

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

فصل سوم: قانون گوس

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار سال ۱۳۹۹ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
 - خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
- h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

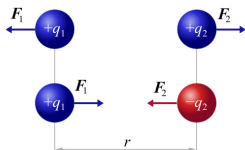
۱ فصل سوم: قانون گوس

● مقدمه

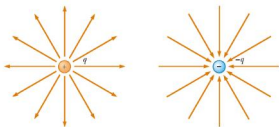
● شار

● قانون گوس

یادآوری



$$|F_1| = |F_2| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$



۱ قانون کولن

۲ برهمکنش مستقیم $\Leftarrow$ نیرو؛ برهمکنش غیر مستقیم $\Leftarrow$ میدان.

۳ میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد شده بر یک بار آزمون در آن نقطه بخش بر واحد بار:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

۴ اگر میدان الکتریکی در یک نقطه را داشته باشیم؛ آنگاه، پیدا کردن نیروی وارده بر هر ذره q_0 در آن نقطه بسیار راحت خواهد بود:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}.$$

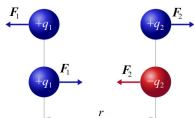
۵ اصل برهم نهی

۶ تکنیک المان ها

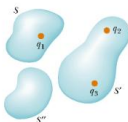
شکل ها به ترتیب از ویکی و مبانی فیزیک هالیدی،
ویرایش دهم.

قانون گوس در واقع شکل دیگری از قانون کولن است .

رابطه قانون کولن و قانون گوس



$$|F_1| = |F_2| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$



۱ می توان از قانون کولن برای پیدا کردن میدان ناشی از هر توزیع باری استفاده کرد. اینکار، حداقل از لحاظ عددی، کاملاً ممکن است.

۲ ولی وقتی که توزیع بارها بسیار متقارن هستند، می توان با سادگی بسیار زیادی از قانون گوس برای پیدا کردن میدان استفاده کرد.

۳ درواقع قانون کولن مثل سنگ آسیاب الکتروستاتیک می باشد در حالی که قانون گوس شهود لازم برای درک موضوع را فراهم می کند.

۴ قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ برابر است با بار درون آن سطح بسته (q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

شکل ها به ترتیب از ویکی و مبانی فیزیک هالیدی،
ویرایش هشتم.

قانون گوس:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

۵ در ادامه باید مفاهیم زیر را بفهمیم:

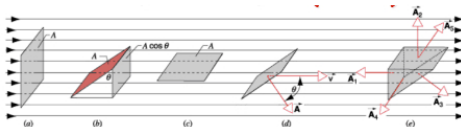
• شار الکتریکی

• سطح بسته

• المان برداری مساحت $d\vec{A}$

• بار درون سطح بسته

مفهوم شار



فرض کنید که سیالی با چگالی ρ و سرعت $\vec{v}$ درون کانالی در حال حرکت است. همچنین فرض کنید که می‌خواهیم میزان سیال گذرنده از یک مستطیل بر واحد زمان را بدانیم (شکل روبه رو). در این صورت به راحتی می‌توان دید که

هرچقدر مساحت مستطیل A بزرگتر باشد، میزان ماده گذرنده بیشتر است.

هرچقدر اندازه سرعت سیال $\vec{v}$ بزرگتر باشد، میزان ماده گذرنده بیشتر است.

در حالتی که $\theta = 0^\circ$ باشد، بیشترین ماده گذرنده را داریم در حالی که وقتی $\theta = \pi/2$ باشد، کمترین ماده گذرنده را داریم.

با توجه به سه نکته بالا می‌توان کمیت

$$\Phi = \rho \vec{v} \cdot \vec{A} = \rho v A \cos \theta$$

را به عنوان آهنگ ماده (سیال) گذرنده بر واحد سطح تعریف کرد.

شار یک کمیت اسکالر است.

شکل از <https://www.docsity.com/>

کمیت Φ را شار می‌نامیم.

برای مرور خصوصیات ضرب داخلی به فصل سوم هالیدی مراجعه کنید.
گاهی اوقات شار را به عنوان تعداد خطوط میدان (در اینجا میدان سرعت $\vec{v}$) گذرنده از واحد سطح نیز معرفی می‌کند.

مساحت $\vec{A}$ یک کمیت برداری است.



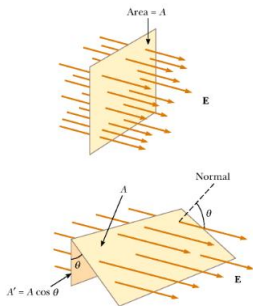
شکل از <https://www.quora.com/>

۱ اندازه بردار $\vec{A}$ برابر است با مساحت سطح مورد نظر.

۲ راستای بردار $\vec{A}$ همیشه عمود بر سطح است.

۳ جهت $\vec{A}$: اگر سطح مورد نظر باز باشد، جهت $\vec{A}$ می تواند در هر کدام از دو سمت ممکن باشد (از آنجا که $\cos \theta = \cos \pi - \theta$ این آزادی مقدار شار را تغییر نخواهد داد.) . اگر سطح مورد نظر بسته باشد، جهت $\vec{A}$ همیشه به سمت بیرون سطح است.
شکل روبه رو را ببینید.

شار میدان الکتریکی



شار یک میدان الکتریکی ثابت که از سطحی مشخص می‌گذرد برابر است با تعداد خطوط میدان گذرنده از آن سطح:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta$$

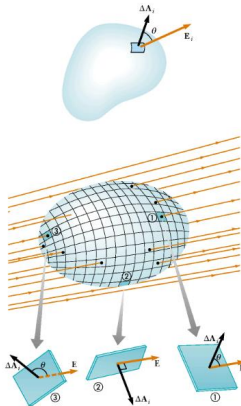
هرچند در بسیاری از موارد میدان الکتریکی ثابت نیست و با مکان (و یا زمان) تغییر می‌کند.

همچنین ممکن است که سطح مورد نظر خمیده باشد.

در این گونه موارد باید تعریف خود از شار را تعمیم دهیم.

شکل‌ها از فیزیک هالیدی، ویرایش نهم.

شار میدان الکتریکی



۱ اگر میدان در همه نقاط فضا ثابت نباشد، و یا سطح مورد نظر خمیده باشد، آنگاه باید سطح موجود را به المان‌های سطح بسیار کوچک تجزیه کنیم (شکل‌های رو به رو).

۲ در این حالت، با توجه به کوچک بودن المان، میدان گذرنده از هر سطح المانی تقریباً ثابت بوده و المان سطح نیز تقریباً هموار است.

۳ بنابراین شار بسیار کوچک (المانی یا دیفرانسیلی) گذرنده از این المان سطح برابر است با

$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

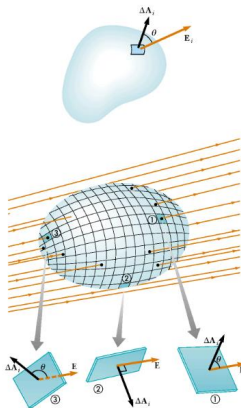
که در آن $\Delta\vec{A}_i$ المان مساحت جزء i ام، $\vec{E}_i$ میدان در مکان این جزء و $\Delta\Phi_i$ شار گذرنده از آن جزء است.

۴ برای پیدا کردن شار کل گذرنده از سطح مورد نظر باید تک تک شارها را با هم جمع کنیم (یادمان نرود که شار یک کمیت اسکالر است):

$$\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + \dots = \sum_{i=1}^N \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

شکل‌ها از فیزیک هالیدی، ویرایش نهم.

