

فیزیک مکانیک

جلسه سیزدهم رفع اشکال و حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم

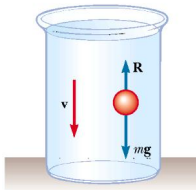


دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در تابستان و پاییز سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که، با تلاش بسیار، امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

۱ جلسه سیزدهم رفع اشکال و حل تمرین

تمرین



جسمی را که تحت تاثیر یک نیروی مقاومت سقوط می کند در نظر بگیرید. اگر سرعت حرکت جسم کم باشد، بنا به بحث امروز، معادله حرکت جسم به صورت

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

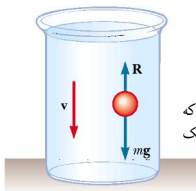
خواهید بود. با انتگرال گیری از قانون دوم نیوتن (فصل دوم) نشان دهید که سرعت به صورت زیر تغییر می کند:

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right)$$

با انتگرال گیری از معادله بالا مکان را بر حسب زمان بیابید.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

پاسخ



پاسخ: بنا به بحثی که در درس داشتیم، معادله حرکت چنین متحرکی به صورت زیر است:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

این معادله را می توان به روش بحث شده در فصل دوم (انتگرال گیری از مسیر حرکت) حل کرد. توجه داشته باشید که در اینجا پارامترهای m ، g و b ثابت و پارامترهای v و t متغیر هستند. برای به دست جواب معادله بالا از یک تکنیک بسیار مشهور ریاضیاتی به نام روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:

$$m \frac{dv}{mg - bv} = dt$$

اگر متغیرها در معادله دیفرانسیل مورد نظر ما جدا شوند (مانند این مثال) می توانیم به راحتی مساله را با انتگرال گیری

$$\text{حل کنیم.} \quad m \frac{dv}{mg - bv} = dt \quad \Rightarrow \quad m \int_0^v \frac{dv}{mg - bv} = \int_0^t dt$$

حال با توجه به اینکه $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln |a+bx|$ داریم:

$$m \int_0^v \frac{dv}{mg - bv} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{b} [\ln |mg - bv|]_0^v = [t]_0^t$$

با جایگذاری حدود انتگرال ها داریم:

$$-\frac{m}{b} (\ln |mg - bv| - \ln |mg|) = t - 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) = -\frac{b}{m} t$$

و یا با توجه به اینکه تابع نمایی معکوس تابع لگاریتم است داریم:

$$\frac{mg - bv}{mg} = e^{-\frac{b}{m} t} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

تمرین

قطعه ای به جرم $m = ۰.۵ kg$ با سرعت $v_0 = ۶ m/s$ به صورت عمودی با فتری با ثابت فنر $k = ۱۰۰ N/m$ برخورد میکند و فنر را به اندازه h فشرده می کند. بر حسب پارامتر h

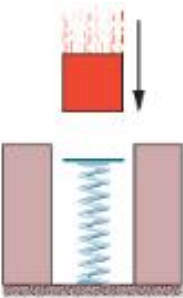
الف) کار نیروی گرانش چقدر است؟

ب) کار نیروی فنر چقدر است؟

پ) با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی مقدار h را بیابید.

ت) اگر سرعت اولیه سه برابر شود، مقدار فشرده شدن فنر چقدر خواهد بود. توجه: از اصطکاک صرف نظر کنید.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



تمرین

قطعه ای به جرم $m = 0.5 \text{ kg}$ با سرعت $v_0 = 6 \text{ m/s}$ به صورت عمودی با فنری با ثابت فنر $k =$

100 N/m برخورد میکند و فنر را به اندازه h فشرده می کند. بر حسب پارامتر h

(الف) کار نیروی گرانش چقدر است؟

(ب) کار نیروی فنر چقدر است؟

(پ) با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی مقدار h را بیابید.

(ت) اگر سرعت اولیه سه برابر شود، مقدار فشرده شدن فنر چقدر خواهد بود.

توجه: از اصطکاک صرف نظر کنید.

پاسخ الف: $W_{mg} = +mgh$. چرا مثبت؟

پاسخ ب: $W_s = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}k(h^2 - 0^2) = -\frac{1}{2}kh^2$

چرا منفی؟

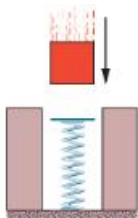
پاسخ پ:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow mgh - \frac{1}{2}kh^2 = \cancel{\frac{1}{2}mv_f^2} - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$0.5 \times 9.8 h - \frac{1}{2}100 h^2 = -\frac{1}{2}0.5(6)^2 \Rightarrow 50h^2 - 4.9h - 9 = 0$$

$$h = \frac{-(-4.9) \pm \sqrt{(-4.9)^2 - 4 \times 50 \times (-9)}}{100} = 0.48 \text{ m}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



