

تمرین ۱.۱۳

۱۰. فاصله $(-5, 7, 3)$ تا هر یک از موارد زیر را پیدا کنید.

(الف) صفحه xy (ب) صفحه yz

(ج) صفحه xz (د) محور x

(ه) محور y (و) محور z

۱۱. معادله کره به مرکز $(3, -4, 1)$ و شعاع ۵ را پیدا کنید. اشتراک این کره با صفحه xz چیست؟

۱۲. معادله کره به مرکز $(4, -6, 2)$ و شعاع ۵ را پیدا کنید. اشتراک این کره با هر یک از صفحه‌های مختصات را توصیف کنید.

۱۳. معادله کره‌ای را که از نقطه $(-1, 3, 4)$ می‌گذرد و مرکزش $(1, 8, 3)$ است پیدا کنید.

۱۴. معادله کره‌ای را که از مبدأ می‌گذرد و مرکزش $(3, 2, 1)$ است پیدا کنید.

۱۵-۱۸ نشان دهید که معادله موردنظر یک کره را نمایش می‌دهد و مرکز و شعاعش را پیدا کنید.

$$15. x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$$

$$16. x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$$

$$17. 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8x - 24z + 1$$

$$18. 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$$

۱۹. الف) نشان دهید که وسط پاره‌خط از $P_1(x_1, y_1, z_1)$ تا $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطه

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

است.

ب) طول میانه‌های مثلث با رأسهای $A(1, 2, 3)$ ، $B(-2, 0, 5)$ و $C(4, 1, 5)$ را پیدا کنید.

۲۰. اگر دو سریکی از قطرهای کره‌ای $(4, 1, 4)$ و $(4, 3, 10)$ باشند معادله این کره را پیدا کنید.

۲۱. معادله کره‌هایی را که مرکزشان $(6, -3, 2)$ و (الف) بر صفحه xy ، (ب) صفحه yz و (ج) صفحه xz مماس‌اند پیدا کنید.

۱. فرض کنید از مبدأ شروع به حرکت کرده‌اید، روی محور x به اندازه ۴ واحد در جهت مثبت حرکت کرده‌اید و سپس ۳ واحد به سمت پایین رفته‌اید. مختصات جایی که قرار دارید چیست؟

۲. نقطه‌های $(2, 5, 0)$ ، $(-1, 0, 4)$ ، $(6, 4, 2)$ و $(2, -1, 1)$ را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۳. کدام یک از نقطه‌های $P(6, 2, 3)$ ، $Q(-5, -1, 4)$ و $R(0, 3, 8)$ به صفحه xz نزدیکتر است؟ کدام نقطه روی صفحه yz قرار دارد؟

۴. تصویرهای نقطه $(2, 3, 5)$ روی صفحه‌های xy ، yz و xz چه نقطه‌هایی هستند؟ جعبه‌ای مستطیلی رسم کنید که مبدأ و $(2, 3, 5)$ رأسهای روبه‌رویش باشند و وجه‌هایش با صفحه‌های مختصات موازی باشند. مختصات همه رأسهای این جعبه را مشخص کنید. طول قطر این جعبه را پیدا کنید.

۵. رویه‌ای را که در \mathbb{R}^3 با معادله $x + y = 2$ نمایش داده می‌شود توصیف و رسم کنید.

۶. الف) معادله $x = 4$ در \mathbb{R}^3 چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ در \mathbb{R}^3 چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ پاسختان را با شکل روشن کنید.

ب) معادله $y = 3$ در \mathbb{R}^3 چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ $z = 5$ چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ معادله‌های جفتی $y = 3$ ، $z = 5$ چه چیزی را نمایش می‌دهند؟ به عبارت دیگر، مجموعه نقطه‌هایی مانند (x, y, z) را که $y = 3$ و $z = 5$ توصیف کنید. پاسختان را با شکل روشن کنید.

۷-۸ طول ضلعهای مثلث PQR را مشخص کنید. آیا این مثلث قائم‌الزاویه است؟ آیا مثلثی متساوی‌الساقین است؟

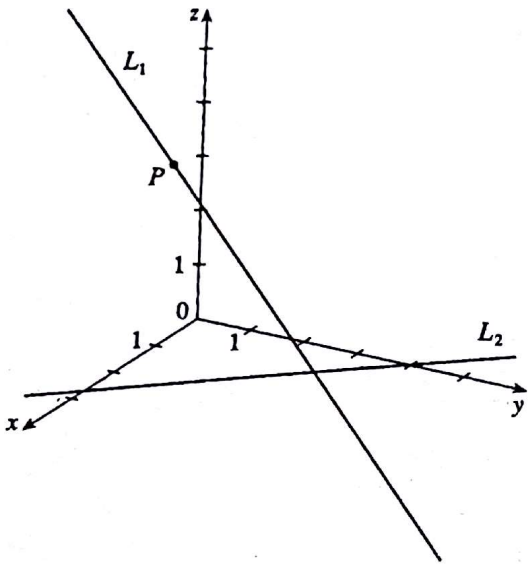
$$7. P(3, -2, -3), Q(7, 0, 1), R(1, 2, 1)$$

$$8. P(2, -1, 0), Q(4, 1, 1), R(4, -5, 4)$$

۹. مشخص کنید که نقطه‌های موردنظر روی خطی راست قرار دارند یا خیر.

$$\text{الف) } A(2, 4, 2), B(3, 7, -2), C(1, 3, 3)$$

$$\text{ب) } D(0, -5, 5), E(1, -2, 4), F(3, 4, 2)$$



الف) مختصات نقطه P روی خط L_1 را پیدا کنید.

ب) روی شکل جای نقطه‌های A, B و C را که خط L_1 به ترتیب صفحه xy , صفحه yz و صفحه xz را قطع می‌کند پیدا کنید.

۳۸. نقطه‌هایی مانند P را در نظر بگیرید که فاصله P تا $A(-1, 5, 3)$ دو برابر فاصله P تا $B(6, 2, -2)$ است. نشان دهید که مجموعه همه چنین نقطه‌هایی کره است، و مرکز و شعاعش را پیدا کنید.

۳۹. معادله مجموعه همه نقطه‌هایی را که فاصله‌شان از نقطه‌های $A(-1, 5, 3)$ و $B(6, 2, -2)$ برابر است پیدا کنید. این مجموعه را توصیف کنید.

۴۰. حجم جسم سه‌بعدی را که درون هر دو کره

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

و

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

قرار دارد پیدا کنید.

۲۲. معادله بزرگترین کره‌ای را که مرکزش $(5, 4, 9)$ است و در یک هشتم اول قرار دارد پیدا کنید.

۲۳-۳۲ ناحیه‌ای در صفحه \mathbb{R}^2 را که معادله یا نامعادله موردنظر نمایش می‌دهد با کلمات توصیف کنید.

۲۴. $x = 10$

۲۳. $y = -4$

۲۶. $y \geq 0$

۲۵. $x > 3$

۲۸. $z^2 = 1$

۲۷. $0 \leq z \leq 6$

۳۰. $x = z$

۲۹. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$

۳۱. $x^2 + z^2 \leq 9$

۳۲. $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

۳۳-۳۶ نامعادله‌هایی بنویسید که ناحیه موردنظر را توصیف می‌کنند.

۳۳. ناحیه بین صفحه yz و صفحه $x = 5$.

۳۴. استوانه توپری که روی یا زیر صفحه $z = 8$ و روی یا زیر قرصی در صفحه xy که مرکزش مبدأ است و شعاعش ۲ قرار دارد.

۳۵. ناحیه‌ای که از همه نقطه‌هایی که بین کره‌هایی با شعاعهای r و R و مرکز مبدأ قرار دارند، که در اینجا $r < R$ (اما روی کره‌ها قرار ندارند) تشکیل شده است.

۳۶. نیمکره توپری بالایی کره به شعاع ۲ و مرکز مبدأ.

۳۷. در شکل ستون روبه‌رو خط L_1 و خط L_2 را که تصویر L_1 روی صفحه xy است نشان داده‌ایم. (به عبارت دیگر، نقطه‌های روی L_2 درست زیر (یا بالای) نقطه‌های L_1 هستند.)

۲۲. $F(1, 2, -1)$, $E(-2, 4, 3)$, $D(0, 1, 1)$

۸. $b = 2i + 4j + 6k$, $a = 4j - 2k$

۹. $|b| = 5$, $|a| = 6$, زاویه میان a و b , $\frac{2\pi}{3}$ است.

۱۰. $|b| = \sqrt{6}$, $|a| = 3$, زاویه میان a و b , 45° است.

۲۳-۲۴ مشخص کنید که بردارهای داده شده متعامند، موازی اند یا نه متعامند نه موازی.