شار میدان الکتریکی



۱ در حالت حدی که المان های سطح به اندازه کافی کوچک باشند، جمع بندی نشان داده شده در بالا به انتگرال تبدیل می شود:

$$\Phi = \lim_{\Delta \vec{A}_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i \equiv \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

۲ اگر سطح مورد نظر بسته باشد، مثل یک کره، آنگاه از علامت گذاری زیر برای نشان دادن بسته بودن سطح استفاده می کنیم:

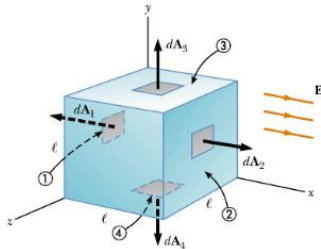
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

۳ لطفا دقت کنید که علامت $\oint$ فقط برای نشان دادن انتگرال روی فضاهای بسته استفاده می شود. برای انتگرال های دیگر از نماد معمول استفاده کنید.

۴ کمیت $d\vec{A}$ المان دیفرانسیلی سطح نامیده می شود.

شکل ها از فیزیک هالیدی، ویرایش نهم.

تمرین



شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش نهم.

تمرین: نشان دهید که شار کل گذرنده از یک مکعب خالی از بار، که در میدان الکتریکی ثابت $\vec{E}$ قرار دارد، برابر صفر است.
پاسخ: شار گذرنده از تک تک سطوح را حساب کرده و نشان می دهیم که مجموع شارها برابر صفر است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 + \int_4 \vec{E} \cdot d\vec{A}_4 + \int_5 \vec{E} \cdot d\vec{A}_5 + \int_6 \vec{E} \cdot d\vec{A}_6$$

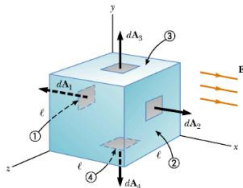
از شکل مقابل واضح است که بر روی سطوح ۳، ۴، ۵ و ۶ (دوای آخر شماره ندارند) بردارهای میدان الکتریکی و المان سطح بر هم عمودند:

$$\vec{E}_i \perp d\vec{A}_i \Rightarrow \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i = 0 \quad \text{for } i = 3, 4, 5, 6$$

بنابراین:

$$\int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = \int_4 \vec{E} \cdot d\vec{A}_4 = \int_5 \vec{E} \cdot d\vec{A}_5 = \int_6 \vec{E} \cdot d\vec{A}_6 = 0$$

تمرین - پاسخ



حال باید انتگرال روی سطوح ۱ و ۲ را حساب کنیم.
بر روی سطح ۱ زاویه بین بردارهای $\vec{E}$ و $d\vec{A}_1$ برابر 180° می باشد. بنابراین

$$\vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E dA_1 \cos \pi = -E dA_1$$

از طرفی مقدار میدان ثابت است. بنابراین E می تواند از انتگرال خارج شود؛ یعنی:

$$\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = -E \int dA_1 = -El^2$$

شکل از فیزیک هالیدی، ویرایش نهم.

بنابراین داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2$$

$$+ \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 + \int_4 \vec{E} \cdot d\vec{A}_4 + \int_5 \vec{E} \cdot d\vec{A}_5 + \int_6 \vec{E} \cdot d\vec{A}_6$$

$$= -El^2 + El^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

که در آن l برابر ضلع مکعب است.

به همین ترتیب، بر روی سطح ۲ زاویه بین بردارهای $\vec{E}$ و $d\vec{A}_2$ برابر 0° می باشد. بنابراین

$$\vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = E dA_2 \cos 0 = E dA_2$$

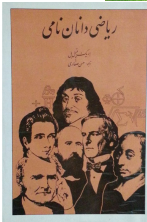
از طرفی مقدار میدان ثابت است. بنابراین E می تواند از انتگرال خارج شود؛ یعنی:

$$\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = E \int dA_2 = El^2$$

نکته

با ریاضیات اندکی پیچیده تر می توان ثابت کرد که شار گذرنده از هر سطح بسته بدون بار صفر است.

