$D_{\mathbf{u}}f(-۲۰,۳۰)$ را، که در اینجا $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{۲}}$، تخمین بزنید.

۴-۶ مشتق سویی f در نقطهٔ داده‌شده را در جهت زاویهٔ مشخص‌شده پیدا کنید.

۴. $f(x,y)=x^{۲}y^{۳}-y^{۴}$، $(۲,۱)$، $\theta=\frac{\pi}{۴}$

۵. $f(x,y)=ye^{-x}$، $(۰,۴)$، $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$

۶. $f(x,y)=x\sin(xy)$، $(۲,۰)$، $\theta=\frac{\pi}{۳}$

۷-۱۰

الف) گرادیان f را پیدا کنید.

ب) گرادیان در نقطهٔ P را حساب کنید.

ج) آهنگ تغییر f در P در جهت بردار $\mathbf{u}$ را پیدا کنید.

۷. $f(x,y)=\sin(۲x+۳y)$، $P(-۶,۴)$، $\mathbf{u}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}\,\mathbf{i}-\mathbf{j})$

۸. $f(x,y)=\frac{y^{۲}}{x}$، $P(۱,۲)$، $\mathbf{u}=\frac{۱}{۳}(۲\mathbf{i}+\sqrt{۵}\,\mathbf{j})$

۹. $f(x,y,z)=xe^{۲yz}$، $P(۳,۰,۲)$، $\mathbf{u}=\left\langle\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right\rangle$

۱۰. $f(x,y,z)=\sqrt{x+yz}$، $P(۱,۳,۱)$، $\mathbf{u}=\left\langle\frac{۲}{۷},\frac{۳}{۷},\frac{۶}{۷}\right\rangle$

۱۱-۱۷ مشتق سویی تابع موردنظر در نقطهٔ داده‌شده در جهت بردار $\mathbf{v}$ را پیدا کنید.

۱۱. $f(x,y)=۱+۲x\sqrt{y}$، $(۳,۴)$، $\mathbf{v}=\langle ۴,-۳\rangle$

۱۲. $f(x,y)=\ln(x^{۲}+y^{۲})$، $(۲,۱)$، $\mathbf{v}=\langle -۱,۲\rangle$

۱۳. $g(p,q)=p^{۴}-p^{۲}q^{۳}$، $(۲,۱)$، $\mathbf{v}=\mathbf{i}+۳\mathbf{j}$

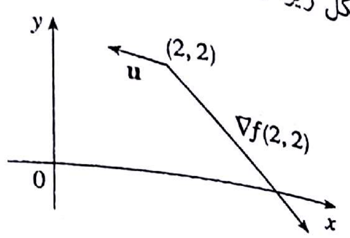
۱۴. $g(r,s)=\tan^{-۱}(rs)$، $(۱,۲)$، $\mathbf{v}=۵\mathbf{i}+۱۰\mathbf{j}$

۱۵. $f(x,y,z)=xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}$، $(۰,۰,۰)$، $\mathbf{v}=\langle ۵,۱,-۲\rangle$

۱۶. $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}$، $(۳,۲,۶)$، $\mathbf{v}=\langle -۱,-۲,۲\rangle$

۱۷. $g(x,y,z)=(x+۲y+۳z)^{۳/۲}$، $(۱,۱,۲)$، $\mathbf{v}=۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۱۸. با استفاده از شکل زیر، $D_{\mathbf{u}}f(۲,۲)$ را تخمین بزنید.



۱۹. مشتق سویی $f(x,y)=\sqrt{xy}$ در $P(۲,۸)$ در جهت $Q(۵,۴)$ را پیدا کنید.

۲۰. مشتق سویی $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ در $P(۱,-۱,۳)$ در جهت $Q(۲,۴,۵)$ را پیدا کنید.

۲۶-۲۱ ماکسیمم آهنگ تغییر f در نقطهٔ داده‌شده و جهتی را که این مقدار به‌دست می‌آید پیدا کنید.

۲۱. $f(x,y)=\dfrac{y^۲}{x}$، $(۲,۴)$

۲۲. $f(p,q)=qe^{-p}+pe^{-q}$، $(۰,۰)$

۲۳. $f(x,y)=\sin(xy)$، $(۱,۰)$

۲۴. $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{z}$، $(۱,۱,-۱)$

۲۵. $f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$، $(۳,۶,-۲)$

۲۶. $f(x,y,z)=\tan(x+۲y+۳z)$، $(-۵,۱,۱)$

---

۲۷. الف) نشان دهید که تابع مشتق‌پذیر f در $\mathbf{x}$ سریعترین کاهش را در جهت مخالف بردارگرادیان، یعنی در جهت $-\nabla f(\mathbf{x})$، دارد.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) جهتی را که تابع $f(x,y)=x^۴y-x^۲y^۳$ در نقطهٔ $(۲,-۳)$ سریعترین کاهش را دارد پیدا کنید.

۲۸. جهتهایی را پیدا کنید که در آنها مشتق سویی $f(x,y)=ye^{-xy}$ در نقطهٔ $(۰,۲)$ مقدارش ۱ است.

۲۹. همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که در آنها جهت سریعترین تغییر تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲-۲x-۴y$، $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ است.

۳۰. عمق دریاچه‌ای در نقطهٔ (x,y,z) در نزدیکی بویه‌ای برابر است با $z=۲۰۰+۰٫۰۲x^۲-۰٫۰۰۱y^۳$، که در اینجا x، y و z برحسب مترند. ماهیگیری در قایقی کوچک از نقطهٔ $(۸۰,۶۰)$ شروع به حرکت می‌کند و به‌سمت بویه که در $(۰,۰)$ قرار دارد می‌رود. موقع حرکت‌کردن قایق، عمق آب زیر آن زیادتر می‌شود یا کمتر؟ توضیح دهید.

۳۱. دما، T، درگویی فلزی با فاصلهٔ تا مرکزگوی، که آن را مبدأ می‌گیریم، نسبت عکس دارد. دما در نقطهٔ $(۱,۲,۲)$ برابر با ۱۲۰° است.

الف) آهنگ تغییر T در $(۱,۲,۲)$ در جهت رو به نقطهٔ $(۲,۱,۳)$ را پیدا کنید.

ب) نشان دهید که در هر نقطه درگوی جهت بیشترین افزایش در دما با برداری که رو به مبدأ است مشخص می‌شود.

۳۲. دما در نقطهٔ (x,y,z) با

$$T(x,y,z)=۲۰۰e^{-x^۲-۳y^۲-۹z^۲}$$

مشخص می‌شود، که در اینجا T برحسب $^\circ\mathrm{C}$ است و x، y و z برحسب مترند.

الف) آهنگ تغییر دما در نقطهٔ $P(۲,-۱,۲)$ در جهت رو به نقطهٔ $(۳,-۳,۳)$ را پیدا کنید.

ب) درکدام جهت دما در P سریعترین افزایش را دارد؟

ج) آهنگ افزایش ماکسیمم در P را پیدا کنید.

۳۳. فرض کنید که روی ناحیه‌ای در فضا پتانسیل الکتریکی، V، با $V(x,y,z)=۵x^۲-۳xy+xyz$ مشخص می‌شود.

الف) آهنگ تغییر پتانسیل در $P(۳,۴,۵)$ در جهت بردار $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

ب) V در P درکدام جهت با سرعت بیشتری تغییر می‌کند؟

ج) آهنگ تغییر ماکسیمم در P چقدر است؟

۳۴. فرض کنید که از تپه‌ای بالا می‌روید که شکلش با معادلهٔ $z=۱۰۰۰-۰٫۰۰۵x^۲-۰٫۰۱y^۲$ مشخص شده است، و در اینجا x، y و z برحسب مترند و در نقطهٔ به مختصات $(۶۰,۴۰,۹۶۶)$ ایستاده‌اید. قسمت مثبت محور x رو به شرق است و قسمت مثبت محور y رو به شمال است.

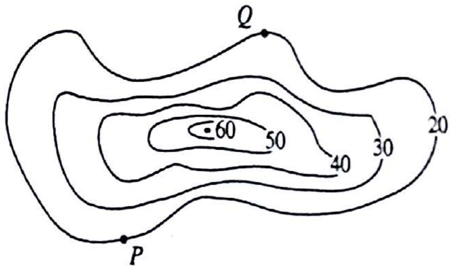
الف) اگر به‌سمت جنوب حرکت کنید رو به بالا می‌روید یا رو به پایین؟ با چه آهنگی؟

ب) اگر به‌سمت شمال غربی حرکت کنید رو به بالا می‌روید یا رو به پایین؟ با چه آهنگی؟

ج) در کدام جهت شیب بیشترین است؟ آهنگ سربالایی در این جهت چقدر است؟ مسیر در این جهت با چه زاویه‌ای بالای افق شروع می‌شود؟

۳۵. فرض کنید f تابعی دومتغیره باشد که مشتقهای جزئی‌اش پیوسته‌اند و نقطه‌های $A(1,3)$، $B(3,3)$، $C(1,7)$ و $D(6,15)$ را در نظر بگیرید. مشتق سویی f در A در جهت بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر با ۳ است و مشتق سویی در A در جهت $\overrightarrow{AC}$ برابر با ۲۶ است. مشتق سویی f در A در جهت بردار AD را پیدا کنید.

۳۶. در مورد نقشهٔ ارتفاعی زیر منحنیهای پرشیب‌ترین سربالایی را که از P و Q شروع می‌شوند رسم کنید.



۳۷. نشان دهید که عملیات گرادیان گرفتن از تابع ویژگی مشخص‌شده را دارد. فرض کنید u و v تابعهایی مشتق‌پذیر از x و yاند و a و b عددهایی ثابت‌اند.

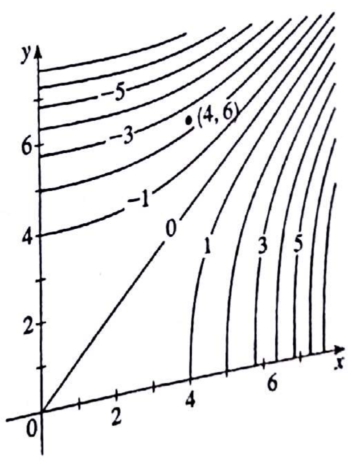
الف) $\nabla(au + bv) = a\nabla u + b\nabla v$

ب) $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$

ج) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$

د) $\nabla u^n = nu^{n-1}\nabla u$

۳۸. بردار گرادیان $\nabla f(4,6)$ برای تابع f را که منحنیهای ترازش نشان داده شده است رسم کنید. توضیح دهید که چگونه جهت و طول این بردار را انتخاب می‌کنید.



۳۹-۴۴ معادلهٔ (الف) صفحهٔ مماس و (ب) خط قائم بر رویهٔ داده‌شده در نقطهٔ مشخص‌شده را پیدا کنید.

۳۹. $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$، $(3, 3, 5)$

۴۰. $y = x^2 - z^2$، $(4, 7, 3)$

۴۱. $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$، $(2, 1, -1)$

۴۲. $x - z = 4\arctan(yz)$، $(1+\pi, 1, 1)$

۴۳. $z + 1 = xe^y \cos z$، $(1, 0, 0)$

۴۴. $yz = \ln(x + z)$، $(0, 0, 1)$

۴۵-۴۶ با استفاده از کامپیوتر رویهٔ موردنظر، صفحهٔ مماس و خط قائم را روی یک صفحه نمایش رسم کنید. دامنه را به‌دقت انتخاب کنید تا صفحه‌های قائم بی‌ربط پیدا نشوند. منظر را طوری انتخاب کنید که تصویری خوب از هر سه جسم به‌دست بیاورید.

۴۵. $xy + yz + zx = 3$، $(1, 1, 1)$

۴۶. $xyz = 6$، $(1, 2, 3)$

۴۷. اگر $f(x, y) = xy$، بردار گرادیان $\nabla f(3, 2)$ را پیدا کنید و با استفاده از آن خط مماس بر منحنی تراز $f(x, y) = 6$ در نقطهٔ $(3, 2)$ را پیدا کنید. منحنی تراز، خط مماس و بردار گرادیان را رسم کنید.

۴۸. اگر $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$، بردار گرادیان $\nabla g(1, 2)$ را پیدا کنید و با استفاده از آن خط مماس بر منحنی تراز $g(x, y) = 1$ در نقطهٔ $(1, 2)$ را پیدا کنید. منحنی تراز، خط مماس و بردار گرادیان را رسم کنید.

۴۹. نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ مماس بر بیضی‌وار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

۵۰. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر هذلولی‌وار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$ در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) را پیدا کنید و آن را شبیه معادلهٔ تمرین ۴۹ بنویسید.

۵۱. نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سهمی‌وار بیضوی

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت.

$$\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=\frac{z+z_0}{c}$$

۵۲. در چه نقطه‌ای روی سهمی‌وار $y=x^2+z^2$ صفحهٔ مماس با صفحهٔ $x+2y+3z=1$ مماس است؟

۵۳. آیا نقطه‌ای روی هذلولی‌وار $x^2-y^2-z^2=1$ وجود دارد که در آن صفحهٔ مماس با صفحهٔ $z=x+y$ موازی باشد؟

۵۴. نشان دهید که بیضی‌وار $3x^2+2y^2+z^2=9$ و کرهٔ

$$x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24=0$$

در نقطهٔ $(1,1,2)$ بر یکدیگر مماس‌اند. (یعنی اینکه در این نقطهٔ صفحهٔ مماس مشترک دارند.)

۵۵. نشان دهید که هر صفحهٔ مماس بر مخروط $x^2+y^2=z^2$ از مبدأ می‌گذرد.

۵۶. نشان دهید که هر خط قائم بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=r^2$ از مرکز این کره می‌گذرد.

۵۷. نشان دهید که مجموع طول از مبدأ، عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ هر صفحهٔ مماس بر رویهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$ ثابت است.

۵۸. نشان دهید که در یک‌هشتم اول حجم همهٔ منشورهای بریده شده با صفحهٔ مماس بر رویهٔ $xyz=1$ در نقطه‌های یک‌هشتم اول باید برابر باشد.

۵۹. معادله‌های پارامتری خط مماس بر منحنی محل برخورد سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ و بیضی‌وار $4x^2+y^2+z^2=9$ در نقطهٔ $(-1,1,2)$ را پیدا کنید.

۶۰. الف) صفحهٔ $y+z=3$ استوانهٔ $x^2+y^2=5$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌های پارامتری خط مماس بر این بیضی در نقطهٔ $(1,2,1)$ را پیدا کنید.

ب) این استوانه، صفحه و خط مماس را روی یک صفحهٔ نمایش رسم کنید.

۶۱. الف) دو صفحه را در نقطهٔ برخوردشان **متعامد** می‌نامند، به‌شرطی که خطهای قائمشان در این نقطه بر هم عمود باشند. نشان دهید که رویه‌های با معادله‌های $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ در نقطهٔ P که در آن $\nabla F\neq \mathbf{0}$ و $\nabla G\neq\mathbf{0}$ وقتی و فقط وقتی متعامدند که در P،

$$F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z=0$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که رویه‌های $z^2=x^2+y^2$ و $x^2+y^2+z^2=r^2$ در هر نقطه از برخوردشان متعامدند. آیا می‌توانید بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال بگویید چرا چنین است؟

۶۲. الف) نشان دهید که تابع $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ پیوسته است و مشتقهای جزئی f_x و f_y در مبدأ وجود دارند اما مشتقهای سویی در هیچ جهت دیگری وجود ندارند.

ب) f را در نزدیکی مبدأ رسم کنید و نظرتان را دربارهٔ درستی نتیجهٔ قسمت (الف) از روی شکل بگویید.

۶۳. فرض کنید که مشتقهای سویی $f(x,y)$ را در نقطه‌ای مفروض در دو جهت غیرموازی که با بردارهای واحد $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مشخص شده‌اند می‌دانیم. آیا می‌توان ∇f را در این نقطه پیدا کرد؟ اگر می‌توان، چگونه؟

۶۴. نشان دهید که اگر $z=f(x,y)$ در $\mathbf{x}_0=\langle x_0,y_0\rangle$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌وقت

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}=0$$

(راهنمایی: مستقیماً از تعریف ۷.۴.۱۵ استفاده کنید.)