

# تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

## تبدیلات مختصات و ژاکوبی تبدیل

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:  
[h.shenavar@gmail.com](mailto:h.shenavar@gmail.com)
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

# تبدیلات مختصات و ژاکوبی تبدیل

- ژاکوبی
- وارون ژاکوبی

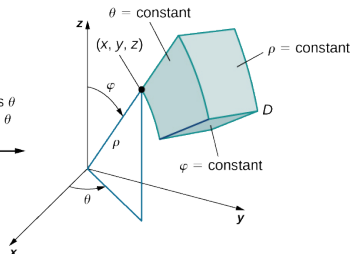
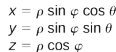


مختصات دکارتی به کروی می توان نوشت

$$\iiint_G f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

wrong!

ولی این رابطه غلط است!



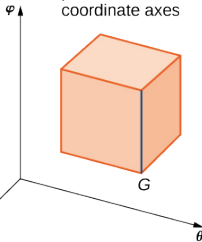
Cartesian xyz-space

## چرا ژاکوبی؟!؟

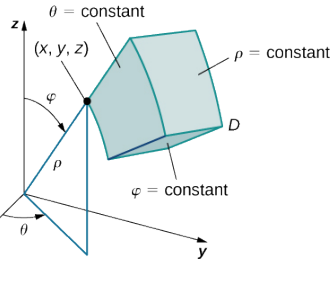
- در ابتدا توجه می کنیم که دیفرانسیل انتگرال گیری در سمت چپ رابطه به درستی از جنس حجم  $L^3$  است، در حالی که دیفرانسیل انتگرال گیری در سمت راست از جنس طول  $L$  است که مطمئناً غلط است. هرچند، از شکل زیر می بینیم که دیفرانسیل انتگرال گیری باید به صورت  $dx dy dz \Rightarrow \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$

تبدیل شود. بنابراین

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_G f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

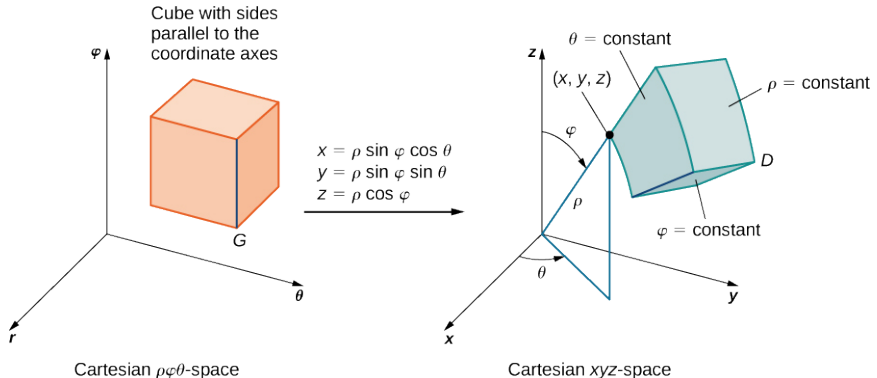
Cube with sides  
parallel to the  
coordinate axes

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}$$



## چرا ژاکوبی؟!

• دلیل این تبدیل از لحاظ هندسی در این مورد از فضای سه بعدی واضح است؛ ولی سوال مهم این است که تبدیل کلی انتگرال ها در فضای  $n$  بعدی غیرمتعامد چطور است؟ پاسخ در موجودی به نام ژاکوبی ( Jacobians ) نهفته است و ما این موضوع را امروز بررسی خواهیم کرد. هرچند، ژاکوبی فقط در تبدیل انتگرال ها ظاهر نمی شود بلکه در بسیاری از مسائل تبدیل و پایداری اهمیت دارد.



## ژاکوبی تبدیل

- برای پیدا کردن فرمول ژاکوبی  $J$  در ابتدا بردار جابجایی دیفرانسیلی  $ds$  در دستگاه مختصات دکارتی در اثر تبدیل در متغیرهای جدید  $u_i$  را می یابیم:

$$ds(u_1) = \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right) \hat{e}_2 + \dots \right]$$

$$ds(u_2) = \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right) \hat{e}_2 + \dots \right]$$

$$ds(u_3) = \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \right) \hat{e}_2 + \dots \right]$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

در اینجا مشتقات جزئی  $\partial x_i / \partial u_j$  در شرایطی محاسبه می شوند که همه  $u_{k \neq j}$  ثابت نگه داشته شده اند.

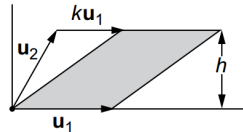
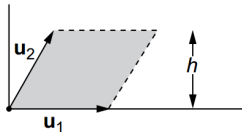
- معنی این تبدیل چیست؟ اگر ما فقط دو متغیر  $u_1$  و  $u_2$  داشته باشیم، آنگاه دیفرانسیل مساحت در انتگرال دوگانه برابر است با اندازه  $|ds(u_1)|$  ضربدر مولفه ای از  $ds(u_2)$  که عمود بر بردار  $ds(u_1)$  می باشد. همچنین اگر مختصه سوم  $u_3$  را نیز داشته باشیم، باید مولفه  $ds(u_3)$  که عمود بر هر دو بردار  $ds(u_1)$  و  $ds(u_2)$  می باشد را نیز وارد کنیم.

## ژاکوبی تبدیل

- ولی در مختصات  $n > 3$  بعدی وضعیت به این وضوح نیست. یعنی حجم دیفرانسیلی انتگرال گیری را نمی توانیم به این سادگی بیابیم. ولی اجازه دهید رابطه بالا را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{pmatrix} \frac{ds(u_1)}{du_1} \\ \frac{ds(u_2)}{du_2} \\ \frac{ds(u_3)}{du_3} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

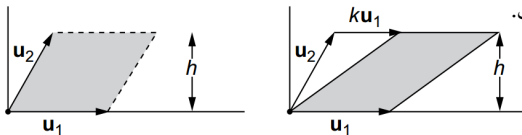
حالا ماتریس تبدیل بالا را در نظر بگیرید. می توان تغییراتی را در این ماتریس به وجود آورد که روابط  $ds(u_i)/du_i$  را به هم خواهد زد، ولی حجم دیفرانسیل انتگرال گیری را بدون تغییر باقی خواهد گذاشت ( که البته این نکته دوم برای ما مهم است! ).





## ژاکوبی تبدیل

مثلا می توان از سطر دوم ماتریس یاد شده ضربی از سطر اول را کم کرد که باعث شود "درایه ستون اول از سطر دوم صفر" شود. اینکار باعث نمی شود که حجم دیفرانسیل انتگرال گیری تغییر کند، زیرا همانطور که شکل زیر نشان می دهد، ضرب  $ku_1$  به بردار  $u_2$  اضافه شده و مساحت ناحیه رنگی تغییر نکرده است.



همین کار را می توان برای مولفه های غیرقطری دیگر نیز انجام داد. همانطور که در بالا گفته شد، در نتیجه این قطری سازی روابط  $ds(u_i)/du_i$  تغییر خواهند کرد؛ ولی حجم دیفرانسیل انتگرال گیری بدون تغییر باقی خواهد ماند. مثلا اگر داشته باشیم  $a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$  و ماتریس تبدیل نیز  $4 \times 4$  باشد، آنگاه ماتریس تبدیل را می توان به شکل زیر قطری کرد بدون اینکه دیفرانسیل حجم انتگرال تغییر کند:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix}$$

## ژاکوبی تبدیل

- بنابراین در حالت کلی حجم دیفرانسیلی انتگرال گیری برابر است با دترمینان ماتریس بالا ضرب در دیفرانسیل های مختصات جدید:

$$d\tau = J du_1 du_2 \dots, \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial(u_1, u_2, \dots)}$$

- یک نکته درباره نامگذاری: دترمینان  $J$  را دترمینان ژاکوبی می نامند. در برخی منابع، ماتریس تبدیل بالا را نیز ماتریس ژاکوبی می نامند. هرچند، در آینده هر جا به ژاکوبی اشاره کردیم، منظور ما دترمینان ژاکوبی  $J$  است.
- نکته: جای سطرها در دترمینان بالا دلخواه است و البته باعث می شود که ژاکوبی های تبدیل در یک منفی با هم اختلاف داشته باشند. این البته به دلیل انتخاب دستگاه های مختصات چپگرد و راستگرد است. هرچند، حجم دیفرانسیلی انتگرال گیری معمولا مثبت فرض می شود و در نتیجه قدرمطلق ژاکوبی اهمیت دارد.

