارند؟

پاسخ الف: با توجه به اینکه داریم:

$$\vec{v}_{AG} = -\vec{v}_{GA} = 25 \hat{i}, \quad \vec{v}_{BG} = -\vec{v}_{GB} = 15.8 \hat{j}$$

بنابراین سرعت ماشین  $A$  نسبت به ماشین  $B$  برابر است با

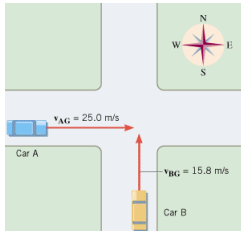
$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AG} + \vec{v}_{GB} = 25 \hat{i} - 15.8 \hat{j}$$

زاویه  $\theta$  برابر است با

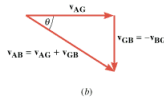
$$\sin \theta = \frac{v_{BG}}{\sqrt{v_{AG}^2 + v_{GB}^2}} = \frac{15.8}{\sqrt{25^2 + 15.8^2}} = 0.53$$

یا  $\theta = 32^\circ$ پاسخ ب: به همین صورت سرعت ماشین  $B$  نسبت به ماشین  $A$  برابر است با

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{BG} + \vec{v}_{GA} = 15.8 \hat{j} - 25 \hat{i}$$



(a)



(b)

با سیاست از توجه شما،  
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود  
باشید.