

فضاهای برداری و ریاضیات مکانیک کوانتومی

عملگرها در فضای توابع

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



دانشگاه هرمزگان

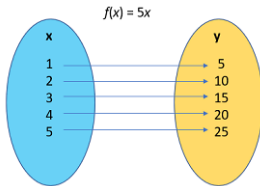
- خواهشمندم هرگونه اشتباه نوشتاری، مفهومی و یا محاسباتی را به آدرس ایمیل من ارسال کنید تا در ویرایش های بعدی تصحیحات لازم اعمال شوند:

h.shenavar@gmail.com

- از همکاران و دانشجویان محترم در دانشگاه هرمزگان، برای همفکری ها، حمایت ها و گوشزد نمودن نکات مفید سپاسگزارم.
- برای ضبط این درس ها از نرم افزار Camtasia استفاده شده است.

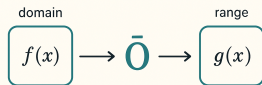
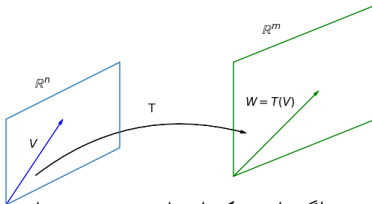
- ۱ عملگرها در فضای توابع
- عملگرها در فضای توابع
- جابجاگر
- عملگرهای همانی، وارون و الحاقی

عملگرها در فضای توابع



یادآوری می کنیم که تابع نگاشتی است که (معمولا) اعداد را به اعداد تصویر می کند.

عملگر (operator) نگاشتی است که توابع (و یا بردارهای) موجود در دامنه اش را به توابع (بردار) موجود در برد خود تصویر می کند.



توجه کنید که در حالت کلی لازم نیست دامنه و برد عملگر با هم یکسان باشند. هرچند، ما در ادامه مواردی را در نظر خواهیم گرفت که دامنه و برد یکسان اند و بخشی و یا همه فضای هیلبرت را تشکیل می دهند.

عملگرها در فضای توابع

• برای روشن شدن مفهوم عملگر، چند مورد زیر را به عنوان عملگر در نظر بگیرید:

۱ ضرب تابع در دو: تابع f را به تابع $2f$ تبدیل می کند.

۲ مشتق: در فضایی که توابع f بر روی آن تعریف شده اند، عملگر مشتق، یک تابع مانند f را به تابع df/dx تصویر می کند.

۳ انتگرال: عملگر انتگرال A به صورت زیر بر روی تابع f عمل می کند.

$$A f(x) = \int G(x, x') f(x') dx'$$

یک مثال خاص از عملگر انتگرال، عملگر تصویر (projection) و یا $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ است که تابع f را به تابع $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|f\rangle$ تصویر می کند.

• عملگرهایی که ما در اینجا در نظر می گیریم خطی نیز هستند. اگر A و B دو عملگر خطی باشند و f و g دو تابع و k یک ثابت باشند، آنگاه شرایط زیر برقرار است:

$$(A + B)f = Af + Bf, \quad A(f + g) = Af + Ag, \quad Ak = kA$$

• توجه: وقتی یک معادله عملگری مانند $M = N$ می نویسیم، این معادله به این معناست که تاثیر عملگری Mf بر همه توابع f برابر با تاثیر عملگری Nf بر همه توابع f است.

عملگرهای دیفرانسیلی

			یک دسته بسیار مهم از عملگرها در نظریه های الکترومغناطیس و مکانیک کوانتومی عملگرهای دیفرانسیلی هستند. این عملگرها شامل مشتقات توابع هستند و وقتی ظاهر می شوند که معادلات حاکم بر نظریه را به شکل دیفرانسیلی می نویسیم. مثلاً عملگر
$f(x)$	Any function of position, such as x , or potential $V(x)$	$f(x)$	
p_x	x component of momentum (y and z same form)	$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$	
E	Hamiltonian (time independent)	$\frac{p_{op}^2}{2m} + V(x)$	
E	Hamiltonian (time dependent)	$ih \frac{\partial}{\partial t}$	$\mathcal{L}(x) = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$
KE	Kinetic energy	$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	به ما اجازه می دهد که معادله دیفرانسیل لژاندر، یعنی
L_z	z component of angular momentum	$-ih \frac{\partial}{\partial \phi}$	$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0.$
			را به شکل $\mathcal{L}(y) y = -\lambda y$ و یا به سادگی $\mathcal{L} y = -\lambda y$ بنویسیم. برخی عملگرهای دیفرانسیلی مهم دیگر $\Leftarrow \Leftarrow \Leftarrow$

جایجاگر دو عملگر

با توجه به اینکه عملگرهای دیفرانسیلی همیشه از سمت چپ بر روی توابع اثر می کنند، تاثیر متوالی دو عملگر بر روی یک تابع با متغیر مستقل مشترک می تواند در حالت کلی به ترتیب اثرگذاری آن دو عملگر وابسته باشد. یعنی ممکن است اثر AB با اثر BA متفاوت باشد. به همین دلیل در نظریه عملگرها همیشه جایجاگر دو عملگر می تواند مفید باشد:

$$[A, B] = AB - BA$$

اغلب می توان عملگر $[A, B]$ را به صورت ساده تری نوشت. مثال زیر را در نظر بگیرید.

در مکانیک کوانتومی (در یک بعد) موقعیت ذره را با x و تکانه را با $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ نشان می دهیم. هرچند، فعلا فرض کنید داریم $\hbar = h/2\pi = 1$. در این صورت جایجاگر $[x, p]$ را به

$$[x, p]f(x) = (xp - px)f(x) = -ix \frac{df(x)}{dx} - \left(-i \frac{d}{dx}\right)(xf(x))$$

$$= -ixf'(x) + i(f(x) + xf'(x)) = if(x),$$

و یا $[x, p] = i$. این رابطه بدان معناست که برای تمام توابع f داریم

$$[x, p] f(x) = i f(x)$$

تمرین: روابط زیر را اثبات کنید.

$$[A, B] = -[B, A], \quad [A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad k[A, B] = [kA, B] = [A, kB]$$

کار کردن با جابجاگرها

- تمرین: روابط زیر را اثبات کنید.

$$[A, B] = -[B, A], \quad [A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad k[A, B] = [kA, B] = [A, kB]$$

اثبات اولی:

$$[A, B] f(x) = (AB - BA) f(x) = -(BA - AB) f(x) = -[B, A] f(x)$$

$$\Rightarrow [A, B] = -[B, A]$$

- با استفاده از روابط بالا می توان روابط کلی مانند $[x^n, p^m]$ را محاسبه کرد. مثلاً برای $[x, p^2]$ داریم:

$$[x, p^2] = xp^2 - pxp + pxp - p^2x = [x, p]p + p[x, p] = 2i p$$

البته این جابجاگر را می توان به صورت زیر هم حساب کرد:

$$x \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) f(x) - \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) x f(x) = 2f'(x) = 2i \left(-i \frac{d}{dx} \right) f(x)$$

- تمرین: جابجاگرهای $[x, p^m]$ ، $[x^n, p]$ و $[x^n, p^m]$ را حساب کنید.

عملگرهای همانی، وارون و الحاقی

- عملگر همانی (Identity) عملگری است که با اثر بر روی هر تابع آن را بدون تغییر باقی می گذارد. این عملگر را معمولاً با I و یا 1 نشان می دهند.
- عملگر A را در نظر بگیرید. وارون A اگر وجود داشته باشد، عملگری است که اثر عملگر A را خنثی می کند. عملگر وارون را با A^{-1} نشان می دهند.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$
البته توجه کنید که برخی عملگرها وارون ناپذیرند.
- برای بسیاری از عملگرها می توان عملگر الحاقی (adjoint) را تعریف کرد، به صورتی که برای همه توابع f و g در فضای هیلبرت داشته باشیم

$$\langle f | Ag \rangle = \langle A^\dagger f | g \rangle$$
الحاقی عملگر A را با $A^\dagger$ نشان می دهیم. بنابراین، عملگری است که اگر بر روی عضو سمت چپ هر ضرب داخلی عمل کند، نتیجه آن برابر خواهد بود با وقتی که A بر روی عضو سمت راست ضرب داخلی عمل می کند.
- عملگر هرمیتی یا خودالحاق: اگر عملگری با الحاقی خودش برابر باشد $A^\dagger = A$ ، آن عملگر را خودالحاق و یا هرمیتی می نامند. همچنین اگر داشته باشیم $A^\dagger = -A$ ، عملگر مورد نظر را پادهرمیتی می نامند. همه مشاهده پذیرها در مکانیک کوانتومی هرمیتی هستند.

عملگرهای یکانی

● عملگر یکانی: اگر وارون عملگری با الحاقی آن برابر باشد $U^\dagger = U^{-1}$ ، آن عملگر را یکانی (unitary) می نامند.

● اگر عملگری به صورت همزمان حقیقی و یکانی باشد، آن عملگر را متعامد (orthogonal) می نامند.

● توجه کنید که اسامی استفاده شده در اینجا برای عملگرهای یکانی، وارون و الحاقی دقیقاً مانند اسامی استفاده شده در بخش ماتریس هاست. این البته اتفاقی نیست و یک تناظر بسیار مهم بین نمایش عملگری و نمایش ماتریسی وجود دارد.

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

پیدا کردن عملگر الحاقی

فرض کنید عملگر $A = x \, d/dx$ در فضای هیلبرت تعریف شده است. در این فضای هیلبرت، توابع f به صورتی تعریف شده اند که انتگرال پذیر مجذوری اند ($\mathcal{L}^2$)؛ یعنی مقدار $\langle f|f \rangle$ محدود است. همچنین ضرب داخلی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

روش پیدا کردن الحاقی به این صورت است که شکل انتگرالی $\langle f|Ag \rangle$ را می نویسیم. در اینجا عملگر A بر روی تابع سمت راست موجود در ضرب داخلی یعنی g اثر می کند. حال با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، کاری می کنیم که عملگر A به سمت چپ ضرب داخلی منتقل شود و بر روی f^* عمل کند. همچنین، با توجه به اینکه توابع f و g در $\pm\infty$ صفر می شوند، جمله حدی در انتگرال گیری جزء به جزء از بین می رود. عملگری که باقی می ماند و بر روی f^* عمل می کند را عملگر الحاقی A می نامیم و با $A^\dagger$ نشان می دهیم.

تمرین: الحاقی عملگر $A = x \, d/dx$ را بیابید. پاسخ در ادامه آمده است.

یافتن الحاقی یک عملگر

تمرین: الحاقی عملگر $A = x \, d/dx$ را بیابید. پاسخ در ادامه آمده است.

روش پیدا کردن الحاقی به این صورت است که شکل انتگرالی $\langle f | A g \rangle$ را می نویسیم. در اینجا عملگر A بر روی تابع سمت راست موجود در ضرب داخلی یعنی g اثر می کند. حال با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، کاری می کنیم که عملگر A به سمت چپ ضرب داخلی منتقل شود و بر روی f^* عمل کند. همچنین، با توجه به اینکه توابع f و g در $\pm\infty$ صفر می شوند، جمله حدی در انتگرال گیری جزء به جزء از بین می رود. عملگری که باقی می ماند و بر روی f^* عمل می کند را عملگر الحاقی A می نامیم و با $A^\dagger$ نشان می دهیم.

پاسخ: یادآوری $\int_a^b u \, dv = uv|_a^b - \int_a^b v \, du$

$$\begin{aligned}\langle f | A g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f^* x \frac{dg}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x f^*) \frac{dg}{dx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x f^*)}{dx} g dx \\ &= \left\langle - \left(\frac{d}{dx} \right) x f \middle| g \right\rangle.\end{aligned}$$

از اینجا متوجه می شویم که $A^\dagger = -(d/dx)x$. بنابراین در واقع داریم $A^\dagger = -A - 1$. در نتیجه عملگر A نه هرمیتی و نه یکانی است.

پیدا کردن الحاقی یک عملگر

تمرین:

 $f(x)$ Any function of position, such as x , or potential $V(x)$ p_x x component of momentum (y and z same form) E Hamiltonian (time independent) E Hamiltonian (time dependent) KE Kinetic energy L_z z component of angular momentum $f(x)$ $\hbar \frac{\partial}{i \partial x}$ $\frac{p_{op}^2}{2m} + V(x)$ $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

الف) الحاقی عملگرهای فیزیکی مقابل را با استفاده از تعریف ضرب داخلی زیر

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx$$

بیابید.

ب) چه چیزی درباره این عملگرها مشترک است؟

عملگر الحاقی به تعریف ضرب داخلی وابسته است.

• عملگر الحاقی به تعریف ضرب داخلی وابسته است. این نکته را با مثال زیر نشان خواهیم داد.

• مثال: با استفاده از تعریف مقابل از ضرب داخلی
نشان دهید که عملگر $A = -i\frac{d}{dx}$ خودالحاقی است.

