

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

دهمین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



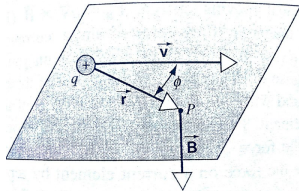
دانشگاه هرمزگان

- این مجموعه درس در ایام همه گیری کرونا در بهار ۱۴۰۰ و با سرعتی بیش از حد معمول تهیه شده است؛ بنابراین، امکان وجود اشتباهات در این ارائه وجود دارد.
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:
h.shenavar@gmail.com
- از همکاران محترم در دانشگاه صنعتی قوچان که با تلاش بسیار امکان ارائه آنلاین این مجموعه درس را فراهم آورده اند، سپاسگزارم.

دهمین جلسه حل تمرین

- یادآوری از قانون بیو-ساوار و قانون آمپر
- یادآوری قانون القای فارادی

میدان مغناطیسی ناشی از بارهای متحرک



آزمایش‌ها نشان داده‌اند که بار الکتریکی در حال حرکت، یک میدان مغناطیسی در اطراف خود ایجاد می‌کند.

اندازه‌گیری‌های دقیق نشان داده‌اند که میدان مغناطیسی ایجاد شده در نقطه P که در فاصله $\vec{r}$ از بار قرار دارد، با اندازه بار q ، سرعت حرکت بار $\vec{v}$ و سینوس زاویه بین $\vec{v}$ و $\vec{r}$ متناسب است ولی با مجذور r رابطه عکس دارد؛ یعنی:

$$B \propto \frac{qv \sin \phi}{r^2}$$

شکل از فیزیک هالیدی ویرایش پنجم.

ضریب تناسب نیز برابر $\mu_0 / 4\pi$ می‌باشد.

جهت میدان مغناطیسی نیز با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود: فرض کنید که بار q مثبت باشد. آنگاه اگر چهار انگشت دست راست را در جهت بردار $\vec{v}$ قرار دهیم و آنها را در جهت بردار $\vec{r}$ بچرخانیم، انگشت شست جهت بردار $\vec{B}$ را نشان خواهد داد.

جمع بندی قانون بیو-ساور برای بار در حال حرکت:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \phi}{r^2} \quad \text{اندازه میدان:}$$

یادآوری قانون بیو-ساوار برای جریان ها و قانون آمپر

یکی از مهم ترین مسائل مطرح در نظریه الکترومغناطیس، یافتن میدان مغناطیسی ناشی از جریان های الکتریکی است. مانند مورد پیدا کردن میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار، در اینجا نیز دو راه داریم:

نخست: استفاده از قانون بیو-ساوار برای یافتن میدان مغناطیسی هر توزیع جریان

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

دلخواه:

دوم: استفاده از قانون آمپر

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in}$$

برای مواردی که به اندازه کافی تقارن دارند.

نقش قانون بیو-ساوار در مغناطیس مانند نقش قانون کولن در الکتروستاتیک است در حالی که نقش قانون آمپر مشابه قانون گوس است.

ثابت μ_0 ثابت تراوایی مغناطیسی خلاء نام دارد و مقدار آن در سیستم یکاهای بین المللی SI برابر است با:

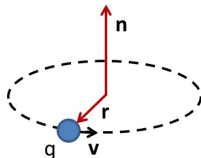
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T m}{A}$$

ثابت های μ_0 و ϵ_0 به سرعت نور مرتبط هستند:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

شکل ها از مبانی فیزیک و اوهانیان.

یادآوری مثالی از جلسه قبل



شکل از نت.

بار الکتریکی $q = -1\mu C$ و جرم یک گرم با سرعت $v = 100\text{ m/s}$ بر روی دایره ای به شعاع $r = 10\text{ cm}$ می چرخد. اندازه و جهت میدان مغناطیسی را بیابید.

اندازه نیروی مغناطیسی وارد شده به یک بار q که با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت میکند برابر است با:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

جهت این نیرو باید به سمت مرکز دایره باشد، یعنی مرکزگرا باشد. با استفاده از قاعده دست راست، و با توجه به منفی بودن بار q ، در می یابیم که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ باید با $\vec{n}$ هم جهت باشد. اندازه نیروی مغناطیسی برابر است با

$$F_B = qvB$$

زیرا بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ بر هم عمودند. از طرفی هر نیروی مرکزگرا برابر است با mv^2/r . بنابراین:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

$$B = \frac{mv}{rq} \quad \text{و یا}$$

که با توجه به مقادیر داده شده در صورت سوال

$$B = 10^6\text{ T}.$$

حال به سوال کاملا متفاوت زیر دقت کنید: $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

میدان مغناطیسی ناشی از یک بار متحرک

بار الکتریکی $q = -1\mu C$ با سرعت $v = 100\text{ m/s}$ بر روی دایره ای به شعاع $r = 10\text{ cm}$ می چرخد. اندازه و جهت میدان مغناطیسی **تولید شده توسط بار q** را بیابید. جواب را می توانیم با استفاده از رابطه

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

بدست آوریم.

پیدا کردن جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$: جهت $\vec{v} \times \vec{r}$ به سمت پایین است (یعنی در جهت $-\vec{n}$). ولی از طرفی با توجه به اینکه بار q منفی است، جهت $\vec{B}$ در جهت $\vec{n}$ خواهد بود.

پیدا کردن اندازه میدان مغناطیسی $\vec{B}$: اندازه بردار $\vec{r}$ برابر شعاع دایره R است. از طرفی داریم:

$$|\vec{v} \times \vec{r}| = |\vec{v}||\vec{r}| \sin \pi/2 = vR$$

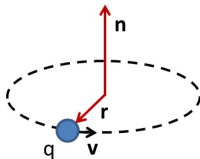
زیرا بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{r}$ بر هم عمودند. بنابراین:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 q v}{4\pi R^2}$$

که با توجه به مقادیر داده شده در صورت سوال

$$B = 10^{-9} \text{ T} = 1 \text{ nT}$$

هرچند، بررسی دقیق تر الکترومغناطیس (در واقع الکتروپنایمیک!) نشان می دهد که مساله میدان ناشی از یک بار الکتریکی **شتابدار** پیچیده تر از محاسبه ساده بالاست. این موضوع در مباحث بسیار پیشرفته تر الکتروپنایمیک مطرح می شود و ما در اینجا وارد آن نخواهیم شد.



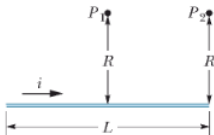
شکل از نت.

مثال از قانون بیو-ساویر

سیمی با جریان i و طول L را در نظر بگیرید. با استفاده از قانون بیو-ساویر یعنی

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3}$$

که در آن $d\vec{s}$ المانی از مدار با جریان i می باشد، در حالی که $\vec{r}$ نقطه مشاهده است؛ میدان مغناطیسی در نقطه P_1 را بیابید.



مساله برای نقطه P_1 در کلاس حل شده است و همانطور که خواهیم دید، حل مساله برای نقطه P_2 نیز بسیار شبیه به حل مساله برای نقطه P_1 است.

بردار $d\vec{x}$ المانی از جریان را نشان می دهد که البته همان بردار $d\vec{s}$ است. بردارهای $d\vec{s}$ و $d\vec{x}$ باید هم جهت با جهت جریان باشند. بردار $\vec{r}$ نیز طبق معمول نقطه مشاهده را به المان جریان

وصل می کند و اندازه آن برابر است با $r = \sqrt{R^2 + (L - x)^2}$. بنابراین بنا به تعریف

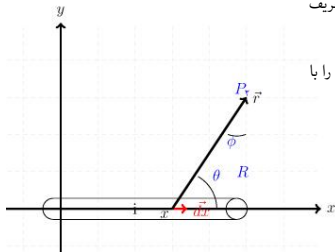
$$|d\vec{s} \times \vec{r}| = r dx \sin \theta$$

که در آن با توجه به شکل $\sin \theta = \frac{R}{r}$. پس می توان اندازه دیفرانسیلی میدان مغناطیسی را با استفاده از قانون بیو-ساویر به صورت زیر نوشت:

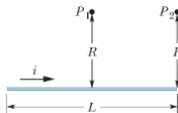
$$dB = \frac{\mu_0 i dx \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{dx}{(R^2 + (L - x)^2)^{3/2}}$$

بنابراین میدان کل به صورت زیر بدست می آید:

$$B = \int_0^L dB = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^L \frac{dx}{(R^2 + (L - x)^2)^{3/2}}$$



مثال از قانون بیو-ساوار- ادامه



حالا می توان نتیجه انتگرال بالا را با استفاده از تغییر متغیر تانژانت بدست آورد:

$$\tan \phi = \frac{L - x}{R} \quad \rightarrow \quad -dx = R(1 + \tan^2 \phi) d\phi$$

به اختلاف بین ϕ و θ در شکل توجه فرمایید. با استفاده از تغییر متغیر بالا می توان انتگرال مورد نظر را به صورت زیر نوشت:

$$B = \int_0^B dB = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int \frac{-R(1 + \tan^2 \phi) d\phi}{(R^2 + R^2 \tan^2 \phi)^{3/2}}$$

که پس از ساده سازی و استفاده از اتحاد $1 + \tan^2 \phi = \frac{1}{\cos^2 \phi}$ به صورت زیر تبدیل می شود:

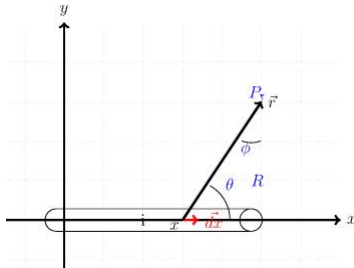
$$B = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int \cos \phi d\phi$$

$$B = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} [\sin \phi] = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[\frac{L - x}{\sqrt{R^2 + (L - x)^2}} \right]_0^L$$

با جایگذاری حدود انتگرال داریم:

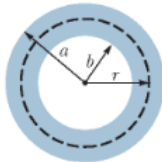
$$B = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

جهت بردار $\vec{B}$ به کدام سمت است؟



شکل بالا از مبانی هالیدی.

مثال از قانون آمپر



یک سیم مستقیم بلند توخالی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی a و با جریان برون سوی i را در نظر بگیرید. الف) میدان مغناطیسی در کدام جهت است؟ ب) با استفاده از قانون آمپر ثابت کنید که میدان مغناطیسی در شعاع $b < r < a$ برابر است با

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}$$

شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

برای یافتن جواب این سوال باید از قانون آمپر $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in}$

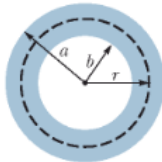
استفاده کنیم. حلقه آمپری در شکل بالا به شکل خط چین نمایش داده شده است. الف) پیدا کردن سمت چپ قانون آمپر:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds \cos 0^\circ = B \oint ds$$

انتگرال $\oint ds$ همان محیط دایره است. بنابراین برای سمت چپ قانون آمپر داریم:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r)$$

مثال از قانون آمپر



شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

ب) پیدا کردن جریان داخل حلقه آمپری با استفاده از تناسب: مساحت کابل برابر است با مساحت دایره بزرگتر منهای مساحت دایره کوچکتر. بنابراین جریان کل i از مساحت $\pi(a^2 - b^2)$ عبور میکند. از طرفی جریان درون حلقه آمپری I_{in} از مساحت $\pi(r^2 - b^2)$ عبور میکند. بنابراین تناسب مقابل را داریم:

$$I_{in} \quad \pi(r^2 - b^2)$$

که از آن جریان درون حلقه آمپری I_{in} به صورت زیر پیدا می شود:

$$I_{in} = i \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

حال با استفاده از قانون آمپر $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in}$ داریم:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{in}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r} \quad \text{و یا}$$

مثال دیگری از قانون آمپر

در شکل مقابل، چگالی جریان درون سیم دایره شکل به شعاع R با رابطه

$$J(r) = J_0 r$$

با شعاع تغییر می کند. الف) جریان درون یک حلقه آمپری به شعاع r (خط چین قرمز رنگ) را با استفاده از انتگرال

$$I(r) = \int J(r) dA$$

به دست آورید. در اینجا dA المان مساحت یک حلقه دایروی نازک است. ب) میدان مغناطیسی در داخل سیم ($r < R$) و خارج آن ($r > R$) را با استفاده از قانون آمپر بیابید.

پاسخ الف) نکته مهم در این مساله پیدا کردن جریان درون حلقه آمپری است. برای داخل سیم، با توجه به اینکه چگالی جریان ثابت نیست، داریم:

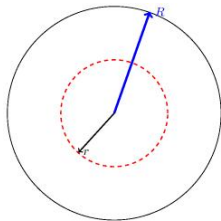
$$I(r) = \int J(r) dA = \int_0^r J_0 r (\pi r dr) = \pi J_0 \int_0^r r^2 dr$$

$$I(r) = \pi J_0 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^r = \frac{\pi J_0}{3} r^3 \quad \text{for } r < R$$

به همین ترتیب، برای خارج سیم داریم:

$$I(r) = \int J(r) dA = \int_0^R J_0 r (\pi r dr) = \frac{\pi J_0}{3} R^3 \quad \text{for } r > R$$

زیرا که جریان فقط تا شعاع R ادامه دارد.



مثال دیگری از قانون آمپر- ادامه

پیدا کردن سمت چپ قانون آمپر: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds \cos 0 = B \oint ds$

انتگرال $\oint ds$ همان محیط دایره است. بنابراین برای سمت چپ قانون آمپر داریم:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r)$$

پیدا کردن میدان مغناطیسی داخل سیم: با استفاده از قانون آمپر $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in}$ داریم:

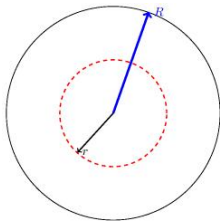
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow B(2\pi r) = \frac{2\pi J_0}{3} r^3$$

$$B_{in}(r) = \frac{J_0}{3} r^2 \quad \text{و یا}$$

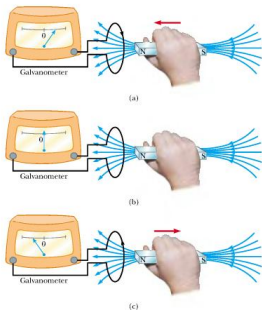
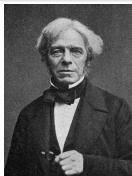
پیدا کردن میدان مغناطیسی خارج سیم: با استفاده از قانون آمپر $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in}$ داریم:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{in} \Rightarrow B(2\pi r) = \frac{2\pi J_0}{3} R^3$$

$$B_{out}(r) = \frac{J_0}{3r} R^3 \quad \text{و یا}$$



یادآوری قانون القای فارادی



اندازه نیروی محرکه القایی در یک مدار برابر است با آهنگ تغییر در شار مغناطیسی نسبت به زمان:

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$

در اینجا نیروی محرکه القایی برابر است با انتگرال میدان الکتریکی روی حلقه بسته مورد نظر؛ یعنی

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

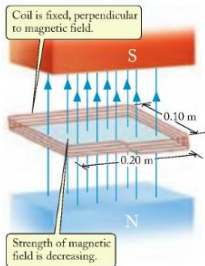
قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی: شار میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی به صورتی است که با تغییر شار عامل القا مقابله می‌کند. شکل مقابل را ببینید.

جمع بندی قانون القای فارادی: هرگاه میزان شار مغناطیسی که از یک مدار بسته می‌گذرد تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییرات شار مغناطیسی متناسب است:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

شکل ها از ویکی پدیا و مبنای فیزیک.

مثالی از القا



شکل از اوهانیان.

یک سیم پیچ به ابعاد $0.2 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ شامل 150 دور سیم است. مقاومت این سیم پیچ 5Ω می باشد. این سیم پیچ بین حد واسط قطب های یک آهنربای الکتریکی با میدان مغناطیسی B قرار گرفته است. فرض کنید که وقتی مغناطیس را خاموش می کنیم اندازه میدان مغناطیسی با آهنگ 20 تسلا بر ثانیه کاهش می یابد. در این صورت نیروی محرکه القا شده چقدر است؟ جهت و اندازه جریان حاصله چقدر است؟

مقدار نیروی محرکه القا شده بنا به قانون القای فارادی برابر است با

$$|\mathcal{E}| = N \frac{d\Phi_B}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = 150 \times (0.2 \times 0.1) 20 = 60 \text{ V}$$

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{60}{5} = 12 \text{ A}$$

اندازه جریان:

جهت جریان، با توجه به قانون لنز، و قانون دست راست، پادساعتگرد است.

مراجع

- ❶ Halliday, D., R. Resnick, and K. S. Krane. "Physics, 5th edn." (2002).
- ❷ Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker; Fundamentals of physics, 10th edn. John Wiley & Sons, 2014.
- ❸ Ohanian, Hans C., and John T. Markert. Physics for engineers and scientists, 3th edn. 2007.
- ❹ Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Albert Lewis Ford. Sears and Zeman-sky's university physics, 13th edn. Pearson education, 2006.

با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.