تمرین

- قطعه ای به جرم $m = 0.5 \text{ kg}$ با سرعت $v_0 = 6 \text{ m/s}$ به صورت عمودی با فنری با ثابت فنر $k = 100 \text{ N/m}$ برخورد میکند و فنر را به اندازه h فشرده می کند. بر حسب پارامتر h
- (الف) کار نیروی گرانش چقدر است؟
- (ب) کار نیروی فنر چقدر است؟
- (پ) با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی مقدار h را بیابید.
- (ت) اگر سرعت اولیه سه برابر شود، مقدار فشرده شدن فنر چقدر خواهد بود.
- توجه: از اصطکاک صرف نظر کنید.

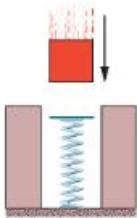
پاسخ ت:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow mgh' - \frac{1}{2}kh'^2 = \cancel{\frac{1}{2}mv_f^2} - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}m(3v_0)^2$$

$$0.5 \times 9.8 h' - \frac{1}{2}100 h'^2 = -\frac{1}{2}0.5 (3 \times 6)^2 \Rightarrow 50 h'^2 - 4.9 h' - 81 = 0$$

$$h' = \frac{-(-4.9) \pm \sqrt{(-4.9)^2 - 4 \times 50 \times (-81)}}{2 \times 100} = 1.32 \text{ m}$$

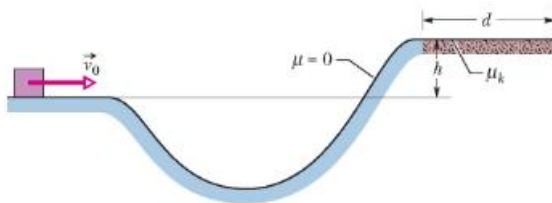
شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.



تمرین

جسمی مطابق شکل زیر با سرعت اولیه $v_0 = 10 \text{ m/s}$ مسیر بدون اصطکاکی را می پیماید تا از یک سطح پایین تر به سطح بالاتر منتقل شود. اختلاف ارتفاع این دو سطح $h = 2.5 \text{ m}$ می باشد. ضریب اصطکاک جنبشی سطح بالایی برابر $\mu_k = 0.3$ می باشد و بنابراین جسم پس از طی مسافت d متوقف می شود. این مسافت را بیابید.

شکل از کتاب سرز و همکاران.



پاسخ

جسمی مطابق شکل زیر با سرعت اولیه $v_0 = 10 \text{ m/s}$ مسیر بدون اصطکاکی را می پیماید تا از یک سطح پایین تر به سطح بالاتر منتقل شود. اختلاف ارتفاع این دو سطح $h = 2.5 \text{ m}$ می باشد. ضریب اصطکاک جنبشی سطح بالایی برابر $\mu_k = 0.3$ می باشد و بنابراین جسم پس از طی مسافت d متوقف می شود. این مسافت را بیابید.

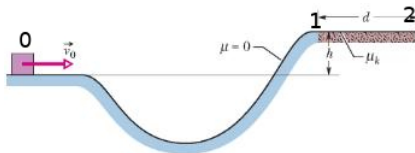
پاسخ: بین نقاط 0 و 1 هیچ نیروی اتلافی وجود ندارد؛ بنابراین قضیه پایستگی انرژی برقرار است:

$$E_0 = E_1 \Rightarrow K_0 + U_0 = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1$$

از اینجا می توان سرعت در نقطه 1 را به دست آورد:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h_1)} = \sqrt{10^2 + 2 \times 9.8(-2.5)} = 7.1 \text{ m/s}$$

شکل از کتاب سرز و همکاران.



پاسخ

جسمی مطابق شکل زیر با سرعت اولیه $v_0 = 10 \text{ m/s}$ مسیر بدون اصطکاکی را می پیماید تا از یک سطح پایین تر به سطح بالاتر منتقل شود. اختلاف ارتفاع این دو سطح $h = 2.5 \text{ m}$ می باشد. ضریب اصطکاک جنبشی سطح بالایی برابر $\mu_k = 0.3$ می باشد و بنابراین جسم پس از طی مسافت d متوقف می شود. این مسافت را بیابید.

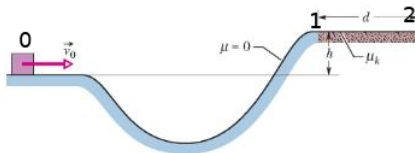
پاسخ (ادامه): بین نقاط 1 و 2 نیروی اصطکاک وجود دارد؛ بنابراین قضیه پایستگی انرژی برقرار نیست. ولی قضیه کار-انرژی جنبشی برقرار است:

$$W_{fk} = \Delta K \quad \Rightarrow \quad -\mu_k mgd = \cancel{K_1} - K_1 = -\frac{1}{2}mv_1^2$$

از اینجا می توان مسافت d را به دست آورد:

$$d = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\mu_k mg} = \frac{v_0^2 + 2g(h_0 - h_1)}{2\mu_k g} = \frac{10^2}{2 \times 0.3 \times 9.8} = 8.7 \text{ m}$$

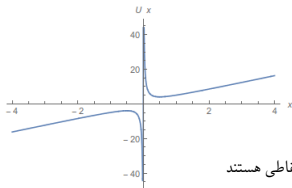
شکل از کتاب سرز و همکاران.



تمرین

انرژی پتانسیل یک متحرک به صورت

$$U(x) = \frac{1}{x} + 4x$$



می باشد. الف) چه نیرویی از این انرژی حاصل می شود (راهنمایی $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$)
 ب) نقطه تعادل سیستم را بیابید. راهنمایی: در نقاط تعادل نیرو برابر صفر است.

پ) با استفاده از آزمون مشتق دوم $\frac{d^2U(x)}{dx^2}$ پایداری یا ناپایداری نقطه تعادل را تعیین کنید.
 ت) اگر انرژی سیستم $E = 10$ باشد نقاط بازگشتی حرکت را بیابید. راهنمایی: نقاط بازگشتی نقاطی هستند که انرژی جنبشی در آنها صفر است.

پاسخ الف: نیرو

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} + 4x \right) = - \left(\frac{-1}{x^2} + 4 \right)$$

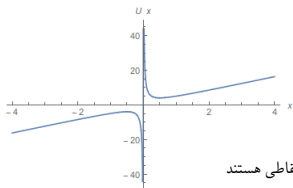
ب) نقاط تعادل سیستم

$$F(x) = 0 \Rightarrow - \left(\frac{-1}{x^2} + 4 \right) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

پاسخ

انرژی پتانسیل یک متحرک به صورت

$$U(x) = \frac{1}{x} + 4x$$



می باشد. الف) چه نیرویی از این انرژی حاصل می شود (راهنمایی $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$)
 ب) نقطه تعادل سیستم را بیابید. راهنمایی: در نقاط تعادل نیرو برابر صفر است.

پ) با استفاده از آزمون مشتق دوم $\frac{d^2U(x)}{dx^2}$ پایداری یا ناپایداری نقطه تعادل را تعیین کنید.
 ت) اگر انرژی سیستم $E = 10$ باشد نقاط بازگشتی حرکت را بیابید. راهنمایی: نقاط بازگشتی نقاطی هستند که انرژی جنبشی در آنها صفر است.

پاسخ پ) پایداری سیستم:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{x^2} + 4 \right) = \frac{2}{x^3}$$

بنابراین در نقاط تعادل داریم:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{x^2} + 4 \right) = \frac{2}{x^3} \Big|_{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} > 0$$

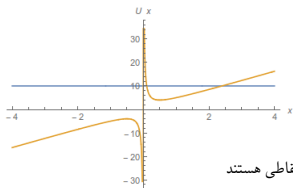
$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{x^2} + 4 \right) = \frac{2}{x^3} \Big|_{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{4}\right)^3} < 0$$

پس در نقطه ۵، سیستم در تعادل پایدار است در حالی که در نقطه ۵- سیستم در تعادل ناپایدار است.

پاسخ

انرژی پتانسیل یک متحرک به صورت

$$U(x) = \frac{1}{x} + 4x$$



می باشد. الف) چه نیرویی از این انرژی حاصل می شود (راهنمایی $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$)
 ب) نقطه تعادل سیستم را بیابید. راهنمایی: در نقاط تعادل نیرو برابر صفر است.

پ) با استفاده از آزمون مشتق دوم $\frac{d^2U(x)}{dx^2}$ پایداری یا ناپایداری نقطه تعادل را تعیین کنید.
 ت) اگر انرژی سیستم $E = 10$ باشد نقاط بازگشتی حرکت را بیابید. راهنمایی: نقاط بازگشتی نقاطی هستند که انرژی جنبشی در آنها صفر است.

پاسخ ت) اگر در نقطه بازگشتی، انرژی سیستم $E = 10$ باشد داریم:

$$K + U = E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + 4x = 10 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 10x + 1 = 0$$

بنابراین با حل معادله درجه دوم بالا داریم:

$$x \rightarrow \frac{1}{4} (5 - \sqrt{21}), \quad x \rightarrow \frac{1}{4} (5 + \sqrt{21})$$

با سیاست از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.