## مثال هایی از ژاکوبی

مثال: فرض کنید در فضای دو بعدی از مختصات دکارتی  $x$  و  $y$  به مختصات جدید  $u$  و  $v$  منتقل شده ایم. در این صورت، حجم دیفرانسیلی دوبعدی (مساحت دیفرانسیلی) در انتگرال دوگانه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$dA = du dv \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right]$$

تمرین: در تبدیل انتگرال  $\int \int f(x, y) dx dy$  از مختصات دکارتی به مختصات قطبی  $\int \int f(r, \theta) r dr d\theta$  به جای  $r$  باید چه کمیتی را قرار دهیم؟

تمرین: فرض کنید در فضای سه بعدی از مختصات دکارتی  $x$  و  $y$  و  $z$  به مختصات جدید  $u$  و  $v$  و  $w$  منتقل شده ایم. در این صورت، حجم دیفرانسیلی سه بعدی در انتگرال سه گانه به چه صورتی تبدیل می شود؟

تمرین: حجم دیفرانسیلی انتگرال سه گانه از مختصات دکارتی به مختصات قطبی کروی چطور تغییر خواهد کرد؟

تمرین: حجم دیفرانسیلی انتگرال سه گانه از مختصات دکارتی به مختصات قطبی استوانه ای چطور تغییر خواهد کرد؟

## وارون ژاکوبی

- حالا تبدیل وارون از دستگاه  $u_1, u_2, \dots$  به دستگاه  $x_1, x_2, \dots$  را در نظر بگیرید. در اینصورت ژاکوبی تبدیل به صورت زیر نوشته می شود:

$$J^{-1} = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots)}{\partial(x_1, x_2, \dots)}$$

با توجه به اینکه این ژاکوبی نشان دهنده تبدیل وارون است، آن را با علامت  $J^{-1}$  نشان می دهیم. می خواهیم نشان دهیم که مقدار این ژاکوبی برابر است با  $1/J$ .

- برای اینکار اجازه دهید که ماتریس های مربوط به هر دو ژاکوبی را به صورت زیر بنویسیم:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

پس داریم  $J = \det(A)$  و  $J^{-1} = \det(B)$ . در واقع می خواهیم نشان دهیم

$$JJ^{-1} = \det(A) \det(B) = 1$$

## تبدیل وارون

- البته اثبات رابطه بالا نسبتاً آسان است، اگر رابطه زیر از دترمینان حاصلضرب دو ماتریس را به یاد داشته باشیم:

$$\det(A) \det(B) = \det(AB)$$

و حالا باید اثبات کنیم که نتیجه ماتریس حاصلضرب  $AB$  در واقع همان ماتریس همانی است:

$$(AB)_{ij} = \sum_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = \left( \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) = \delta_{ij}$$

پایان اثبات.

- رابطه بین ژاکوبین و وارون آن اهمیت کاربردی دارد. مثلاً در برخی موارد محاسبه مشتقات  $\partial u_j / \partial x_i$  آسانتر از محاسبه مشتقات  $\partial x_i / \partial u_j$  است. در نتیجه در ابتدا  $J^{-1}$  را یافته و از آن مقدار  $J$  را می‌یابیم.

- تمرین: ژاکوبی تبدیل از دستگاه مختصات کروی به دستگاه مختصات دکارتی را بیابید. از روابط زیر استفاده کنید.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

## ژاکوبی تبدیل از دستگاه مختصات کروی به دکارتی

- تمرین: ژاکوبی تبدیل از دستگاه مختصات کروی به دستگاه مختصات دکارتی را بیابید. از روابط زیر استفاده کنید.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

پاسخ: پس از محاسبه بسیار داریم

$$J = \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{xz}{r^2\rho} & \frac{yz}{r^2\rho} & -\frac{\rho}{r^2} \\ -\frac{y}{\rho^2} & \frac{x}{\rho^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r\rho} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}$$

ولی محاسبه  $J^{-1}$  با استفاده از روابط زیر آسانتر است:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

زیرا

$$J^{-1} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

از اینجا می توان سریعاً نتیجه گرفت  $J = 1/J^{-1} = 1/r^2 \sin \theta$

# نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید تبدیلات مختصات و ژاکوبی تبدیل و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ درباره اهمیت ژاکوبی پژوهش کنید.
- ۲ توضیح دهید که چطور ژاکوبی می تواند دیفرانسیل فضای انتگرال گیری را در تبدیلات برای ما مشخص کند.
- ۳ رابطه بین ژاکوبی و وارون آن چیست؟
- ۴ چرا برخی اوقات کار کردن با وارون ژاکوبی راحت تر از کار کردن با ژاکوبی است؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



## تمرین

- تمرینات صفحات ۲۳۱ و ۲۳۲ از ویرایش هفتم کتاب آرفکن و همکاران را حل کنید.



## مبحث بعدی: فرم های دیفرانسیلی

- در جلسه بعد وارد مبحث فرم های دیفرانسیلی خواهیم شد.

$$dF = 0$$

$$d \star F = \star J$$

## منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition ) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press ( 2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition ) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press ( 2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill ( 1953 )
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما