

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

ویژگی های عملگرهای هرمیتی یا خودالحاق

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

- ویژگی های عملگرهای هرمیتی یا خودالحاق
- عملگرهای هرمیتی و یا خودالحاق
- چند مثال از عملگرهای هرمیتی

- عملگرهای هرمیتی و یا خودالحاق
- چند مثال از عملگرهای هرمیتی

عملگرهای هرمیتی

• همه مشاهده پذیرها در مکانیک کوانتومی با عملگرهای هرمیتی (خودالحاق) توصیف می شوند؛ بنابراین، درک ریاضیات این عملگرها و ویژگی های آنها اهمیت بسیاری دارد. البته این بدان معنا نیست که عملگرهای غیرهرمیتی در مکانیک کوانتومی وجود ندارند و یا اهمیت ندارند! برخی از مهم ترین عملگرهای مکانیک کوانتومی (مانند عملگرهای نردبانی) غیر هرمیتی اند.

• فرض کنید حالت یک سیستم کوانتومی توسط تابع موج بهنجار ψ توصیف می شود (تابع موج بهنجار یعنی $\langle \psi | \psi \rangle = 1$). در این صورت مقدار میانگین عملگر A در حالت ψ توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

تعریف بالا را مقدار چشمداشتی (expectation value) عملگر A در حالت ψ می گویند.

• دقت کنید که A و ψ می توانند مختلط باشند؛ ولی مقدار چشمداشتی $\langle A \rangle$ هر مشاهده پذیر فیزیکی همیشه باید حقیقی باشد.

• می خواهیم ثابت کنیم که اگر عملگر A هرمیتی باشد، آنگاه مقدار چشمداشتی آن حقیقی خواهد بود. برای اینکار مزدوج مختلط مقدار چشمداشتی $\langle A \rangle$ را محاسبه می کنیم

$$\langle A \rangle^* = \langle \psi | A | \psi \rangle^* = \langle \psi | A^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle A \rangle$$

پس $\langle A \rangle$ حقیقی است. دقت کنید که گام آخر فقط وقتی درست است که A هرمیتی باشد.

شکل کلی عملگرهای هرمیتی

در جلسه قبل دیدیم که عملگر $A^\dagger$ در نمایش ماتریسی عملاً همان الحاقی ماتریس A می باشد. یعنی اگر این دو عملگر را در پایه های $|\varphi\rangle_\mu$ بسط دهیم، داریم

$$A = \sum_{\nu\mu} |\varphi_\nu\rangle a_{\nu\mu} \langle\varphi_\mu| \quad A^\dagger = \sum_{\nu\mu} |\varphi_\nu\rangle a_{\mu\nu}^* \langle\varphi_\mu|$$

در نتیجه، اگر عملگر مورد نظر هرمیتی باشد $A = A^\dagger$ ، برای عناصر ماتریس آن داریم

$$a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}^* \quad (\text{coefficients of self-adjoint } A)$$

پس اگر یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه نمایش ماتریسی آن نیز هرمیتی است! توجه کنید که عناصر موجود بر روی قطر اصلی ماتریس های هرمیتی باید حقیقی باشند. چرا؟!

پرسش: کدام یک از این
ماتریس ها هرمیتی اند؟

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

دوباره مقدار چشمداشتی

- می توان حقیقی بودن مقدار چشمداشتی عملگرهای هرمیتی را در هر پایه دلخواه مانند $|\varphi\rangle_\mu$ نیز ثابت کرد. فرض کنید عناصر ماتریس A را با $a_{\mu\nu}$ نشان می دهیم. همچنین برای حالت سیستم داریم $|\psi\rangle = \sum_\mu c_\mu |\varphi\rangle_\mu$ که معادل با بردار ستونی $\mathbf{c}$ می باشد. آنگاه مقدار چشمداشتی عملگر A در حالت $|\psi\rangle$ به صورت زیر نوشته می شود که یک اسکالر است.

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle = \left\langle \sum_\nu c_\nu \varphi_\nu \left| A \right| \sum_\mu c_\mu \varphi_\mu \right\rangle = \sum_{\nu\mu} c_\nu^* \langle \varphi_\nu | A | \varphi_\mu \rangle c_\mu \\ &= \sum_{\nu\mu} c_\nu^* a_{\nu\mu} c_\mu = \mathbf{c}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{c},\end{aligned}$$

- توجه کنید که برای ماتریس ها داریم $(\mathbf{BAC})^\dagger = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}^\dagger$. بنابراین اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه $\mathbf{c}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{c}$ یک ماتریس 1×1 هرمیتی (یعنی یک اسکالر حقیقی) خواهد بود.

تمرین: فرض کنید حالت سیستمی توسط بردار $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$ داده شده است. مقدار چشمداشتی عملگرهای زیر را بیابید.

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال

تمرین: فرض کنید حالت سیستمی توسط بردار $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$ داده شده است. مقدار چشمداشتی عملگرهای اسپینی را بیابید.

پاسخ الف: کت و برای حالت سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \quad \langle\psi| = \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

پس مقدار چشمداشتی مورد نظر برابر برای S_x است با

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_x | \psi \rangle \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \left(\frac{\hbar}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) [\sqrt{1/3}\sqrt{2/3}] \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} \\ \sqrt{1/3} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) = \left(\frac{\hbar}{2} \right) \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \hbar \end{aligned}$$

عملگرهای موقعیت و تکانه هرمیتی هستند.

● فرض کنید ضرب داخلی به صورت مقابل تعریف شده است.

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx$$

همچنین، همه توابع f در فضای هیلبرت مورد نظر ما انتگرال پذیر مجذوری $\mathcal{L}^2$ هستند، یعنی در همه بازه $(-\infty, \infty)$ داریم $\langle f|f \rangle < \infty$. سوال: آیا عملگرهای موقعیت و تکانه هرمیتی هستند؟

موقعیت هرمیتی است: برای اثبات این نکته باید $\langle f|xg \rangle$ را با $\langle xf|g \rangle$ مقایسه کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)x g(x)dx \quad \text{vs.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} [xf(x)]^* g(x)dx$$

با توجه به اینکه ترتیب جملات در زیر انتگرال مهم نیست، و همچنین با توجه به اینکه مقادیر موقعیت x حقیقی هستند، به این نتیجه می رسیم که x هرمیتی است.

تکانه $p = -i d/dx$ هرمیتی است: برای اثبات این نکته باید $\langle f|pg \rangle$ و $\langle pf|g \rangle$ مقایسه کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \left[-i \frac{d g(x)}{dx} \right] dx \quad \text{vs.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[-i \frac{d f(x)}{dx} \right]^* g(x) dx$$

عملگرهای موقعیت و تکانه هرمیتی هستند.

• برای

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \left[-i \frac{d g(x)}{dx} \right] dx \quad \text{vs.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[-i \frac{d f(x)}{dx} \right]^* g(x) dx$$

از عبارت سمت چپ به صورت جزء به جزء انتگرال می گیریم تا مشتق به تابع f^* منتقل شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \left[-i \frac{d g(x)}{dx} \right] dx = -i f^*(x) g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d f(x)}{dx} \right]^* \left[-i g(x) \right] dx$$

تمرین: الف) با توجه به اینکه مقادیر $\langle f | f \rangle$ و $\langle g | g \rangle$ محدود است، نشان دهید که مقادیر f و g در $\pm\infty$ باید صفر شود.

ب) بنا به نامساوی شوارتز نشان دهید که مقدار $\langle f | g \rangle$ هم باید محدود باشد.

• حال که جملات مرزی صفر شدند، با وارد کردن i به داخل جمله $(df)/dx$ می توان نشان داد که دو عبارت زیر با هم برابرند و بنابراین تکانه هرمیتی است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \left[-i \frac{d g(x)}{dx} \right] dx \quad \text{vs.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[-i \frac{d f(x)}{dx} \right]^* g(x) dx$$

تمرین: نشان دهید که $A = -d/dx$ هرمیتی نیست! در نتیجه اهمیت فاکتور i در تعریف تکانه را توضیح دهید.

محاسبه مقدار چشمداشتی

فرض کنید سیستمی در حالت کوانتومی $\psi = e^{i\theta}f(x)$ قرار دارد که در آن $f(x)$ و θ مقادیر حقیقی هستند و $f(x)$ انتگرال پذیر مجذوری است. می خواهیم حقیقی بودن مقدار چشمداشتی عملگر تکانه را بررسی کنیم. برای اینکار با توجه به تعریف ضرب داخلی داریم

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{df(x)}{dx} dx = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [f(x)]^2 dx \\ &= -\frac{i}{2} [f(+\infty)^2 - f(-\infty)^2] = 0.\end{aligned}$$

در حالت کلی می توان ثابت کرد که اگر پدیده ای وابسته به زمان باشد (تکانه آن غیر صفر باشد)، آنگاه تابع موج آن پدیده نمی تواند حقیقی باشد و حتی نمی تواند به شکل $\psi = e^{i\theta}f(x)$ (یعنی یک تابع حقیقی ضربدر یک فاز مختلط) نوشته شود. چنین تابع موجی حتما باید مختلط باشد و فاز این حالت وابسته به زمان (θ غیر ثابت) خواهد بود. جزئیات بیشتر را می توانید در درس های مکانیک کوانتومی ببینید.

محاسبات عملگری

- فرض کنید می خواهیم $\langle \varphi | (x^2 + p^2) \psi \rangle$ را محاسبه کنیم. همچنین فرض کنید در اینجا ψ یک تابع پیچیده با مشتقات نه چندان ساده است، در حالی که مشتق تابع φ بسیار ساده می باشد. بنابراین، عاقلانه است که عملگرها را به سمت راست منتقل کنیم. مثلاً، با توجه به اینکه x هرمیتی است، x^2 نیز هرمیتی است و در کل می توان نوشت، یادآوری $\langle A^\dagger f | g \rangle = \langle f | Ag \rangle$.

$$\langle x^2 \psi | \varphi \rangle = \langle x \psi | x \varphi \rangle = \langle \psi | x^2 \varphi \rangle$$

همین کار را می توان برای p^2 هم انجام داد. در نتیجه داریم

$$\langle (x^2 + p^2) \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | (x^2 + p^2) \varphi \rangle$$

بنابراین حالا عملگرها بر روی φ عمل می کنند و محاسبات بسیار ساده تر می شود.