۲۳ الف) $a = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $b = \langle 6, -8, 2 \rangle$

ب) $a = \langle 4, 6 \rangle$, $b = \langle -3, 2 \rangle$

ج) $a = -i + 2j + 5k$, $b = 2i + 4j - k$

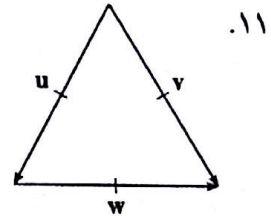
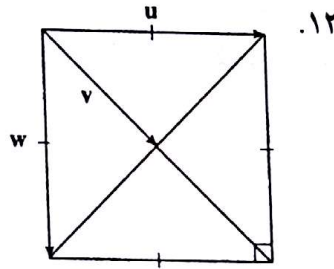
د) $a = 2i + 6j - 4k$, $b = -2i - 9j + 6k$

۲۴ الف) $u = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $v = \langle 4, -12, -8 \rangle$

ب) $u = i - j + 2k$, $v = 2i - j + k$

ج) $u = \langle a, b, c \rangle$, $v = \langle -b, a, 0 \rangle$

۱۱-۱۲ اگر u بردار واحد باشد، $u \cdot v$ و $u \cdot w$ را پیدا کنید.



۱۳ الف) نشان دهید که $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

ب) نشان دهید که $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

۱۴. دستفروش دوره‌گردی در روز a همبرگر، b هات‌داگ و c نوشابه

می‌فروشد. او برای همبرگر ۲ دلار می‌گیرد، برای هات‌داگ ۱/۵ دلار

و برای نوشابه ۱ دلار. اگر $A = \langle a, b, c \rangle$ و $P = \langle 2, 1/5, 1 \rangle$

معنی ضرب نقطه‌ای $A \cdot P$ چیست؟

۱۵-۲۰ زاویه میان بردارهای موردنظر را پیدا کنید. (ابتدا عبارت دقیق را

پیدا کنید و سپس آن را به نزدیکترین زاویه‌ای که اندازه‌اش برحسب درجه

عددی صحیح است تقریب بزنید.)

۱۵. $a = \langle -8, 6 \rangle$, $b = \langle \sqrt{7}, 3 \rangle$

۱۶. $a = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$, $b = \langle 0, 5 \rangle$

۱۷. $a = \langle 3, -1, 5 \rangle$, $b = \langle -2, 4, 3 \rangle$

۱۸. $a = \langle 4, 0, 2 \rangle$, $b = \langle 2, -1, 0 \rangle$

۱۹. $a = j + k$, $b = i + 2j - 2k$

۲۰. $a = i + 2j - 2k$, $b = 4i - 2k$

۲۱-۲۲ سه زاویه مثلثی را که رأسهایش داده شده است، برحسب نزدیکترین

زاویه‌ای که اندازه‌اش برحسب درجه عددی صحیح است، پیدا کنید.

۲۱. $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$

۲۵. با استفاده از بردارها مشخص کنید که مثلث با رأسهای

$P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ و $R(6, -2, -5)$ قائم‌الزاویه

است یا خیر.

۲۶. به ازای چه مقدارهایی از b بردارهای $\langle -6, b, 2 \rangle$ و $\langle b, b', b \rangle$

متعامند؟

۲۷. برداری واحد پیدا کنید که هم بر $i + j$ عمود باشد هم بر $i + k$

۲۸. دو بردار واحد پیدا کنید که با $v = \langle 3, 4 \rangle$ زاویه 60° بسازند.

۲۹-۳۳ کسینوسهای هادی و زاویه‌های هادی بردار موردنظر را پیدا کنید

(زاویه هادی را برحسب نزدیکترین زاویه‌ای که اندازه‌اش برحسب درجه

عددی صحیح است پیدا کنید.)

۲۹. $\langle 3, 4, 5 \rangle$, ۳۰. $\langle 1, -2, -1 \rangle$

۳۱. $2i + 3j - 6k$, ۳۲. $2i - j + 2k$

۳۳. $\langle c, c, c \rangle$ که در اینجا $c > 0$

۳۴. اگر $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و $\beta = \frac{\pi}{3}$ زاویه‌های هادی برداری باشند، سومین زاویه

هادی آن، γ را پیدا کنید.

۳۵-۴۰ تصویرهای اسکالر و برداری b بر a را پیدا کنید.

۳۵. $a = \langle 3, -4 \rangle$, $b = \langle 5, 0 \rangle$

۳۶. $a = \langle 1, 2 \rangle$, $b = \langle -4, 1 \rangle$

۲۴. ویژگی ۲ قضیه ۸ را ثابت کنید.

۲۵. ویژگی ۳ قضیه ۸ را ثابت کنید.

۲۶. ویژگی ۴ قضیه ۸ را ثابت کنید.

۲۷. مساحت متوازی‌الاضلاع با رأسهای $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(4, 2)$ و $D(2, 1)$ را پیدا کنید.

۲۸. مساحت متوازی‌الاضلاع با رأسهای $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$ و $N(3, 7, 3)$ را پیدا کنید.

۲۹-۳۲ (الف) برداری غیرصفر و عمود بر صفحه‌های P, Q, R می‌گذرد پیدا کنید و (ب) مساحت مثلث PQR را پیدا کنید.

۲۹. $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$

۳۰. $P(2, 1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$, $R(3, 0, 6)$

۳۱. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 2, 1)$

۳۲. $P(-1, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$, $R(4, 3, -1)$

۳۳-۳۴ حجم متوازی‌السطوحی را که با بردارهای a, b و c مشخص می‌شود پیدا کنید.

۳۳. $a = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $b = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $c = \langle 4, -2, 5 \rangle$

۳۴. $a = i + j - k$, $b = i - j + k$, $c = -i + j + k$

۳۵-۳۶ حجم متوازی‌السطوحی را که یالهای مجاورش PQ, PR و PS اند پیدا کنید.

۳۵. $P(2, 0, -1)$, $Q(4, 1, 0)$, $R(3, -1, 1)$, $S(2, -2, 2)$

۳۶. $P(3, 0, 1)$, $Q(-1, 2, 5)$, $R(5, 1, -1)$, $S(0, 4, 2)$

۳۷. با استفاده از ضرب سه‌گانه اسکالر ثابت کنید که بردارهای $u = i + 5j - 2k$, $v = 3i - j$ و $w = 5i + 9j - 4k$ هم‌صفحه‌اند.

۳۸. با استفاده از ضرب سه‌گانه اسکالر مشخص کنید که نقطه‌های $A(1, 3, 2)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$ و $D(3, 6, -4)$ در یک صفحه قرار دارند یا خیر.

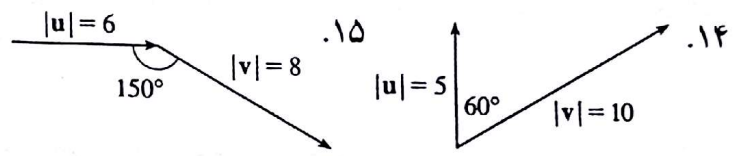
۱۳. بگویید که هر یک از عبارتهای زیر بامعنی است یا بی‌معنی. اگر بی‌معنی است، توضیح دهید که چرا؟ اگر هست، بگویید بردار است یا اسکالر.

الف) $a \cdot (b \times c)$ (ب) $a \times (b \cdot c)$

ج) $a \times (b \times c)$ (د) $(a \cdot b) \times c$

ه) $(a \cdot b) \times (c \cdot d)$ (و) $(a \times b) \cdot (c \times d)$

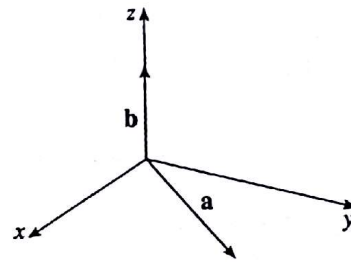
۱۴-۱۵ $|u \times v|$ را پیدا کنید و مشخص کنید که $u \times v$ رو به درون این صفحه است یا بیرون است.



۱۶. در شکل بردار a در صفحه xy و بردار b در جهت k را نشان داده‌ایم. طول این بردارها برابر است با $|a| = 3$ و $|b| = 2$.

الف) $|a \times b|$ را پیدا کنید.

ب) با استفاده از قاعده دست راست مشخص کنید که مؤلفه‌های $a \times b$ مثبت‌اند، منفی‌اند یا 0 .



۱۷. اگر $a = \langle 1, 2, 1 \rangle$ و $b = \langle 0, 1, 3 \rangle$ ، $a \times b$ و $b \times a$ را پیدا کنید.

۱۸. اگر $a = \langle 3, 1, 2 \rangle$ ، $b = \langle -1, 1, 0 \rangle$ و $c = \langle 0, 0, -4 \rangle$ ، نشان دهید که $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$.

۱۹. دو بردار واحد عمود بر هر دو $\langle 1, -1, 1 \rangle$ و $\langle 0, 4, 4 \rangle$ پیدا کنید.

۲۰. دو بردار واحد عمود بر هر دو $i + j + k$ و $2i + k$ پیدا کنید.

۲۱. نشان دهید که به‌ازای هر بردار در V_3 مانند a ، $0 \times a = 0 = a \times 0$.

۲۲. نشان دهید که به‌ازای هر دو بردار در V_3 مانند a و b ، $(a \times b) \cdot b = 0$.

۲۳. ویژگی ۱ قضیه ۸ را ثابت کنید.