

تانسورها و فرم های دیفرانسیلی

شبه تانسور و تانسور دوگان

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

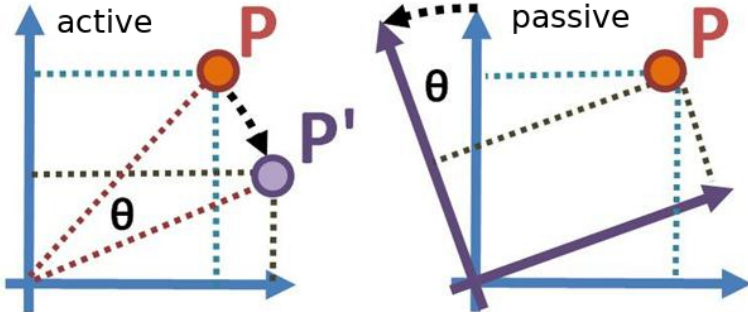
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ۱ شبه تانسور و تانسور دوگان
- شبه تانسور
- تانسور دوگان

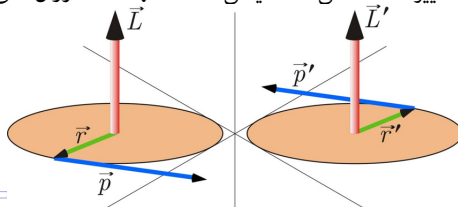
تبدیل های فعال و غیرفعال

- در این درس برای سادگی بر روی تبدیل مختصات دکارتی تمرکز خواهیم کرد.
- تاکنون فقط تبدیل مختصات غیرفعال (passive) یا همان دوران دستگاه مختصات را در نظر گرفته ایم، در این روش، جهت بردارها و تانسورها در فضا ثابت باقی می ماند ولی دستگاه مختصات دوران می کند. تبدیل ها را می توان به صورت فعال (active) هم در نظر گرفت. در این دیدگاه، دستگاه مختصات ثابت باقی می ماند و موجود فیزیکی دوران پیدا می کند.
- این دو روش از لحاظ ریاضیاتی یکسان هستند؛ هرچند، از نظر مفهوم فیزیکی کاملاً متفاوت اند.



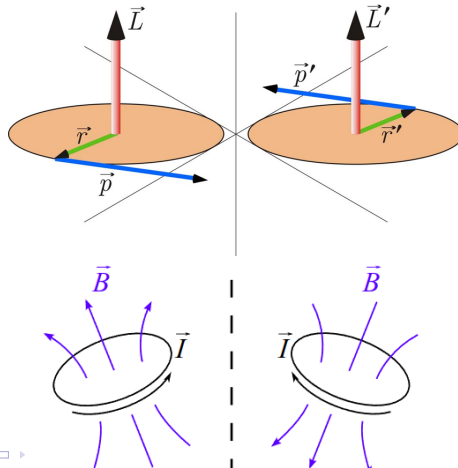
دوران های ناسره

- در اینجا می خواهیم دوران های ناسره (improper rotation) را بررسی کنیم که جزو تبدیلات گسسته (discrete transformations) هستند.
- پیشتر دیده ایم که همه تبدیل های متعامد باعث می شوند که طول بردار حفظ شود. برای ماتریس تبدیل این تبدیلات نیز داریم $S^T S = I$. دترمینان ماتریس تبدیل متعامد نیز همیشه یکی از مقادیر $\det S = \pm 1$ را اختیار می کند. ما موارد با $\det S = +1$ را دوران های سره و $\det S = -1$ را دوران ناسره می نامیم. به ویژه برای بازتاب (reflection) نسبت به یک محور و یا انعکاس نسبت به مبدا (inversion) داریم $\det S = -1$.
- توجه کنید که بردارهایی مانند موقعیت $\vec{r}$ و سرعت $\vec{v}$ تحت دوران های ناسره به درستی تغییر علامت می دهند (یعنی تبدیل به $-\vec{r}$ و $-\vec{v}$ می شوند). ولی بردارهایی مانند سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ ، گشتاور $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ و تکانه زاویه ای $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ وجود دارند که تحت دوران های ناسره به درستی تغییر علامت نمی دهند، یعنی علامت آنها تحت دوران های ناسره تغییر نمی کند!



تمرین

- تمرین: الف) توضیح دهید که در دو شکل زیر چه اتفاقی رخ داده است؟
 ب) توضیح دهید که چرا بردارهایی مانند سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ ، گشتاور $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ و تکانه زاویه ای $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ تحت دوران های ناسره تغییر علامت نمی دهند.



شبه بردارها و شبه تانسورها

- بردارهایی مانند تکانه زاویه ای را بردارهای محوری (axial vectors) و یا جدیداً شبه بردار (pseudovectors) می نامند. این بردارها از قانون تبدیل زیر پیروی می کنند:

$$A' = \det(S)SA \quad (\text{pseudovector})$$

- حالا همین مفهوم را به تانسورها تعمیم خواهیم داد: یعنی، قانون تبدیل تانسورهای مرتبه دوم همچنان به صورت زیر است

$$(A')^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial(x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial(x')^j}{\partial x^l} A^{kl}, \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور پادوردای مرتبه دو} \end{array}$$

$$(B')^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial(x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial(x')^j} B^k_l, \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور مخلوط مرتبه دو} \end{array}$$

$$(C')_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial(x')^i} \frac{\partial x^l}{\partial(x')^j} C_{kl}. \quad \begin{array}{l} \text{قانون تبدیل} \\ \text{تانسور هموردای مرتبه دو} \end{array}$$

و تانسورهای با مراتب بالاتر هم قوانین تبدیل شان با تعمیم رابطه بالا نوشته خواهد شد. ولی، شبه تانسورهای (pseudotensors) وجود دارند که در قوانین تبدیل آنها باید یک علامت منفی - برای تصحیح اثر دوران های ناسره وارد شود.

ضرب مستقیم تانسورها و شبه تانسورها

- قانون کلی ضرب تانسورها و شبه تانسورها: فرض کنید T نشان دهنده یک تانسور و P نشان دهنده یک شبه تانسور است. در این صورت قانون کلی ضرب مستقیم این دو به صورت زیر است:

$$T \otimes T = P \otimes P = T, \quad T \otimes P = P \otimes T = P.$$

یعنی از ضرب مستقیم دو تانسور و یا دو شبه تانسور یک تانسور ساخته می شود. ولی از ضرب مستقیم یک تانسور و یک شبه تانسور یک شبه تانسور ایجاد خواهد شد.

- برای درک مفهوم شبه تانسور به مثال زیر دقت کنید.

شبه تانسور لوی - چویتا

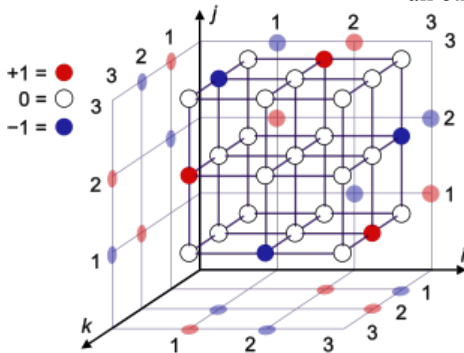
- پیشتر نماد لوی - چویتا را به صورت زیر معرفی کرده ایم. رفتار این نماد با توجه به جایگشت زوج و فرد اندیس ها به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1,$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1,$$

$$\text{all other } \varepsilon_{ijk} = 0.$$

- تمرین: رفتار شبه تانسور لوی-چویتا را با استفاده از شکل مقابل توضیح دهید.



شبه تانسور لوی - چویتا

- حال فرض کنید که شبه تانسور مرتبه سوم η_{ijk} تعریف شده است به صورتی که در یک دستگاه مختصات دکارتی خاص این شبه تانسور برابر با ε_{ijk} می باشد. همچنین فرض کنید $a_{ip} = \partial x^p / \partial x^i$ و ... و $A = [a]$ نشان دهنده ماتریس ضرایب تبدیل در فضای $\mathcal{R}^3$ باشد، در این صورت تبدیل تانسور η_{ijk} به دستگاه جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$\eta'_{ijk} = \det(A) \sum_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr},$$

به نقش $\det(A)$ در تعریف شبه تانسور دقت کنید.

- حال با توجه به تعریف ε_{ijk} همه جملات pqr در جمع بندی بالا صفر خواهند شد، مگر جملاتی که جایگشت ۱۲۳ باشند. در این حالت نیز سطرها از ۱۲۳ تبدیل به ijk شده اند. در نتیجه جمع بندی موجود در رابطه بالا برابر است با $\varepsilon_{ijk} \det(A)$. بنابراین داریم

$$\eta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} [\det(A)]^2 = \varepsilon_{ijk},$$

رابطه بالا به وضوح نشان می دهد که ε یک شبه تانسور مرتبه سوم است.

- این رابطه همچنین نشان می دهد که این تانسور همسانگرد نیز می باشد. به عبارت دیگر، شبه تانسور لوی - چویتا در همه دستگاه های مختصات دکارتی دوران یافته مولفه های برابر دارد، ولی مولفه های این تانسور در دستگاه های مختصات دکارتی با دوران ناسره در عدد ۱- ضرب می شوند.

تانسور دوگان

- در فضای سه بعدی، با استفاده از هر تانسور پادمتقارن مرتبه دوم C^{ij} می توان یک شبه تانسور مرتبه اول (و یا همان شبه بردار) به صورت زیر ساخت:

$$C_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} C^{jk}$$

تمرین: شبه بردار بالا هم ورداست. شما یک شبه بردار پادوردا بسازید.

- شکل ماتریسی تانسور پادمتقارن مرتبه دوم C^{ij} به صورت زیر است.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C^{12} & -C^{31} \\ -C^{12} & 0 & C^{23} \\ C^{31} & -C^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

دقت کنید که C_i تحت دوران های سره مانند یک بردار رفتار خواهد کرد زیرا این موجود از ضرب $\varepsilon_{ijk} C^{jk}$ ساخته شده است. ولی این موجود واقعا یک شبه بردار است، زیرا از ضرب یک تانسور C^{jk} و شبه تانسور ε_{ijk} ساخته شده است و تحت دوران های ناسره رفتار این دو متفاوت است.

- مولفه های بردار C به صورت زیر نوشته می شوند:

$$(C_1, C_2, C_3) = (C^{23}, C^{31}, C^{12})$$

دقت کنید که رفتار دوره ای cyclic مولفه ها از جایگشت اندیس ها در ε_{ijk} ناشی شده است.

تانسور دوگان

- ما شبه بردار و تانسور پادمتقارن زیر را به عنوان تانسور دوگان (dual tensors) می شناسیم:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C^{12} & -C^{31} \\ -C^{12} & 0 & C^{23} \\ C^{31} & -C^{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C_1, C_2, C_3) = (C^{23}, C^{31}, C^{12})$$

دقت کنید که این دو موجود عملاً یکسان هستند و استفاده از آنها کاملاً بستگی به موقعیت دارد.

- یک مثال دیگر از دوگانی: می توان از سه بردار دلخواه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ استفاده کرده و تانسور مرتبه سوم زیر را ساخت:

$$V^{ijk} = A^i B^j C^k$$

ولی دوگان تانسور مرتبه سوم بالا یک شبه اسکالر است

$$V = \varepsilon_{ijk} V^{ijk}$$

تمرین: نشان دهید که با بسط رابطه بالا می توان آن را به شکل حاصلضرب سه گانه سه بردار $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ نوشت.

$$V = \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 \end{vmatrix}$$

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید شبه تانسور و تانسور دوگان و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ منظور از دوران های فعال و غیرفعال را توضیح دهید.
- ۲ منظور از دوران های سره و ناسره را توضیح دهید.
- ۳ چند نمونه از بردارهای قطبی و چند مورد بردار محوری را نام ببرید.
- ۴ توضیح دهید که یک تانسور چه موجودی است. شبه تانسور چه تفاوتی با تانسور دارد؟
- ۵ حاصلضرب های تانسور-تانسور، شبه تانسور-تانسور و شبه تانسور-شبه تانسور چه موجوداتی خواهند بود؟
- ۶ درباره ویژگی های نماد لوی-چویتا تحقیق کنید.
- ۷ منظور از تانسور دوگان چیست؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

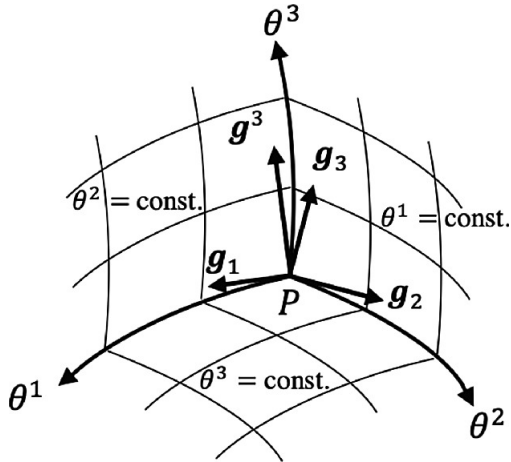


تمرین

- تمرینات بخش دوم از فصل چهارم ویرایش هفتم کتاب آرفکن و همکاران را حل کنید.

مبحث بعدی: تانسورها در مختصات عام

- در جلسه بعد درباره تانسورها در مختصات عام بحث خواهیم کرد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

