

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

تانسورها در فیزیک و ریاضی

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ تانسورها در فیزیک و ریاضی
- تانسورها همه جا هستند!
- تعریف تانسور

چرا تانسورها؟!

اصلی ترین دلیل برای مطالعه تانسورها این است که ما به رفتار و ویژگی های هندسی در نظریه ها علاقمند هستیم.

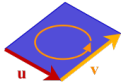
منظور از هندسه در اینجا هندسه اقلیدسی و قضایای آن نیست؛ بلکه هندسه های پیشرفته تر (هندسه های غیر اقلیدسی) و فضاهای پیچیده تر از فضای اقلیدسی مورد نظر است. در واقع دنبال تعمیم مفاهیم هندسی هستیم و تانسورها یکی از بهترین مفاهیم برای اینکار هستند.

در ادامه مثال هایی را از کاربرد تانسورها در فیزیک خواهیم دید.

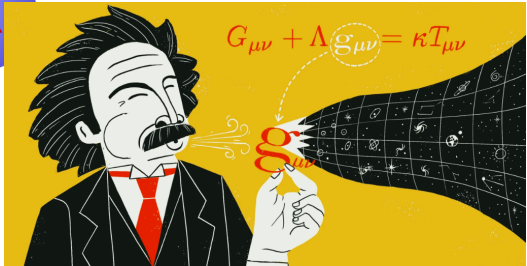
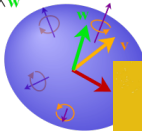
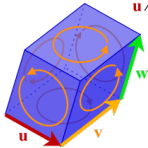
•+



$u \wedge v$



$u \wedge v \wedge w$



تانسورها در الکترومغناطیس

- اگر تانسور مرتبه (رَک rank) دوم زیر را در نظر بگیریم

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

آنگاه می توان چهار معادله ماکسول را به صورت زیر نوشت:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = k j^\nu,$$

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} = 0,$$

- اهمیت این نوع نوشتار فرمولی در این است که با استفاده از آن می توان معادلات را راحت تر به دستگاه های مختصات متفاوت و هندسه های تعمیم داد.

فیزیک مواد

• در فیزیک مواد (به‌ویژه در مکانیک جامدات، ترمودینامیک، مدل‌های کشسانی و رسانش) رفتار مواد در برابر نیرو، گرما، یا میدان‌ها معمولاً با تانسورها توصیف می‌شود.

• تعریف ابتدایی تانسور: یک تانسور مرتبه‌ی n شیئی ریاضی است که با n اندیس نمایش داده می‌شود و می‌تواند روابط میان اسکالر، بردار و سایر تانسورها را بیان کند. مثلاً دما T یک تانسور مرتبه صفر است.

جابجایی $\vec{u}$ یک تانسور مرتبه یک است.

تنش σ_{ij} یک تانسور مرتبه دو است.

گرش ϵ_{ij} هم یک تانسور مرتبه دو می‌باشد و

نشان دهنده تغییر شکل نسبی یک جسم است:

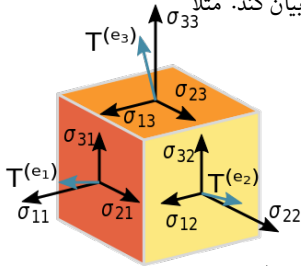
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

و این دو با یک تانسور مرتبه چهارم به نام تانسور سختی به هم مربوط می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

نمادگذاری اندیسی بالا اندکی با نمادگذاری استاندارد که در ادامه این بخش استفاده خواهد شد متفاوت است.