- حال فرض کنید می خواهیم اندازه تابع $(x + ip)\psi$ را محاسبه کنیم، یعنی

$$\langle (x + ip)\psi | (x + ip)\psi \rangle$$

هرچند، باید توجه کنیم که الحاقی عملگر $x + ip$ خودش نیست، بلکه عملگر $x - ip$ می باشد.

$$\langle (x + ip)\psi | (x + ip)\psi \rangle = \langle \psi | (x - ip)(x + ip) | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | x^2 + p^2 + i(xp - px) | \psi \rangle \quad \text{با } (x + ip)\psi \text{ برابر است}$$

توجه: $[x, p] = i$

$$= \langle \psi | x^2 + p^2 + i(i) | \psi \rangle = \langle \psi | x^2 + p^2 - 1 | \psi \rangle$$

آیا الحاقی حاصلضرب دو عملگر هرمیتی باز هم هرمیتی است؟

- آیا الحاقی حاصلضرب دو عملگر هرمیتی باز هم هرمیتی است؟
- فرض کنید عملگرهای A و B هرمیتی هستند. می خواهیم ببینیم که آیا AB نیز هرمیتی است؟ برای بررسی این پرسش داریم:

$$\langle \psi | AB | \psi \rangle = \langle A^\dagger \psi | B | \psi \rangle = \langle B^\dagger A \psi | \psi \rangle = \langle BA \psi | \psi \rangle$$

پس نتیجه می گیریم اگر عملگرهای A و B هرمیتی باشند، آنگاه AB در حالت کلی هرمیتی "نیست"، مگر اینکه داشته باشیم $AB = BA$ ، یعنی A و B جابجا پذیر باشند.

$$\text{if } AB = BA \quad \text{then} \quad \langle \psi | AB | \psi \rangle = \langle BA \psi | \psi \rangle = \langle AB \psi | \psi \rangle$$

- عملگرهای جابجاپذیر $[A, B] = 0$ در مکانیک کوانتومی را مشاهده پذیرهای سازگار می نامند. همچنین، عملگرهای جابجاناپذیر $[A, B] \neq 0$ در مکانیک کوانتومی را مشاهده پذیرهای ناسازگار می نامند. مساله اندازه گیری، ویژه بردارهای مشترک، برقراری رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ و ... برای این دو دسته از عملگرها کاملاً متفاوت است. برای جزئیات بیشتر به مجموعه درس های مکانیک کوانتومی مراجعه کنید.

مفاهیم بنیادی مکانیک کوانتومی

مشاهده پذیرهای سازگار در مکانیک کوانتومی

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های عملگرهای هرمیتی یا خودالحاق و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

۱ درباره مفهوم مقدار چشمداشتی در مکانیک کوانتومی تحقیق کنید.

۲ تعریف مقدار چشمداشتی را بنویسید.

۳ توضیح دهید که چرا مقدار چشمداشتی مشاهده پذیرهای فیزیکی باید حقیقی باشد.

۴ چرا مشاهده پذیرهای فیزیکی در مکانیک کوانتومی همگی با عملگرهای هرمیتی نمایش داده می شوند.

۵ شکل کلی ماتریسی عملگرهای هرمیتی چگونه است؟

۶ روش کلی اثبات هرمیتی بودن یک عملگر را توضیح دهید.

۷ درباره مشاهده پذیرهای سازگار و ناسازگار در مکانیک کوانتومی تحقیق کنید.

اگر درباره هرکدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

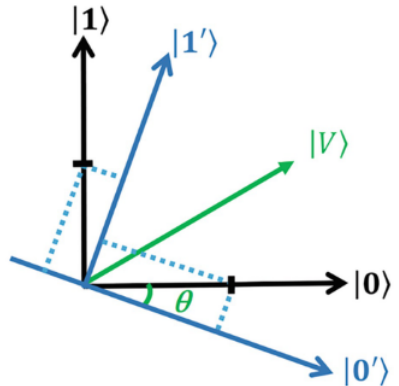
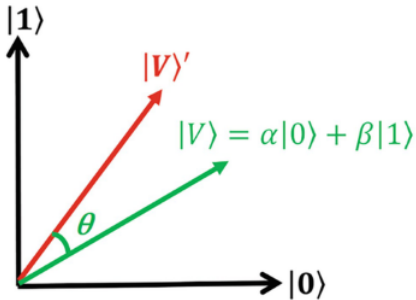


تمرین

- تمرین های بخش چهارم از فصل پنجم کتاب آرفکن و همکاران (ویرایش هفتم) را حل کنید.

مبحث بعدی: عملگرهای یکانی در مکانیک کوانتومی

- در جلسه بعد با عملگرهای یکانی در مکانیک کوانتومی آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما