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx$$

اثبات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^* \left(-i \frac{dg}{dx} \right) dx = -if^*g \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(i \frac{df^*}{dx} \right) g dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i \frac{df}{dx} \right)^* g dx$$

از اینجا نتیجه می گیریم $A = A^\dagger$ و در نتیجه A هرمیتی (خودالحاق) است. ولی حالا فرض کنید که بازه انتگرال گیری در تعریف ضرب داخلی $-1 \leq x \leq +1$ است. در اینصورت جمله اول در انتگرال گیری جزء به جزء صفر نمی شود و می توان با استفاده از دلتای دیراک وارد انتگرالده شود (چطور؟!)

$$\left\langle f \left| -i \frac{d}{dx} \right| g \right\rangle = -if^*g \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left(-i \frac{df}{dx} \right)^* g dx$$

پس A در این حالت خودالحاق نیست.

$$= \int_{-1}^1 \left(\left[i\delta(x-1) - i\delta(x+1) - i \frac{d}{dx} \right] f(x) \right)^* g(x) dx$$

نتیجه: عملگر الحاقی به تعریف ضرب داخلی وابسته است.

نکات مهم این درس

انتظار این است که در انتهای این درس شما بتوانید عملگرها در فضای توابع و مهم ترین نتایج و کاربرد آنها را به درستی توضیح دهید. به ویژه انتظار می رود که بتوانید پرسش های زیر را پاسخ دهید:

- ۱ تفاوت عملگر و تابع را توضیح دهید.
- ۲ چند نمونه عملگر را بنویسید.
- ۳ ویژگی های جبری اصلی عملگرها را بنویسید.
- ۴ منظور از جابجاگر دو عملگر چیست؟ کدام عملگرها را جابجا پذیر می نامند؟
- ۵ جابجاگر موقعیت و تکانه در مکانیک کوانتومی را بنویسید.
- ۶ منظور از عملگر همانی چیست؟
- ۷ منظور از عملگر وارون چیست؟
- ۸ منظور از عملگر الحاقی چیست؟
- ۹ منظور از عملگر خودالحاق (هرمیتی) چیست؟
- ۱۰ روش دقیق پیدا کردن الحاقی یک عملگر را با ذکر یک مثال توضیح دهید.

اگر درباره هر کدام از مفاهیم یاد شده بالا مشکلی احساس می کنید، لطفا درس را یک بار دیگر مرور کنید.

فراموش نکنیم که بهترین راه برای درک و ”درونی سازی“ مفاهیم ریاضی و فیزیک، حل مساله است. به همین دلیل سعی کنید دانسته های خود را با حل سوالات محک زده و تقویت کنید. این مساله ها در انتهای هر درس ارائه می شوند.

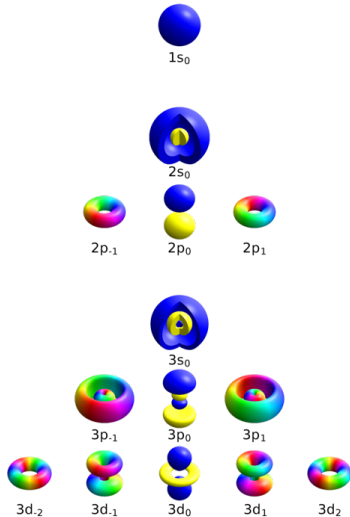


تمرین

• تمرین های موجود در متن درس را پاسخ دهید.

مبحث بعدی: عملگرها در پایه های خاص و نمایش ماتریس آنها

- در جلسه بعد با مفهوم نوشتن عملگرها در پایه های خاص و نمایش ماتریس آنها آشنا خواهیم شد.



منابع

- ❶ Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide (7th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Academic Press (2012)
- ❷ Mathematical Methods for Physicists (6th Edition) by George B. Arfken, Hans J. Weber, Academic Press (2012)
- ❸ Mathematical Methods for Physics and Engineering, 3rd Edition, by K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence , Cambridge University Press (2006)
- ❹ Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, 2nd ed, by Sadri Hassani (2013)
- ❺ Methods of Theoretical Physics I, II, Morse, Philip M. and Feshbach, Herman, McGraw-Hill (1953)
- ❻ <https://math.libretexts.org/>
- ❼ <https://www.youtube.com/@eigenchris>

با سپاس از توجه شما