کارل فردریش گوس



● ریاضی دان آلمانی

● ۳۰ آوریل ۱۷۷۷ – ۲۳ فوریه ۱۸۵۵

● بزرگترین ریاضی دانی که تا کنون زیسته است (به همراه نیوتن).

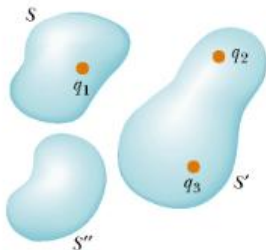
● ریاضیات: جبر، جبر خطی، هندسه ی دیفرانسیلی، نظریه ی اعداد، تحلیل عددی، محاسبات برداری، محاسبات متغیرها، آمار.

● فیزیک: مکانیک کلاسیک، نجوم و الکترومغناطیس.

● مطالعه درباره زندگی و آثار گوس (و چندین ریاضی دان دیگر): کتاب ریاضی دانان نامی، نوشته تمپل بل، ترجمه حسن صفاری.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

قانون گوس



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۱ قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $(\oint \vec{E} \cdot d\vec{A})$ برابر است با بار درون آن سطح بسته (q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 ؛ یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

۲ مثلاً در شکل مقابل داریم:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

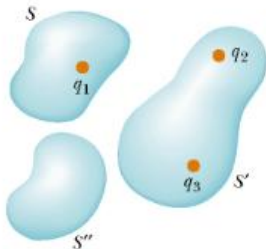
$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S''} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

۳ سطح بسته مذکور در قانون گوس را سطح گوسی می نامیم؛ مانند سطوح S, S', S'' در اینجا.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

قانون گوس



قانون گوس، به لحاظ ریاضیاتی، بیان می‌کند که با داشتن میدان روی یک سطح بسته و انتگرال گیری از آن، می‌توان بار داخل سطح بسته را پیدا کرد.

ولی ما می‌خواهیم به صورت معکوس عمل کنیم! یعنی قصد داریم با داشتن بار داخل سطح بسته، میدان ناشی از آن را بیابیم. خواهیم دید که برای اینکار احتیاج به تقارن بالا داریم.

چرا لازم است مساله متقارن باشد؟

زیرا می‌خواهیم سطحی را پیدا کنیم که مقدار میدان الکتریکی روی آن سطح ثابت باشد و بنابراین از انتگرال خارج شود:

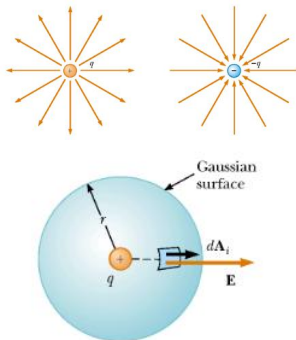
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA \Leftarrow \text{enough symmetry}$$

اگر مساله به اندازه کافی متقارن نباشد، ساده سازی بالا امکان پذیر نبوده و بنابراین استفاده از قانون گوس (برای پیدا کردن میدان) ممکن نخواهد بود $\Leftarrow \Leftarrow$ قانون کولن.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

برای فهم اهمیت تقارن به مثال ساده زیر دقت کنید .

مثال: به دست آوردن قانون کولن از قانون گوس



می خواهیم میدان ناشی از یک بار نقطه ای مثبت را با استفاده از قانون گوس به دست بیاوریم.

سطح گوسی "خوب" برای این مساله سطحی است که مقدار میدان روی آن ثابت باشد. با توجه به اینکه می دانیم میدان بار نقطه ای با شعاع تغییر می کند، بنابراین میدان مورد نظر بر روی تمام نقاطی که به فاصله شعاعی مشخص از بار باشند ثابت خواهد بود. چنین سطحی یک کره است (شکل پایین).

بنا به قرار داد توضیح داده شده در بالا، المان سطح گوسی بسته، یعنی $d\vec{A}$ ، عمود بر سطح و به سمت بیرون است. برای یک بار مثبت، این المان هم جهت با خطوط میدان خواهد بود:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos 0 = E dA$$

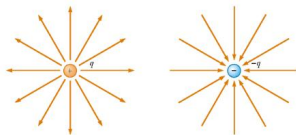
بنابراین سمت چپ قانون گوس به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

در مرحله آخر از ثابت بودن میدان الکتریکی روی سطح گوسی استفاده کرده ایم.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

مثال: به دست آوردن قانون کولن از قانون گوس



انتگرال آخر را می توان به سادگی حل کرد:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA$$

که در آن $A = 4\pi r^2$ برابر با مساحت سطح گوسی (در اینجا کره) است.

سمت راست قانون گوس نیز مربوط به بار داخل سطح گوسی است. با توجه به شکل داریم:

$$q_{in} = q$$

حال با استفاده از قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

و یا

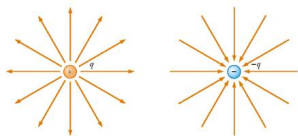
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

که همان قانون مشهور کولن است.

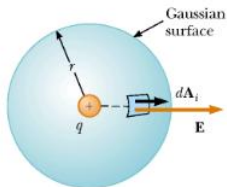
شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

به دست آوردن قانون گوس از قانون کولن نیاز به ابزارهای ریاضی پیشرفته تر دارد و مد نظر ما نیست.

پاسخ دهید:



اگر بخواهیم میدان بار منفی را بیابیم، کدام یک از روابط و استدلال‌های بالا تغییر خواهند کرد. اندازه میدان بار منفی چقدر است؟



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید ویژگی های اصلی شار میدان های برداری و به خصوص شار میدان الکتریکی را بیان کنید. همچنین باید بتوانید مفاهیم مرتبط با قانون گوس را بفهمید. یعنی:

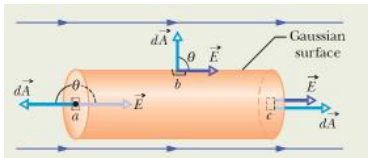
- ۱ مفهوم شار میدان برداری چیست؟ رابطه مربوطه کدام است؟
- ۲ شار میدان الکتریکی برای یک میدان ثابت و سطح مسطح کدام است؟
- ۳ شار میدان الکتریکی در حالت کلی (میدان های متغیر با مکان و سطوح خمیده) کدام است؟
- ۴ قانون گوس را بنویسید.
- ۵ سطح گوسی چیست؟
- ۶ المان سطح چیست؟ اندازه آن کدام است؟ جهت آن برای سطوح باز و بسته چگونه تعیین می شود؟
- ۷ بار الکتریکی در سمت راست قانون گوس چه خصوصیتهایی دارد؟

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراوانش نکنیم که بهترین راه برای جذب مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل مسائل زیر محک زده و تقویت کنید.

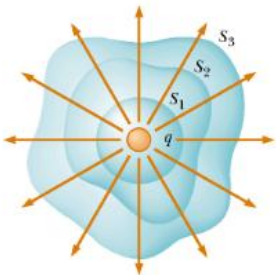


تمرین



نشان دهید که شار میدان الکتریکی گذرنده از استوانه بسته و خالی از بار مقابل، که در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار گرفته است، برابر صفر است.

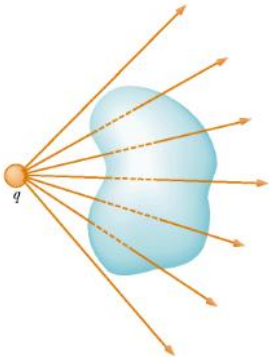
تمرین



استدلال کنید که چرا شارهای گذرنده از سطوح S_1 , S_2 , S_3 برابرند؟

تمرین

شار گذرنده از سطح گوسی مقابل چقدر است؟ چرا؟



مبحث بعدی: استفاده از قانون گوس

در جلسه بعد، درباره استفاده از قانون گوس در موقعیت های مختلف بحث خواهیم کرد.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما