

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

نمادهای کریستوفل و محاسبه آنها

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ نمادهای کریستوفل و محاسبه آنها
- نمادهای کریستوفل نوع اول
- مثال هایی از محاسبه نمادهای کریستوفل

نمادهای کریستوفل نوع اول

- پیشتر فهمیدیم که چطور می توان نمادهای کریستوفل را با استفاده از بردارهای پایه محاسبه کرد.

$$\Gamma_{jk}^m = \epsilon^m \cdot \frac{\partial \epsilon_k}{\partial q^j}$$

در این جلسه می خواهیم نمادهای کریستوفل را به صورت مستقیم از متریک به دست آوریم.

- در ابتدا نمادهای کریستوفل نوع اول را معرفی می کنیم:

$$[ij, k] \equiv g_{mk} \Gamma_{ij}^m$$

دقت کنید که $[ij, k]$ فقط یک نماد است!

- تمرین: تقارن $[ij, k] = [ji, k]$ را اثبات کنید.

- تمرین: نشان دهید که $[ij, k]$ تانسور نیست.

- حال با استفاده از رابطه اول این اسلاید می توان نوشت:

$$\begin{aligned} [ij, k] &= g_{mk} \epsilon^m \cdot \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j} \\ &= \epsilon_k \cdot \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^j}. \end{aligned}$$

متریک و نمادهای کریستوفل

- اکنون با توجه به اینکه متریک و پایه های فضا با استفاده از رابطه $g_{ij} = \epsilon_i \cdot \epsilon_j$ به هم مربوط می شوند، می توان رابطه زیر را بین مشتق متریک و نمادهای کریستوفل نوع اول یافت:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial q^k} \cdot \epsilon_j + \epsilon_i \cdot \frac{\partial \epsilon_j}{\partial q^k}$$

$$= [ik, j] + [jk, i].$$

- تمرین: با نوشتن هر سه جایگشت اندیس های رابطه بالا نشان دهید که رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] = [ij, k]$$

از طرفی می توان از تعریف نماد کریستوفل نوع اول شروع کرده

$$[ij, k] \equiv g_{mk} \Gamma_{ij}^m$$

و با ضرب طرفین رابطه در g^{nk} رابطه زیر را به دست آورد:

$$\Gamma_{ij}^n = \sum_k g^{nk} [ij, k]$$

متریک و نمادهای کریستوفل

- و در نهایت با جایگذاری نمادهای کریستوفل نوع اول در رابطه اخیر می توان نوشت:

$$\Gamma_{ij}^n = g^{nk} [ij, k] = \frac{1}{2} g^{nk} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right]$$

- دقت کنید که فرمولبندی حاضر در مختصات دکارتی کاملاً غیرضروری است، زیرا مشتق پایه های فضا در مختصات دکارتی صفر است. در نتیجه گامهای کریستوفل صفرند و مشتق هموردا و مشتق جزئی کمیت ها با هم برابر خواهند بود.
- ولی در مختصات غیر دکارتی اینگونه نیست. در بخش بعدی با چند مثال از محاسبه Γ_{jk}^{μ} آشنا خواهیم شد.

محاسبه نمادهای کریستوفل در فضای اقلیدسی و مختصات دکارتی

- در جلسات پیش متریک فضای اقلیدسی - و وارون آن - در مختصات دکارتی را به صورت زیر به دست آوردیم:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال: با استفاده از رابطه نمادهای کریستوفل و تانسور متریک، این نمادها را برای مختصات دکارتی بیابید.

$$\Gamma_{ij}^n = g^{nk} [ij, k] = \frac{1}{2} g^{nk} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right]$$

پاسخ: با استفاده از رابطه بالا به راحتی می توان دید

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 g^{1k} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} g_{1k} + \frac{\partial}{\partial q^1} g_{k1} - \frac{\partial}{\partial q^k} g_{11} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 g^{1k} \left(\frac{\partial}{\partial x} g_{1k} + \frac{\partial}{\partial x} g_{k1} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{11} \right) = 0$$

و البته همه گاماها در این مختصات صفرند، چون مولفه های متریک همه ثابتند.

- توجه کنید که برخی اوقات از نمادگذاری $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$ ، برای مشتق جزئی هم استفاده می شود؛

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

مثلا

محاسبه نمادهای کریستوفل در فضای اقلیدسی و مختصات قطبی صفحه ای

• برای متریک قطبی صفحه ای با المان طول

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

می توان تانسور متریک هموردا را به صورت زیر نوشت:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

تمرین: تانسور متریک پادوردا را بیابید.

حال با استفاده از رابطه نمادهای کریستوفل و تانسور متریک

$$\Gamma_{ij}^n = g^{nk} [ij, k] = \frac{1}{2} g^{nk} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right]$$

به راحتی می توان دید (توجه کنید که $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$ ، مثلا $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$):

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{r} \sum_k g^{1k} (\partial_1 g_{1k} + \partial_1 g_{k1} - \partial_k g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{rr}^1 = \frac{1}{r} \sum_k g^{1k} (\partial_r g_{rk} + \partial_r g_{kr} - \partial_k g_{rr}) = -r$$

$$\Gamma_{r1}^2 = \frac{1}{r} \sum_k g^{rk} (\partial_1 g_{rk} + \partial_r g_{k1} - \partial_k g_{1r}) = \frac{1}{r}$$

محاسبه نمادهای کریستوفل در فضای اقلیدسی و مختصات استوانه ای

• برای متریک استوانه ای با المان طول

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

می توان تانسور متریک هموردا را به صورت زیر نوشت:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین: تانسور متریک پادوردا را بیابید.

حال با استفاده از رابطه نمادهای کریستوفل و تانسور متریک

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{ij}^n = g^{nk} [ij, k] = \frac{1}{2} g^{nk} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right]$$

پس از مقدار زیادی محاسبات سراسر می توان دید $\Leftarrow \Leftarrow$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{r} \sum_k g^{1k} (\partial_1 g_{1k} + \partial_1 g_{k1} - \partial_k g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{r} \sum_k g^{2k} (\partial_1 g_{1k} + \partial_1 g_{k1} - \partial_k g_{11}) = -r$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{r} \sum_k g^{3k} (\partial_1 g_{1k} + \partial_1 g_{k1} - \partial_k g_{11}) = \frac{1}{r}$$

محاسبه نمادهای کریستوفل در فضای اقلیدسی و در مختصات قطبی کروی

• در جلسات پیش متریک فضای اقلیدسی - و وارون آن - در مختصات کروی را به صورت زیر به دست آوردیم:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

تمرین: با استفاده از رابطه نمادهای کریستوفل و تانسور متریک، این نمادها را برای مختصات قطبی کروی بیابید (توجه کنید که $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$ ، مثلاً $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$).

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^n = g^{nk} [ij, k] = \frac{1}{2} g^{nk} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right]$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{مثلاً پس از مقدار زیادی محاسبات سراسر می توان دید:}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{r} \sum_k g^{1k} (\partial_1 g_{1k} + \partial_1 g_{k1} - \partial_k g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{r} \sum_k g^{1k} (\partial_2 g_{rk} + \partial_2 g_{k2} - \partial_k g_{22}) = -r$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \sum_k g^{2k} (\partial_1 g_{rk} + \partial_r g_{k1} - \partial_k g_{12}) = \frac{1}{r}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید نمادهای کریستوفل و محاسبه آنها و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ تعریف نماد کریستوفل نوع اول را بنویسید.
- ۲ رابطه نماد کریستوفل نوع دوم بر حسب متریک را بنویسید.
- ۳ روش محاسبه نماد کریستوفل نوع دوم بر حسب متریک را توضیح دهید.
- ۴ گاما های کریستوفل در مختصات دکارتی صفرند. تفسیر این نتیجه چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.



تمرین

- متریک هموردا بر روی یک کره به صورت زیر نوشته می شود. نمادهای کریستوفل این متریک را بیابید. در اینجا r ثابت است و θ و ϕ تغییر می کنند.

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

پاسخ:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cot \theta \\ \cot \theta & 0 \end{pmatrix}$$

تمرین

- متریک هموردا بر روی یک چنبره به صورت زیر نوشته می شود. نمادهای کریستوفل این متریک را بیابید. در اینجا r و R ثابت هستند و u و v تغییر می کنند.

$$ds^2 = (R + r \cos v)^2 du^2 + r^2 dv^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (R + r \cos v)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

پاسخ:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r \sin v}{R + r \cos v} \\ -\frac{r \sin v}{R + r \cos v} & 0 \end{pmatrix}$$

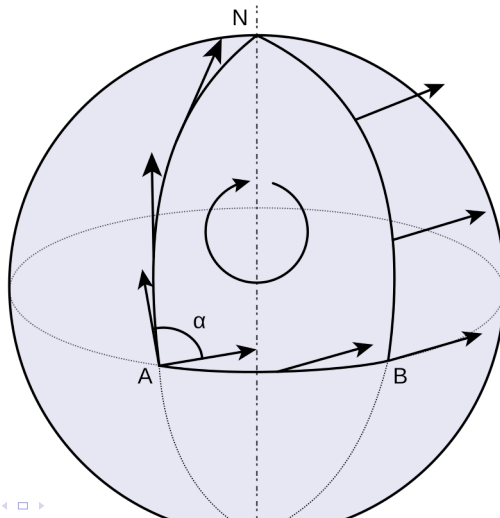
$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{R}{r} \sin v + \sin v \cos v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

منبع متریک ها و نمادهای کریستوفل:

<https://profoundphysics.com/christoffel-symbols-a-complete-guide->

مبحث بعدی: شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی

- در جلسه بعد با شکل تانسوری عملگرهای دیفرانسیلی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما