

فیزیک الکتریسیته و مغناطیس

سومین جلسه حل تمرین

حسین شناور

گروه فیزیک، دانشکده علوم



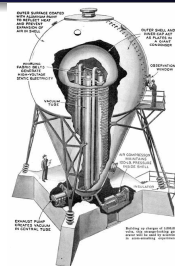
دانشگاه هرمزگان

سومين جلسه حل تمرين ۱

دو پرسش مطرح شده در جلسات قبل



ماهیت الکترون ها و دیگر ذرات بنیادی



فیلم های مربوط به مولد واندوگراف برای تولید بار الکتریکی را ببینید.

یادآوری بسط توابع

B.5

SERIES EXPANSIONS

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad |x| < \pi/2$$

} x in radians

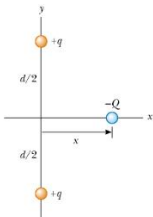
For $x \ll 1$, the following approximations can be used¹:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad \sin x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x \quad \cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \quad \tan x \approx x$$

یادآوری بسط توابع؛ مثال



(۳) قانون کولن:

الف) در شکل مقابل دو بار $+q$ چه نیروی کلی به بار $-Q$ وارد می کنند؟ اندازه و جهت این نیرو را تعیین کنید.
ب) با

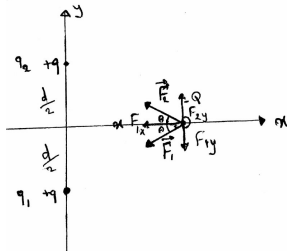
استفاده از بسط $(1 \pm \epsilon)^n = 1 \pm n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2 + \dots$

نیروی بدست آمده را با فرض $x \ll d$ بسط دهید.

پ) نشان دهید که این نیرو وقتی $x \ll d$ می باشد، با فاصله x متناسب است.

ت) حرکت جسم در این حالت چه نوع حرکتی است؟

پاسخ



الف) نیروهای وارده از طرف دو بار $+q$ به بار $-Q$ را در شکل مقابل نمایش داده ایم. اندازه این نیروها برابر است با

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{KqQ}{r^2}$$

که در آن $r = \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + x^2}$. همچنین، بنا به اصل برهمهنی نیروی کل برابر است با مجموع نیروها؛

یعنی $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. حال میخواهیم مولفه های افقی و عمودی نیروی کل را بیابیم. نخست، توجه می کنیم که

$$F_{1x} = F_1 \cos \theta = F_{2x} = F_2 \cos \theta = \frac{KqQ}{(\frac{d}{2})^2 + x^2} \cos \theta$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \theta = F_{2y} = F_2 \sin \theta = \frac{KqQ}{(\frac{d}{2})^2 + x^2} \sin \theta$$

که در آن $\cos \theta = x / \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + x^2}$ و $\sin \theta = \frac{d}{2} / \sqrt{(\frac{d}{2})^2 + x^2}$

پاسخ- ادامه

از شکل بالا مشخص است که نیروها در جهت x همدیگر را تقویت کرده و در جهت y همدیگر را تضعیف می کنند. بنابراین می توان مولفه های نیروی کل را، با توجه به شکل بالا، به صورت زیر نوشت:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 2 \frac{KqQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \cos \theta = 2 \frac{KqQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}} = \frac{2KqQx}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$F_y = F_{1y} - F_{2y} = 0$$

جهت نیروی F_x به سمت چپ است (در واقع جهت F_x در این مساله همیشه بر خلاف علامت x می باشد زیرا اگر x منفی باشد، جهت F_x به سمت راست خواهد بود).

ب) وقتی که بار $-Q$ در فواصل بسیار نزدیک نسبت به مرکز قرار می گیرد، یعنی وقتی داریم $d/2 \gg x$ ، می توان نیروی F_x را به صورت زیر بسط داد:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = \frac{2KqQx}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{2KqQx}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{d/2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{2KqQx}{\left(\frac{d}{2}\right)^3} \left(1 + \left(\frac{2x}{d}\right)^2\right)^{-3/2}$$

$$F_x = \frac{16KqQx}{d^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{2x}{d}\right)^2 + \dots\right)$$

پاسخ- ادامه

پ) واضح است که در فواصل بسیار نزدیک داریم $1 \ll 2x/d$ ؛ بنابراین توان های بالاتر $2x/d$ همیشه سهم کوچکتري دارند؛ يعنى

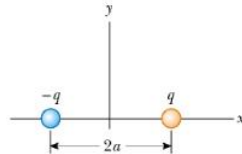
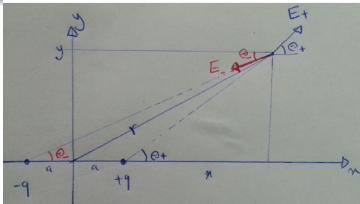
$$2x/d \gg (2x/d)^2 \gg (2x/d)^3 \gg \dots$$

پس نيروى F_x را در مرتبه اول تقريب مى توان به صورت زير نوشت:

$$F_x \simeq \frac{16KqQ}{d^3} x$$

ت) اندازه نيروى بدست آمده با x متناسب بوده و جهت آن هميشه با خلاف جهت x است (بنا به بحث بالا). حرکت ناشى از چنين نيروى يك حرکت نوسانى خواهد بود.

مثال دوم



شکل از مبانی فیزیک هالیدی.

میدان بارهای مثبت و منفی را در یک نقطه دلخواه فضا به مختصات (x, y) می یابیم:

$$|\vec{E}_+| = \frac{Kq}{(x-a)^2 + y^2} \quad |\vec{E}_-| = \frac{Kq}{(x+a)^2 + y^2}$$

که در آن

$$\cos \theta_+ = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \quad \sin \theta_+ = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

$$\cos \theta_- = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \quad \sin \theta_- = \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}$$

میدان الکتریکی یک دو قطبی در یک نقطه دلخواه فضا: نشان دهید که در فواصل بسیار زیاد از دو قطبی، مولفه های E_x و E_y میدان الکتریکی در یک نقطه دلخواه فضا به مختصات (x, y) به صورت زیر هستند:

$$E_y = \frac{3Kpxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_x = \frac{Kp(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

پاسخ- یافتن E_x

حال برای پیدا کردن مولفه میدان در جهت x داریم:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_+ \cos \theta_+ - E_- \cos \theta_- = \frac{Kq}{(x-a)^2 + y^2} \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{Kq}{(x+a)^2 + y^2} \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \\
 &= \frac{Kq(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Kq(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Kq(x-a)}{(x^2 + y^2 - 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Kq(x+a)}{(x^2 + y^2 + 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{Kq}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{x-a}{\left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+a}{\left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
 &= \frac{Kq}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(x-a) \left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - (x+a) \left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

حال باید عبارت اخیر را بر حسب پارامتر بسیار کوچک $\epsilon = \frac{2ax}{x^2 + y^2}$ بسط دهیم.

یادآوری بسط دوجمله ای: $(1 \pm \epsilon)^n = 1 \pm n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \epsilon^2 + \dots$

پاسخ- یافتن E_x

با بسط دادن عبارت اخیر بر حسب پارامتر $\epsilon = \frac{yax}{x^2+y^2}$ داریم:

$$E_x = \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(x-a) \left(1 - \frac{yax}{x^2+y^2} \right)^{-\frac{3}{2}} - (x+a) \left(1 + \frac{yax}{x^2+y^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(x-a) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{yax}{x^2+y^2} + \dots \right) - (x+a) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{yax}{x^2+y^2} + \dots \right) \right]$$

فقط جملات درجه اول بر حسب a را نگه می داریم (جملات متناس با a^2, a^3 و ... بسیار کوچک هستند.):

$$E_x = \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-ya + \frac{yax}{x^2+y^2} \right] = \frac{Kq(ya)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} (x^2 - y^2) = \frac{Kp (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

که همان جواب مورد نظر است.

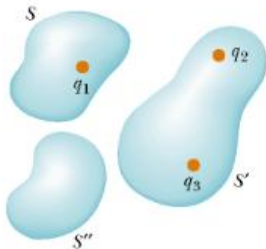
پاسخ- یافتن E_y

برای پیدا کردن مولفه میدان در جهت y داریم:

$$\begin{aligned}
 E_y &= E_+ \sin \theta_+ - E_- \sin \theta_- = \frac{Kq}{(x-a)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{Kq}{(x+a)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \\
 &= Kqy \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 - 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + 2ax + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \frac{Kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
 &= \frac{Kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \\
 &= \frac{Kqy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 + \frac{2ax}{x^2 + y^2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2ax}{x^2 + y^2} + \dots\right) \right] = \frac{6Kaqxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3Kpxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

یادآوری قانون گوس



شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

۱ قانون گوس: شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (برابر است با بار درون آن سطح بسته q_{in}) تقسیم بر ϵ_0 ؛ یعنی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

۲ مثلاً در شکل مقابل داریم:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

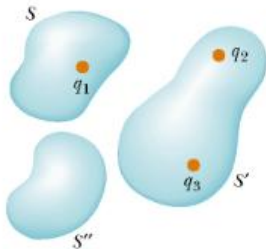
$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S''} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

۳ سطح بسته مذکور در قانون گوس را سطح گوسی می نامیم؛ مانند سطوح S, S', S'' در اینجا.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

یادآوری قانون گوس



۱ قانون گوس، به لحاظ ریاضیاتی، بیان می کند که با داشتن میدان روی یک سطح بسته و انتگرال گیری از آن، می توان بار داخل سطح بسته را پیدا کرد.

۲ ولی ما می خواهیم به صورت معکوس عمل کنیم! یعنی قصد داریم با داشتن بار داخل سطح بسته، میدان ناشی از آن را بیابیم. خواهیم دید که برای اینکار احتیاج به تقارن بالا داریم.

۳ چرا لازم است مساله متقارن باشد؟
زیرا می خواهیم سطحی را پیدا کنیم که مقدار میدان الکتریکی روی آن سطح ثابت باشد و بنابراین از انتگرال خارج شود:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA \Leftarrow \text{enough symmetry}$$

اگر مساله به اندازه کافی متقارن نباشد، ساده سازی بالا امکان پذیر نبوده و بنابراین استفاده از قانون گوس (برای پیدا کردن میدان) ممکن نخواهد بود $\Leftarrow \Leftarrow$ قانون کولن.

شکل از مبانی فیزیک هالیدی، ویرایش هشتم.

برای فهم اهمیت تقارن به مثال ساده زیر دقت کنید ↓↓↓↓ .

مثال سوم



قانون گوس:

در شکل مقابل بار الکتریکی فقط در شعاع $a < r < b$ با چگالی بار ثابت و بار کل Q موجود است. با استفاده از قانون گوس میدان را در

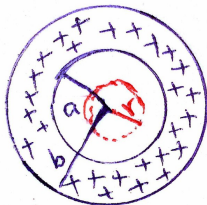
الف) $r < a$

ب) $a < r < b$

پ) $r > b$ بیابید.

توجه: در هر سه مورد سطح گوسی انتخاب شده را به دقت، با رسم شکل، مشخص کنید.

پاسخ پرسش سوم



پاسخ الف) حالت $r < a$: در این حالت، سطح گوس به صورت کره ای با شعاع کوچکتر از a نشان داده می شود. دایره قرمز رنگ در شکل مقابل را ببینید. برای سمت راست قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = E (\pi r^2)$$

از طرفی، در این حالت بار درون سطح گوسی برابر صفر است:

$$q_{in} = 0$$

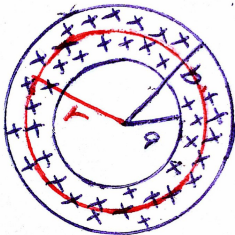
بنابراین، برای قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (\pi r^2) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$E(r < a) = 0$$

و یا

پاسخ پرسش سوم



پاسخ ب) حالت $a < r < b$: در این حالت، سطح گوس به صورت کره ای با شعاع بین a و b نشان داده می شود. دایره قرمز رنگ در شکل مقابل را ببینید.
برای سمت راست قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = E (4\pi r^2)$$

از طرفی، در این حالت بار درون سطح گوسی باید با استفاده از تناسب پیدا شود:

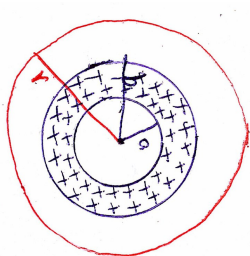
$$q_{in} = Q \frac{\frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3)}{\frac{4}{3}\pi (b^3 - a^3)} = Q \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

بنابراین، برای قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (4\pi r^2) = \frac{Q \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}}{\epsilon_0}$$

$$E(a < r < b) = \frac{Q \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = Q \frac{r^3 - a^3}{4\pi \epsilon_0 r^2 (b^3 - a^3)} \quad \text{و یا}$$

پاسخ پرسش سوم



پاسخ پ) حالت $r > b$: در این حالت، سطح گوس به صورت کره ای با شعاع بزرگتر از b نشان داده می شود. دایره قرمز رنگ در شکل مقابل را ببینید.
برای سمت راست قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA \cos 0 = E \oint dA = EA = E (4\pi r^2)$$

از طرفی، در این حالت بار درون سطح گوسی برابر با کل بار بین دو کره است:

$$q_{in} = Q$$

بنابراین، برای قانون گوس داریم:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r > b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{و یا}$$

با سپاس از توجه شما،
مراقب سلامت خود و اطرافیان خود
باشید.