الف) توضیح دهید که چرا سری

$$۱٫۶-۰٫۸(x-۱)+۰٫۴(x-۱)^۲-۰٫۱(x-۱)^۳+\cdots$$

سری تیلور f به مرکز ۱ نیست.

ب) توضیح دهید که چرا سری

$$۲٫۸+۰٫۵(x-۲)+۱٫۵(x-۲)^۲-۰٫۱(x-۲)^۳+\cdots$$

سری تیلور f به مرکز ۲ نیست.

۳. اگر به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $f^{(n)}(۰) = (n+۱)!$، سری مک‌لورین f و شعاع همگرایی‌اش را پیدا کنید.

۴. اگر

$$f^{(n)}(۴) = \frac{(-۱)^n n!}{۳^n(n+۱)}$$

سری تیلور f به مرکز ۴ را پیدا کنید. شعاع همگرایی این سری تیلور چقدر است؟

۵-۱۲ سری مک‌لورین $f(x)$ را با استفاده از تعریف سری مک‌لورین پیدا کنید. (فرض کنید که f بسط به‌شکل سری توانی دارد. نمی‌خواهد نشان دهید که $R_n(x) \to ۰$.) شعاع همگرایی سری موردنظر را هم پیدا کنید.

۵. $f(x) = (۱-x)^{-۲}$ ۶. $f(x) = \ln(۱+x)$

۷. $f(x) = \sin \pi x$ ۸. $f(x) = \cos ۳x$

۹. $f(x) = e^{۵x}$ ۱۰. $f(x) = xe^x$

۱۱. $f(x) = \sinh x$ ۱۲. $f(x) = \cosh x$

۱۳-۲۰ سری تیلور $f(x)$ به مرکز مقدار داده‌شده برای a را پیدا کنید. (فرض کنید که f بسط به‌شکل سری توانی دارد. نمی‌خواهد نشان دهید که $R_n(x) \to ۰$.)

۱۳. $f(x) = x^۴ - ۳x^۲ + ۱$، $a = ۱$

۱۴. $f(x) = x - x^۳$، $a = -۲$

۱۵. $f(x) = e^x$، $a = ۳$

۱۶. $f(x) = \frac{۱}{x}$، $a = -۳$

۱۷. $f(x) = \cos x$، $a = \pi$

۱۸. $f(x) = \sin x$، $a = \frac{\pi}{۲}$

۱۹. $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}}$، $a = ۹$

۲۰. $f(x) = x^{-۲}$، $a = ۱$

۲۱. ثابت کنید سریی که در تمرین ۷ به‌دست آورده‌اید به‌ازای هر x نمایش $\sin \pi x$ است.

۲۲. ثابت کنید سریی که در تمرین ۱۸ به‌دست آورده‌اید به‌ازای هر x نمایش $\sin x$ است.

۲۳. ثابت کنید سریی که در تمرین ۱۱ به‌دست آورده‌اید به‌ازای هر x نمایش $\sinh x$ است.

۲۴. ثابت کنید سریی که در تمرین ۱۲ به‌دست آورده‌اید به‌ازای هر x نمایش $\cosh x$ است.

۲۵-۲۸ با استفاده از سری دوجمله‌ای تابع موردنظر را به‌شکل سریی توانی بسط دهید.

۲۵. $\sqrt{۱+x}$ ۲۶. $\frac{۱}{(۱+x)^۴}$

۲۷. $\frac{۱}{(۲+x)^۳}$ ۲۸. $(۱-x)^{۲/۳}$

۲۹-۳۸ با استفاده از سریهای مک‌لورین جدول ۱ سری مک‌لورین تابع داده‌شده را پیدا کنید.

۲۹. $f(x) = \sin \pi x$ ۳۰. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{۲}$

۳۱. $f(x) = e^x + e^{۲x}$ ۳۲. $f(x) = e^x + ۲e^{-x}$

۳۳. $f(x) = x \cos\left(\frac{۱}{۲}x^۲\right)$ ۳۴. $f(x) = x^۲ \tan^{-۱}(x^۳)$

۳۵. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۴+x^۲}}$ ۳۶. $f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{۲+x}}$

۳۷. $f(x) = \sin^۲ x$ (راهنمایی: از $\sin^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲x)$ استفاده کنید.)

۳۸. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin x}{x^۳} & x \neq ۰ \\ \dfrac{۱}{۶} & x = ۰ \end{cases}$$

۴۰-۴۲ سری مک‌لورین f را (به هر روشی که می‌خواهید) پیدا کنید و شعاع همگرایی‌اش را مشخص کنید. f و چند تا از چندجمله‌ایهای تیلور اولش را روی یک صفحهٔ نمایش رسم کنید. دربارهٔ رابطهٔ این چندجمله‌ایها و f متوجه چه چیزی می‌شوید؟

۴۰. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

۴۱. $f(x) = xe^{-x}$

۴۲. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

۴۳. با استفاده از سری مک‌لورین e^x، $e^{-0.2}$ را با دقت پنج رقم اعشار حساب کنید.

۴۴. با استفاده از سری مک‌لورین $\sin x$، $\sin 30^\circ$ را با دقت پنج رقم اعشار حساب کنید.

۴۵. الف) با استفاده از سری دوجمله‌ای $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ را بسط دهید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) سری مک‌لورین $\sin^{-1} x$ را پیدا کنید.

۴۶. الف) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ را به‌شکل سریی توانی بسط دهید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ را با دقت سه رقم اعشار تقریب بزنید.

۴۷-۵۰ انتگرال نامعین موردنظر را به‌شکل سریی نامتناهی بنویسید.

۴۷. $\displaystyle\int x\cos(x^3)\,dx$

۴۸. $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\,dx$

۴۹. $\displaystyle\int \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$

۵۰. $\displaystyle\int \arctan(x^2)\,dx$

۵۱-۵۴ با استفاده از سریها انتگرال معین موردنظر را با دقت مشخص‌شده تقریب بزنید.

۵۱. $\displaystyle\int_0^1 x\cos x^3\,dx$ (سه رقم اعشار)

۵۲. $\displaystyle\int_0^{0.2} (\tan^{-1} x^3 + \sin x^3)\,dx$ (پنج رقم اعشار)

۵۳. $\displaystyle\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}\,dx$ ($|\text{خطا}| < 5 \times 10^{-6}$)

۵۴. $\displaystyle\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2}\,dx$ ($|\text{خطا}| < 0.0001$)

۵۵-۵۷ با استفاده از سریها حد موردنظر را حساب کنید.

۵۵. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$

۵۶. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

۵۷. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

۵۸. با استفاده از سری مثال ۱۲ (ب) مقدار

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

را حساب کنید. این حد را در مثال ۴ بخش ۸.۷ با سه بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال پیدا کردیم. کدام روش را ترجیح می‌دهید؟

۵۹-۶۲ با استفاده از ضرب یا تقسیم سریهای توانی سه جملهٔ غیرصفر اول سری مک‌لورین تابع موردنظر را پیدا کنید.

۵۹. $y = e^{-x^2}\cos x$

۶۰. $y = \sec x$

۶۱. $y = \dfrac{x}{\sin x}$

۶۲. $y = e^x \ln(1 - x)$

۶۳-۶۸ مجموع سری موردنظر را پیدا کنید.

۶۳. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

۶۴. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

۶۵. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

۶۶. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

۶۷. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

۶۸. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

۶۹. نابرابری تیلور را به‌ازای $n = 2$ ثابت کنید، یعنی، ثابت کنید که اگر $|f'''(x)| \le M$، $|x - a| \le d$ به‌ازای $|x - a| \le d$، آن‌وقت

$$|R_2(x)| \le \frac{M}{6}|x - a|^3, \qquad |x - a| \le d$$

تمرین

۱-۸ مشخص کنید که سری موردنظر همگراست یا واگرا. اگر همگرا بود، مجموعش را پیدا کنید.

۱. $a_n = \dfrac{۲ + n^۳}{۱ + ۲n^۳}$

۲. $a_n = \dfrac{۹^{n+۱}}{۱۰^n}$

۳. $a_n = \dfrac{n^۳}{۱ + n^۲}$

۴. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{۲}$

۵. $a_n = \dfrac{n \sin n}{n^۲ + ۱}$

۶. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

۷. $\left\{\left(۱ + \dfrac{۳}{n}\right)^{۴n}\right\}$

۸. $\left\{\dfrac{(-۱۰)^n}{n!}\right\}$

۹. دنباله‌ای به‌طور بازگشتی با تساویهای $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = \frac{۱}{۳}(a_n + ۴)$ تعریف شده است. نشان دهید که $\{a_n\}$ صعودی است و به‌ازای هر n، $a_n < ۲$. نتیجه بگیرید که $\{a_n\}$ همگراست و حدش را پیدا کنید.

۱۰. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} n^۴ e^{-n} = ۰$ و با استفاده از نمودار کوچکترین مقدار N را که در تعریف دقیق حد متناظر با $\varepsilon = ۰/۱$ است پیدا کنید.

۱۱-۲۲ مشخص کنید که سری موردنظر همگراست یا واگرا.

۱۱. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n^۳ + ۱}$

۱۲. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲ + ۱}{n^۳ + ۱}$

۱۳. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۳}{۵^n}$

۱۴. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n+۱}}$

۱۵. $\displaystyle\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n\sqrt{\ln n}}$

۱۶. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{۳n+۱}\right)$

۱۷. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos ۳n}{۱ + (۱/۲)^n}$

۱۸. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^{۲n}}{(۱ + ۲n^۲)^n}$

۱۹. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۵^n n!}$

۲۰. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۵)^{۲n}}{n^۲ ۹^n}$

۲۱. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} \frac{\sqrt{n}}{n+۱}$

۲۲. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n+۱} - \sqrt{n-۱}}{n}$

۲۳-۲۶ مشخص کنید که سری موردنظر همگرای شرطی است، همگرای مطلق است یا واگراست.

۲۳. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} n^{-۱/۳}$

۲۴. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} n^{-۳}$

۲۵. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n (n+۱) ۳^n}{۲^{۲n+۱}}$

۲۶. $\displaystyle\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

۲۷-۳۱ مجموع سری موردنظر را پیدا کنید.

۲۷. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۳)^{n-۱}}{۲^{۳n}}$

۲۸. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۳)}$

۲۹. $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} (\tan^{-۱}(n+۱) - \tan^{-۱} n)$

۳۰. $\displaystyle\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n \pi^n}{۳^{۲n}(۲n)!}$

۳۱. $1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \cdots$

۳۲. عدد اعشاری متناوب $4{,}17326326326\ldots$ را به‌شکل کسر بنویسید.

۳۳. نشان دهید که به‌ازای هر x، $\cosh x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$.

۳۴. به‌ازای چه مقدارهایی از x سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ همگراست.

۳۵. مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ را با دقت چهار رقم اعشار پیدا کنید.

۳۶. الف) مجموع جزئی s_5 سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ را پیدا کنید و خطای استفاده از آن را برای تقریب‌زدن مجموع این سری تخمین بزنید.

ب) مجموع این سری را با دقت پنج رقم اعشار پیدا کنید.

۳۷. با استفاده از مجموع هشت جملهٔ اول سری $\sum_{n=1}^{\infty}(2+5^n)^{-1}$ مجموع این سری را تقریب بزنید. خطای موجود در این تقریب را تخمین بزنید.

۳۸. الف) نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ همگراست.

ب) نتیجه بگیرید که $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

۳۹. نشان دهید که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق باشد، آن‌وقت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)a_n$$

نیز همگرای مطلق است.

۴۰-۴۳ شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی سری موردنظر را پیدا کنید.

۴۰. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2 5^n}$

۴۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^4 n}$

۴۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^n}{(n+2)!}$

۴۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

۴۴. شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$$

را پیدا کنید.

۴۵. سری تیلور $f(x) = \sin x$ در $a = \frac{\pi}{6}$ را پیدا کنید.

۴۶. سری تیلور $f(x) = \cos x$ در $a = \frac{\pi}{3}$ را پیدا کنید.

۴۷-۵۴ سری مک‌لورین f و شعاع همگرایی‌اش را پیدا کنید. می‌توانید از روش مستقیم (تعریف سری مک‌لورین) یا سریهای معروف مانند سری هندسی، سری دوجمله‌ای یا سری مک‌لورین e^x، $\sin x$ و $\tan^{-1}x$ استفاده کنید.

۴۷. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

۴۸. $f(x) = \tan^{-1}x^2$

۴۹. $f(x) = \ln(1-x)$

۵۰. $f(x) = xe^{2x}$

۵۱. $f(x) = \sin(x^4)$

۵۲. $f(x) = 10^x$

۵۳. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{16-x}}$

۵۴. $f(x) = (1-3x)^{-5}$

۵۵. $\int\frac{e^x}{x}\,dx$ را به‌شکل سریی نامتناهی بنویسید.

۵۶. با استفاده از سریها $\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx$ را با دقت دو رقم اعشار تقریب بزنید.

۵۷-۵۸

الف) f را با چندجمله‌ای تیلوری از درجهٔ n در عدد a تقریب بزنید.

ب) f و T_n را روی یک صفحهٔ نمایش رسم کنید.

ج) با استفاده از نابرابری تیلور دقت تقریب $f(x) \approx T_n(x)$ را وقتی که x در بازهٔ مفروض قرار دارد تخمین بزنید.

د) درستی پاسختان در قسمت (ج) را با ترسیم $|R_n(x)|$ تحقیق کنید.

۵۷. $f(x) = \sqrt{x}$، $a = 1$، $n = 3$، $0{,}9 \leq x \leq 1{,}1$

۵۸. $f(x) = \sec x$، $a = 0$، $n = 2$، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

۵۹. با استفاده از سریها حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

۶۰. نیروی ناشی از گرانش بر جسمی به جرم m در ارتفاع h بالای سطح زمین برابر است با

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

که در اینجا R شعاع زمین است و g شتاب ناشی از گرانش.