

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

چهارمین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



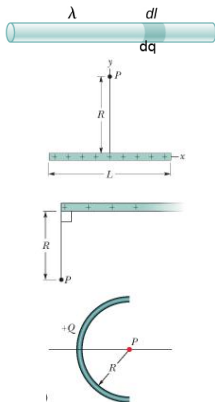
دانشگاه هرمزگان

چهارمین جلسه حل تمرین

مروری بر قانون گوس



توزیع خطی بار (یک بعدی)



۱ توزیع خطی (یک بعدی) بار الکتریکی: وقتی بار در یک جهت مشخص فضایی گسترش پیدا کرده و گستردگی بار در دو جهت دیگر ناچیز است.

۲ چگالی خطی میانگین بار: $\bar{\lambda} = \frac{Q}{L}$ که در آن Q بار کل و L طولی است که بار در آن پخش شده است.

مثلا چگالی میانگین بار در پایین ترین شکل برابر است

با $\bar{\lambda} = Q/(\pi R)$ چرا؟

۳ چگالی خطی بار در یک نقطه مشخص:

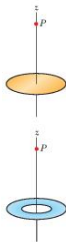
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \text{or} \quad dq = \lambda dl$$

که در آن dq بار المان و dl طولی المان است. به بالاترین شکل دقت کنید.

۴ واحد چگالی خطی بار در SI $\Leftarrow \Leftarrow C/m$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم و
<https://phys.libretexts.org/>

توزیع سطحی بار (دو بعدی)



۱ توزیع سطحی (دو بعدی) بار الکتریکی: وقتی بار در دو جهت مشخص فضایی گسترش پیدا کرده و گستردگی بار در جهت دیگر ناچیز است.

۲ چگالی سطحی میانگین بار: $\bar{\sigma} = \frac{Q}{A}$ که در آن Q بار کل و A مساحتی است که بار در آن پخش شده است.

مثلا چگالی میانگین بار در پایین ترین شکل برابر است با $\bar{\sigma} = Q / (\pi(R_2^2 - R_1^2))$ چرا؟ (در اینجا R_1 شعاع داخلی و R_2 شعاع خارجی است .)

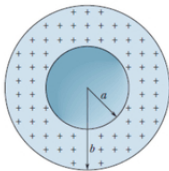
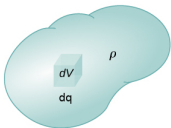
۳ چگالی سطحی بار در یک نقطه مشخص:

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad \text{or} \quad dq = \sigma dA$$

۴ که در آن dq بار المان و dA مساحت المان است (شکل بالا).
واحد چگالی سطحی بار (σ) در SI $C/m^2 \Leftarrow \Leftarrow$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم و
<https://phys.libretexts.org/>

توزیع حجمی بار (سه بعدی)



۱ توزیع حجمی (سه بعدی) بار الکتریکی: وقتی بار در هر سه جهت فضایی گسترش پیدا کرده است.

۲ چگالی حجمی میانگین بار: $\bar{\rho} = \frac{Q}{V}$ که در آن Q بار کل و V حجمی است که بار در آن پخش شده است.

۳ مثلاً چگالی حجمی میانگین بار در پایین ترین شکل برابر است با $\bar{\rho} = Q / (\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3))$ چرا؟

۴ چگالی حجمی بار در یک نقطه مشخص:

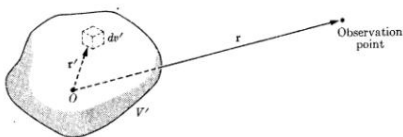
$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad \text{or} \quad dq = \rho dV$$

که در آن dq بار المان و dV حجم المان است (شکل بالا).

۴ واحد چگالی حجمی بار (σ) در SI $\Leftrightarrow \Leftrightarrow C/m^3$

شکل ها از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش دهم.

چرایی استفاده از روش المان ها



شکل از ریتز - میلفورد

حل هر مساله الکتروستاتیک را می توان نهایتا به حل یکی از انتگرال های سه گانه

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \iiint_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV'$$

و یا دو گانه

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \iint_A \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}') dA'$$

تقلیل داد.

حل چنین انتگرال های دوگانه و سه گانه ای نیاز به ریاضیات پیشرفته ای دارد که در این درس مفروض نیست. بنابراین در اینجا نمی توانیم از این روش استفاده کنیم.

جایگزین $\Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow$ روش المان ها.

قدرت روش المان ها در آن است که ما بدون حل انتگرال های دوگانه و سه گانه بالا، جواب مساله را (در مواردی که تقارن به حد کافی موجود باشد) به دست می آوریم.

در روش المان ها:

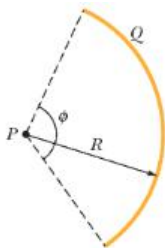
۱ میدان توزیع بارهای یک بعدی را با استفاده از میدان یک بار نقطه ای به دست می آوریم.