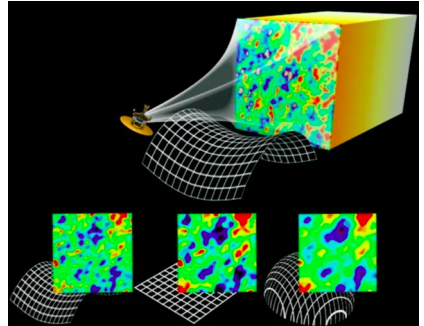
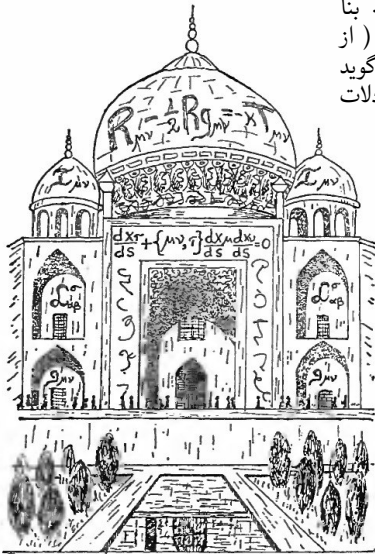
• درباره قانون فوریه برای رسانش گرمایی مواد ناهمسانگرد تحقیق کنید.



نظریه گرانش

نظریه گرانش اینشتین در فضای خمیده نوشته می شود. بنا به این نظریه، ماده به فضا می گوید چطور خمیده شود (از طریق معادلات میدان اینشتین) و فضا به ماده می گوید چطور حرکت کند (معادله ژئودزی). برای فهم این معادلات باید با تانسورها آشنا شویم.

با همه این تانسورها در درس حاضر آشنا خواهیم شد.



تانسورها در مکانیک کوانتومی

• تانسورها در مکانیک کوانتومی نیز اهمیت دارند. به ویژه مفهوم ضرب تانسوری (که قبلا با آن آشنا شده ایم) در مکانیک کوانتومی مهم است.

• فرض کنید حالت کوانتومی هر ذره با بردار $\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ داده می شود. در اینصورت حالت مشترک دو ذره در یک سیستم مرکب با حاصلضرب تانسوری

$$\psi \otimes \phi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix}$$

داده می شود.

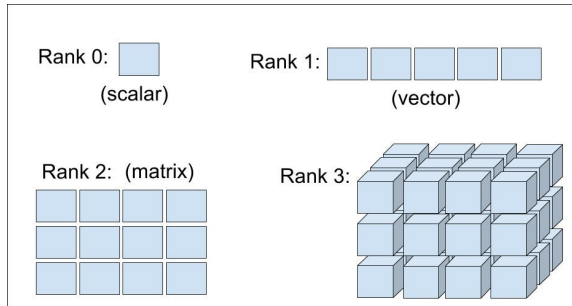
• این فرمولبندی ریاضیاتی از لحاظ مفهومی بسیار غنی است و می تواند مفاهیمی مانند درهمتنیدگی، آنتروپی، تحول زمانی و ... را به خوبی توضیح دهد.

• در ادامه چند تعریف کم و بیش متفاوت برای مفهوم تانسور را بیان می کنیم.



غلط: تانسور به عنوان آرایه ای از اعداد

- در برخی منابع تانسور به عنوان آرایه ای از اعداد معرفی می شود. مثلا اسکالر را یک تانسور مرتبه صفر، بردار را یک تانسور مرتبه یک، ماتریس را یک تانسور مرتبه دو، آرایه سه بعدی را یک تانسور مرتبه سه و ... می نامند.

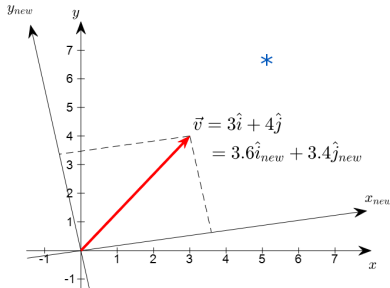


- ولی این غلط است. دقت کنید که درایه های ماتریس ها می توانند هر عددی باشند و قوانین تبدیل آنها در دستگاه های مختلف اهمیتی ندارد (ماتریس ها قانون تبدیل ندارند). ولی تانسورها معنای هندسی دارند و قوانین تبدیل تانسورها از دستگاهی به دستگاه دیگر عملا تعریف کننده آنهاست. پس تعریف بالا برای تانسور غلط است.

تعریف تانسور با استفاده از ناورداها و تبدیل مختصات

• تانسور موجودی است که تحت تبدیل مختصات ناورداست و عناصر آن بنا به قانون مشخصی تحت تبدیل مختصات تغییر می کنند.

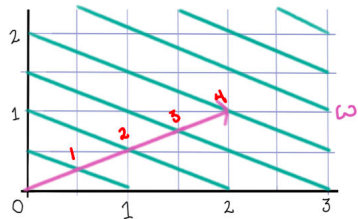
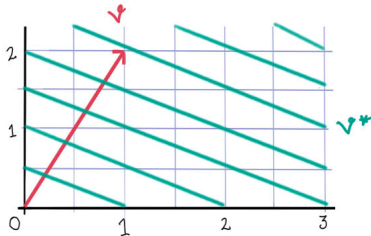
• مثلاً بردار زیر را در نظر بگیرید. این بردار موجودی است که طول و جهتش (مثلاً در راستای یک ستاره) کاملاً مستقل از دستگاه مختصات انتخابی است. پس طول و جهت این بردار ناوردا هستند و ویژگی هندسی آن به شمار می آیند.



• دقت کنید که مولفه های این بردار از دستگاهی به دستگاه دیگر تغییر می کنند. یعنی مولفه های بردار ناوردا نیستند بلکه به دستگاه انتخابی وابسته اند. با این وجود این تغییر بی ضابطه نیست، و در نتیجه خود بردار (اندازه و جهت آن) بدون تغییر باقی می ماند. این تعریف خوبه!

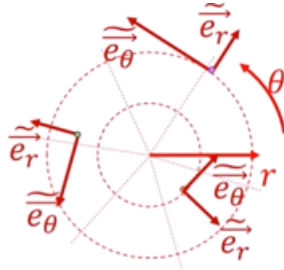
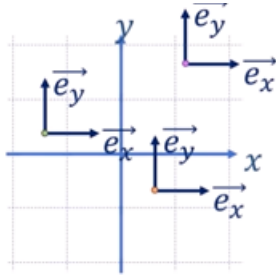
تانسور به عنوان ترکیبی از بردارها و هم بردارها و ضرب تانسوری آنها

- می توان تانسور را به عنوان ترکیبی از بردارها و هم بردارها (که از طریق ضرب تانسوری به هم متصل می شوند) تعریف کرد. ولی برای اینکه به این روش تانسورها را معرفی کنیم، باید معنی هندسی بردارها، هم بردارها و ضرب تانسوری را دقیقاً بدانیم. فعلاً وارد این روش نمی شویم.



تانسورها و حسابان

- روش دیگر معرفی تانسورها استفاده از حسابان (مشتقات جزئی، گرادیان ها و ...) است. به ویژه می توان از مفهوم تانسور برای تعمیم مفهوم مشتق جزئی استفاده کرد. در این مورد از ماتریس ژاکوبی برای فهم اصول تبدیل تانسورها استفاده می شود. ما در آینده بیشتر از این روش برای درک مفهوم تانسورها استفاده خواهیم کرد.



نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید مفهوم تانسورها در فیزیک و ریاضی و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ کاربردهای دیگری را از تانسورها در فیزیک، ریاضی و مهندسی بیابید.

۲ در مورد هر یک از تعاریف گفته شده تانسور تحقیق کنید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

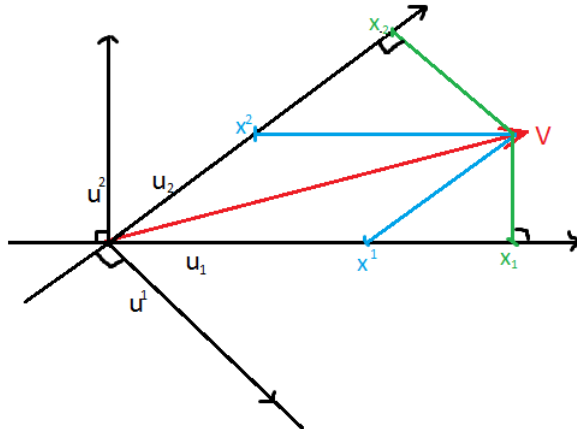


تمرین

• این جلسه تمرین نداریم!

مبحث بعدی: مقدمه ای بر تانسورها

- در جلسه بعد تعریف تانسر را ارائه کرده و درباره تانسورهای هم‌وردا و پادوردا بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

