

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

ششمین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در زمستان ۱۳۹۹ و بهار ۱۴۰۰ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

ششمین جلسہ حل تمرین

پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی



یادآوری مفهوم پتانسیل الکتریکی



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۱ اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ به مسیر انجام کار بستگی نداشته باشد، آنگاه آن نیرو را پایستار می نامیم. می توان برای نیروهای پایستار یک انرژی پتانسیل یکتا تعریف کرد:

$$\Delta U = U_b - U_a \equiv W_{ab} = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

۲ نیروی الکتریکی پایستار است؛ بنابراین، انرژی پتانسیل الکتریکی داریم.

۳ رابطه بین انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

۴ انرژی پتانسیل الکتریکی بین دو بار نقطه ای

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

۵ پتانسیل یک کمیت اسکالر است، یعنی جهت ندارد. چقدر خوب! لازم نیست نگران جهت کمیت ها در محاسبات خود باشیم.

پتانسیل الکتریکی یک بار نقطه ای

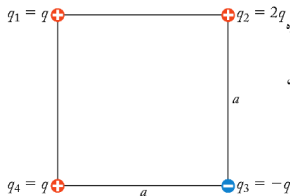
$$V = K \frac{q}{r}$$

پتانسیل الکتریکی با استفاده از میدان:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

اصل برهمه‌نی

انرژی پتانسیل الکتریکی یک سیستم



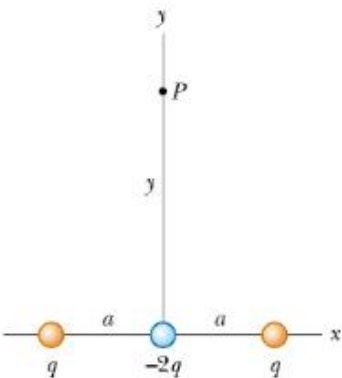
در شکل مقابل داریم $q = 2.0 \mu C$ و $a = 7.5 \text{ cm}$. انرژی کل پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در این سیستم را بیابید.

فراموش نکنیم که مفهوم انرژی پتانسیل الکتریکی بین دو بار الکتریکی تعریف می شود (در عوض، مفهوم پتانسیل الکتریکی فقط مربوط به یک بار الکتریکی است).

شکل از او هانیان.

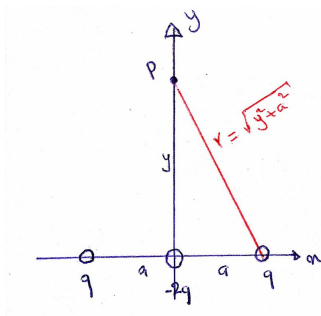
$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(q)(2q)}{a} + \frac{(q)(-q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(2q)(-q)}{a} + \frac{(q)(q)}{a} + \frac{(2q)(q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(-q)(q)}{a} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \left(2 + \frac{-1}{\sqrt{2}} - 2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(2.0 \times 10^{-6} \text{ C})^2}{(0.075 \text{ m})} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.34 \text{ J}
 \end{aligned}$$

مثالی از محاسبه پتانسیل الکتریکی توزیع بارهای گسسته



پتانسیل الکتریکی یک چهارقطبی:
 الف) در شکل مقابل پتانسیل الکتریکی V در
 نقطه P واقع بر محور y را حساب کنید ب)
 اگر نقطه P در فاصله بسیار دوری قرار گرفته
 باشد، یعنی $y \gg a$ ، مقدار پتانسیل چقدر
 است؟ راهنمایی: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$
 شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

پاسخ



۱ با توجه به اینکه پتانسیل هر بار Q در فاصله R برابر است با KQ/R ، و اصل برهمه‌نی که بیان می‌کند پتانسیل کل برابر است با مجموع تک تک پتانسیل‌ها، داریم:

$$V = \frac{Kq}{r} - \frac{2Kq}{y} + \frac{Kq}{r} = 2Kq \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + a^2}} - \frac{1}{y} \right)$$

۲ در فواصل بسیار زیاد $a \gg y$ داریم:

$$V = 2Kq \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + a^2}} - \frac{1}{y} \right) = 2Kq \left(\frac{1}{y\sqrt{1 + a^2/y^2}} - \frac{1}{y} \right)$$

$$V = \frac{2Kq}{y} \left(\left(1 + \frac{a^2}{y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{2Kq}{y} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{y^2} + \dots - 1 \right)$$

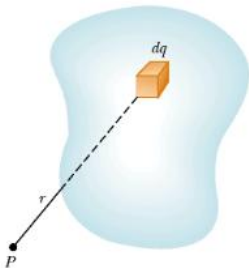
بنابراین، پتانسیل یک چهارقطبی در نقاط بسیار دوردست به صورت

$$V(y \gg a) = -\frac{Kqa^2}{y^3}$$

به دست می‌آید.

پتانسیل توزیع بارهای پیوسته - روش کلی

می خواهیم پتانسیل ناشی از یک توزیع بار دلخواه (مثل شکل مقابل) را در نقطه P بیابیم.



۱ تا اینجا ما فقط پتانسیل ناشی از بارهای نقطه ای را می دانیم.

۲ در حالت کلی می توان هر توزیع بار دلخواه را به تعداد بسیار زیادی بار نقطه ای dq تجزیه کرد. پتانسیل یک بار نقطه ای dq در نقطه P برابر است با $dV = K \frac{dq}{r}$.

۳ حال با توجه به اصل برهمه می توان فهمید که پتانسیل ناشی از کل توزیع بار برابر است با جمع تک تک پتانسیل ها:

$$V = K \int \frac{dq}{r}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

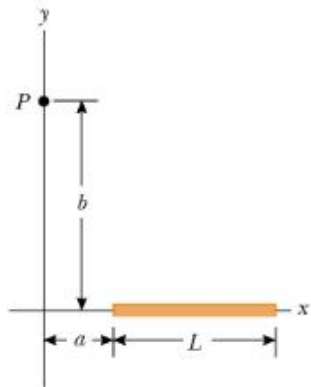
جمع بندی در اینجا به معنی انتگرال گیری است.

۴ باز هم محاسبه انتگرال بالا در حالت کلی ساده نخواهد بود. بنابراین باید از روش المان ها استفاده کنیم.

۵ به مثال های زیر دقت کنید

مزیت مهم نسبت به میدان: پتانسیل جهت ندارد.

مثالی از محاسبه پتانسیل الکتریکی توزیع بارهای پیوسته



در شکل مقابل، بار با چگالی خطی ثابت $\lambda = Q/L$ بر روی میله نارسانا پخش شده است.

پتانسیل در نقطه P را بیابید.
شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

پاسخ

پتانسیل میله را نمی دانیم ولی می توانیم پتانسیل آن را با استفاده از پتانسیل یک المان بار به دست آوریم:

$$dV = \frac{Kdq}{r} \Rightarrow V = \int \frac{Kdq}{r} = \int \frac{Kdq}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

در انتگرال اخیر دو متغیر (x و q) وجود دارد؛ بنابراین، باید یکی از این متغیرها را به دیگری تبدیل کنیم. برای اینکار از تعریف چگالی خطی بار استفاده می کنیم:

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Rightarrow dq = \lambda dx = \frac{Q}{L} dx$$

با استفاده از تغییر متغیر اخیر داریم:

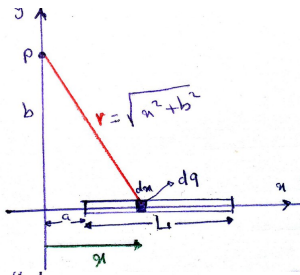
$$V = \int \frac{Kdq}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{KQ}{L} \int_a^{a+L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

$$V = \frac{KQ}{L} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + b^2} \right) \Big|_a^{a+L}$$

$$V = \frac{KQ}{L} \ln \left(a + L + \sqrt{(a+L)^2 + b^2} \right) - \frac{KQ}{L} \ln \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right)$$

$$V = \frac{KQ}{L} \ln \left(\frac{a + L + \sqrt{(a+L)^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

که در آن از رابطه $\ln p - \ln q = \ln \left(\frac{p}{q} \right)$ استفاده کرده ایم.

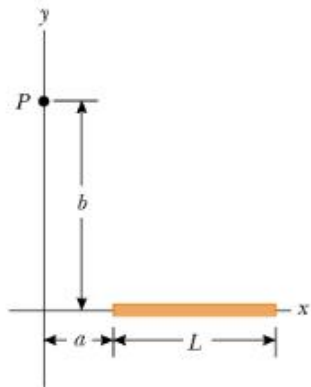


تمرین: نشان دهید

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + b^2} \right) + C$$

نشان دهید که پتانسیل یافت شده در فواصل بسیار دور از میله، یعنی $b \gg a$ و $b \gg L$ ، به شکل معمول KQ/b تبدیل می شود (نمره ارفاقی به اولین نفر که جواب را بیاورد).

محاسبه پتانسیل الکتریکی توزیع بارهای پیوسته با چگالی بار غیر ثابت



در شکل مقابل، چگالی خطی بار به صورت

$$\lambda = \frac{dq}{dx} = \lambda_0 \frac{x}{L}$$

بر روی میله نارسانا پخش شده است.
پتانسیل الکتریکی را در نقطه P و همچنین
در مبدا مختصات بیابید.
شکل از هالیدی، ویرایش هشتم.

با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.