۲ میدان توزیع بارهای دو بعدی را با استفاده از میدان توزیع بارهای یک بعدی به دست می آوریم.

۳ میدان توزیع بارهای سه بعدی را با استفاده از میدان توزیع بارهای دو بعدی به دست می آوریم.

به مثال های زیر مراجعه کنید ↓↓↓↓↓↓

مثالی از محاسبه میدان توزیع بارهای پیوسته



انتگرال گیری مستقیم میدان:

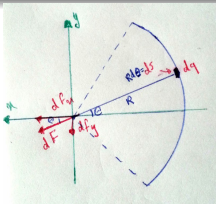
در شکل مقابل بار کل این کمان (به طول $s = R\phi$) از دایره برابر $+Q$ می باشد که به صورت یکنواخت روی آن پخش شده است.

الف) بار خطی بسیار کوچک dq را روی نیمدایره فرض کنید. میدان بسیار کوچک این بار دیفرانسیلی در نقطه P را بیابید.

ب) با انتگرال گیری از نتیجه قسمت قبل، میدان های کل در جهت افقی و عمودی را بیابید.

پ) رفتار میدان در فواصل بزرگ R (و یا همان $\phi \rightarrow 0$) را تحلیل کنید.

پاسخ



پاسخ الف) میدان بار نقطه ای بسیار کوچک dq در مرکز برابر

$$dE = \frac{Kdq}{R^2}$$

می باشد. در اینجا المان dq برابر است با

$$dq = \lambda ds = \frac{Q}{R\phi} R d\theta = Q \frac{d\theta}{\phi}$$

در حد $\phi \rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} E_x = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{2KQ}{\phi R^2} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$= \frac{KQ}{R^2} \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} = \frac{KQ}{R^2}$$

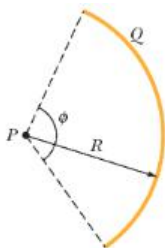
که همان قانون کولن برای بارهای نقطه ای است.

پاسخ ب) میدان در جهت عمود بنا به تقارن صفر خواهد بود. از طرفی دیفرانسیل میدان در جهت افق برابر $dE_x = dE \cos \theta$ می باشد. با انتگرال گیری از طرفین این دیفرانسیل داریم:

$$\int_0^{E_x} dE_x = \int_0^q \frac{Kdq}{R^2} \cos \theta = \frac{KQ}{\phi R^2} \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \cos \theta d\theta$$

$$E_x = \frac{KQ}{\phi R^2} [\sin \theta]_{-\phi/2}^{\phi/2} = \frac{2KQ}{\phi R^2} \sin \frac{\phi}{2}$$

تعمیم



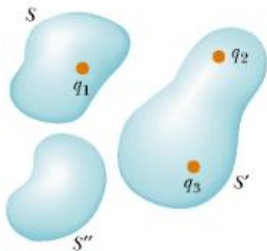
انتگرال گیری مستقیم میدان:

در شکل مقابل اگر بار روی کمان به صورت غیر یکنواخت

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin \theta$$

توزیع شده باشد، مولفه های بردار میدانی الکتریکی در میدا چگونه اند؟
فرض کنید که θ زاویه ای است که از جهت مثبت محور x سنجیده می شود.

یادآوری از قانون گوس



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۱ قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ برابر است با بار درون آن سطح بسته (q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 ؛ یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

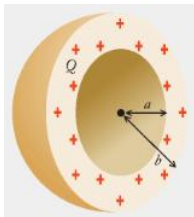
۲ سطح بسته مذکور در قانون گوس را سطح گوسی می نامیم؛ مانند سطوح S, S', S'' در اینجا.

۳ لازم است که مساله مورد نظر به اندازه کافی متقارن باشد زیرا می خواهیم سطحی را پیدا کنیم که مقدار میدان الکتریکی روی آن سطح ثابت باشد و بنابراین از انتگرال خارج شود:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA \Leftarrow \text{enough symmetry}$$

اگر مساله به اندازه کافی متقارن نباشد، ساده سازی بالا امکان پذیر نبوده و بنابراین استفاده از قانون گوس (برای پیدا کردن میدان) ممکن نخواهد بود $\Leftarrow \Leftarrow$ قانون کولن.

مثال جلسه قبل را می خواهیم تعمیم دهیم



قانون گوس:

در شکل مقابل بار الکتریکی فقط در شعاع $a < r < b$ با چگالی بار ثابت و بار کل Q موجود است. با استفاده از قانون گوس میدان را در

الف) $r < a$

ب) $a < r < b$

پ) $r > b$ بیابید.

توجه: در هر سه مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت، با رسم شکل، مشخص کنید.

پرسش



قانون گوس:

در شکل مقابل بار الکتریکی فقط در شعاع $a < r < b$ و با چگالی بار متغیر

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{b}$$

موجود است. با استفاده از قانون گوس میدان را در

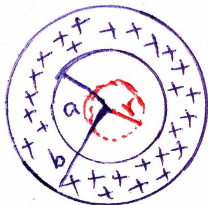
الف) $r < a$

ب) $a < r < b$

پ) $r > b$ بیابید.

توجه: در هر سه مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت، با رسم شکل، مشخص کنید.

پاسخ



پاسخ الف) حالت $r < a$: در این حالت، سطح گوس به صورت کره ای با شعاع کوچکتر از a نشان داده می شود. دایره قرمز رنگ در شکل مقابل را ببینید. برای سمت راست قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = E (\pi r^2)$$

از طرفی، در این حالت بار درون سطح گوسی برابر صفر است:

$$q_{in} = 0$$

بنابراین، برای قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (\pi r^2) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$E(r < a) = 0$$

و یا

پاسخ

پاسخ ب) حالت $a < r < b$: در این حالت، سطح گوس به صورت کره ای با شعاع بین a و b نشان داده می شود. دایره قرمز رنگ در شکل مقابل را ببینید.
برای سمت راست قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = E (4\pi r^2)$$

از طرفی، در این حالت بار درون سطح گوسی را باید با استفاده از انتگرال گیری به دست آورد. حجم کره ای به شعاع r و ضخامت dr برابر است با $dV = 4\pi r^2 dr$. بنابراین

$$dq = \rho(r) dV = \rho(r) (4\pi r^2 dr) \Rightarrow q_{in} = \int \rho(r) (4\pi r^2 dr)$$

$$q_{in} = \int \rho_0 \frac{r}{b} (4\pi r^2 dr) = \rho_0 \frac{4\pi}{b} \int_a^r r^3 dr = \frac{4\pi \rho_0}{b} \left[\frac{r^4}{4} \right]_a^r$$

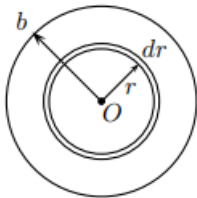
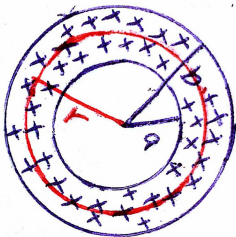
$$q_{in} = \frac{4\pi \rho_0}{b} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right)$$

لطفا دقت کنید که حدود انتگرال بالا، حدود بار درون سطح گوسی (q_{in}) را نشان می دهد. حال برای قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (4\pi r^2) = \frac{\frac{4\pi \rho_0}{b} (r^4 - a^4)}{\epsilon_0}$$

$$E(a < r < b) = \frac{\rho_0 (r^4 - a^4)}{4b\epsilon_0 r^2}$$

و یا



پاسخ

پاسخ پ) حالت $r > b$: در این حالت، سطح گوس به صورت کره ای با شعاع بزرگتر از b نشان داده می شود. دایره قرمز رنگ در شکل مقابل را ببینید.
برای سمت راست قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = E (\pi r^2)$$

از طرفی، در این حالت بار درون سطح گوسی را باید با استفاده از انتگرال گیری به دست آورد. حجم کره ای به شعاع r و ضخامت dr برابر است با $dV = \pi r^2 dr$. بنابراین

$$dq = \rho(r)dV = \rho(r)(\pi r^2 dr) \Rightarrow q_{in} = \int \rho(r)(\pi r^2 dr)$$

$$q_{in} = \int \rho_0 \frac{r}{b} (\pi r^2 dr) = \rho_0 \frac{\pi}{b} \int_a^b r^3 dr = \frac{\pi \rho_0}{b} \left[\frac{r^4}{4} \right]_a^b$$

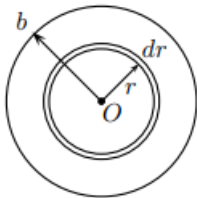
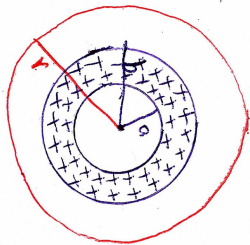
$$q_{in} = \frac{\pi \rho_0}{b} \left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right)$$

لطفا دقت کنید که حدود انتگرال بالا، حدود بار درون سطح گوسی (q_{in}) را نشان می دهد.
برای قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (\pi r^2) = \frac{\frac{\pi \rho_0}{b} (b^4 - a^4)}{\epsilon_0}$$

$$E(r > b) = \frac{\frac{\pi \rho_0}{b} (b^4 - a^4)}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

و یا



با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.