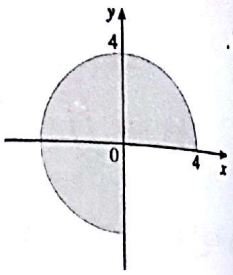
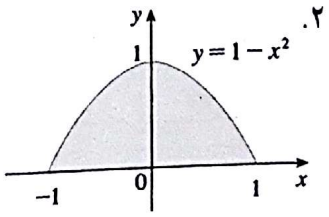
۴.۱۶ تمرین

۱-۴ ناحیهٔ R نشان داده شده است. تصمیم بگیرید که از مختصات قطبی استفاده کنید یا از مختصات قائم و $\iint_R f(x,y)\,dA$ را، که در اینجا f تابع پیوستهٔ دلخواهی روی R است، به‌شکل انتگرال مکرر بنویسید.

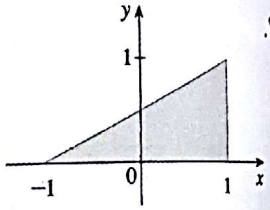
۱.



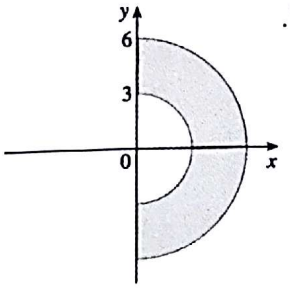
۲.



۳.



۴.



۵-۶ ناحیه‌ای را که مساحتش با انتگرال داده‌شده مشخص شده است رسم کنید و این انتگرال را حساب کنید.

۵. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_{2}^{7} r\,dr\,d\theta$

۶. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

۷-۱۴ انتگرال داده‌شده را با رفتن به مختصات قطبی حساب کنید.

۷. $\iint_D xy\,dA$، که در اینجا D قرص به مرکز مبدأ و شعاع ۳ است.

۸. $\iint_R (x+y)\,dA$، که در اینجا R ناحیه‌ای است که در سمت چپ محور y بین دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد.

۹. $\iint_R \cos(x^2+y^2)\,dA$، که در اینجا R ناحیه‌ای است که بالای محور x درون دایرهٔ $x^2+y^2=9$ قرار دارد.

۱۰. $\iint_R \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA$، که در اینجا

$$R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$$

۱۱. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$، که در اینجا D ناحیهٔ محدود به نیمدایرهٔ $x=\sqrt{4-y^2}$ و محور y است.

۱۲. $\iint_R ye^x\,dA$، که در اینجا R ناحیهٔ در ربع اول است که محصور به دایرهٔ $x^2+y^2=25$ است.

۱۳. $\iint_R \arctan\frac{y}{x}\,dA$، که در اینجا

$$R=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$$

۱۴. $\iint_D x\,dA$، که در اینجا D ناحیهٔ در ربع اول است که بین دایره‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=2x$ قرار دارد.

۱۵-۱۸ با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت ناحیهٔ موردنظر را پیدا کنید.

۱۵. حلقهٔ رُز $r=\cos 3\theta$.

۱۶. ناحیهٔ محصور به منحنی $r=4+3\cos\theta$.

۱۷. ناحیه‌ای که درون هر دو دایرهٔ $r=\cos\theta$ و $r=\sin\theta$ قرار دارد.

۱۸. ناحیهٔ درون دلوار $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $r=3\cos\theta$.

۱۹-۲۷ با استفاده از مختصات قطبی حجم جسم سه‌بعدی موردنظر را پیدا کنید.

۱۹. زیر مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و بالای قرص $x^2+y^2\le 4$.

۲۰. زیر سهمی‌وار $z=18-2x^2-2y^2$ و بالای صفحهٔ xy.

۲۱. محصور به هذلولی‌وار $-x^2-y^2+z^2=1$ و صفحهٔ $z=2$.

۲۲. درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=16$ و بیرون استوانهٔ $x^2+y^2=4$.

۲۳. کره‌ای به شعاع a.

۲۴. محدود به سهمی‌وار $z=1+2x^2+2y^2$ و صفحهٔ $z=7$ در یک هشتم اول.

۲۵. بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و زیر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$.

۲۶. محدود به سهمی‌وارهای $z=3x^2+3y^2$ و $z=4-x^2-y^2$.

۲۷. هم درون استوانهٔ $x^2+y^2=4$ هم درون بیضی‌وار $4x^2+4y^2+z^2=64$.

۲۸. الف) با استفاده از مته‌ای استوانه‌ای به شعاع r_1 سوراخی که مرکز کره‌ای به شعاع r_2 گذشته است ایجاد کرده‌ایم. حجم جسم سه‌بعدی حلقوی باقی‌مانده را پیدا کنید.

ب) حجم موردنظر در قسمت (الف) را برحسب ارتفاع حلقهٔ موردنظر، h، بنویسید. توجه کنید که حجم موردنظر فقط به h بستگی دارد نه به r_1 یا r_2.

۲۹-۳۲ انتگرال مکرر موردنظر را با رفتن به مختصات قطبی حساب کنید.

۲۹. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$

۳۰. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2y\,dx\,dy$

۳۱. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)\,dx\,dy$

۳۲. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

---

۳۳. استخر شنایی دایره‌ای به قطر ۴۰ ft است. عمق استخر در امتداد خطهای شرقی-غربی ثابت است و به‌طور خطی از ۲ ft در انتهای جنوبی تا ۷ ft در انتهای شمالی زیاد می‌شود حجم آب درون این استخر را پیدا کنید.

۳۴. آب‌پاش مزرعه‌ای آب را در ناحیه‌ای دایره‌ای به‌شعاع ۱۰۰ ft توزیع می‌کند. این آب‌پاش در هر ساعت آب به عمق e^{-r} را به ناحیه‌هایی که فاصله‌شان از آب‌پاش r است می‌رساند.

الف) اگر

$$0 < R \le 100$$

مقدار کل آبی که در هر ساعت به ناحیهٔ درون دایرهٔ به شعاع R به مرکز آب‌پاش می‌رسد چقدر است؟

ب) عبارتی برای مقدار متوسط آب که در هر ساعت به هر فوت مربع از ناحیهٔ درون دایرهٔ به شعاع R می‌رسد پیدا کنید.

۳۵. با استفاده از مختصات قطبی مجموع

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

را به‌شکل یک انتگرال دوگانه بنویسید. سپس این انتگرال دوگانه را حساب کنید.

۳۶. الف) انتگرال ناسرهٔ (روی کل صفحهٔ $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

را تعریف می‌کنیم، که در اینجا D_a قرصی به شعاع a و مرکز مبدأ است. نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

ب) تعریفی معادل برای انتگرال ناسرهٔ قسمت (الف)،

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

است، که در اینجا S_a مربعی با رأسهای $(\pm a, \pm a)$ است. با استفاده از این تعریف نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

ج) نتیجه بگیرید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

د) با انجام تغییر متغیر $t = \sqrt{2}x$ نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(این نتیجه در آمار و احتمال خیلی مهم است.)

۳۷. با استفاده از قسمت (ج) تمرین ۳۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

الف) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$

ب) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$

۱. انتگرال مثال ۱ را حساب کنید. ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید، بعد نسبت به z و بعد نسبت به x.

۲. انتگرال $\iiint_E (xz - y^3)\,dV$ را، که در اینجا

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1\}$$

با استفاده از سه ترتیب مختلف انتگرال‌گیری حساب کنید.

در ۳-۶ انتگرال مکرر موردنظر را حساب کنید.

۳. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\,dy\,dx\,dz$

۴. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz\,dz\,dy\,dx$

۵. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\,dx\,dz\,dy$

۶. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\,dx\,dy\,dz$

۷. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{y}\int_0^{x}\cos(x+y+z)\,dz\,dx\,dy$

۸. $\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\int_0^{xz}x^2\sin y\,dy\,dz\,dx$

۹-۱۸ انتگرال سه‌گانهٔ موردنظر را حساب کنید.

۹. $\iiint_E 2x\,dV$، که در اینجا

$$E=\{(x,y,z)\mid 0\le y\le 2,\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2},\ 0\le z\le y\}$$

۱۰. $\iiint_E yz\cos x^5\,dV$، که در اینجا

$$E=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ x\le z\le 2x\}$$

۱۱. $\iiint_E 6xy\,dV$، که در اینجا E زیر صفحهٔ $z=1+x+y$ و بالای ناحیه در صفحهٔ xy که محدود به منحنیهای $y=\sqrt{x}$، $y=0$ و $x=1$ است قرار دارد.

۱۲. $\iiint_E y\,dV$، که در اینجا E محدود به صفحه‌های $x=0$، $y=0$، $z=0$ و $2x+2y+z=4$ است.

۱۳. $\iiint_E x^2e^y\,dV$، که در اینجا E محدود به استوانهٔ سهموی $z=1-y^2$ و صفحه‌های $z=0$، $x=1$ و $x=-1$ است.

۱۴. $\iiint_E xy\,dV$، که در اینجا E محدود به استوانه‌های سهموی $y=x^2$ و $x=y^2$ و صفحه‌های $z=0$ و $z=x+y$ است.

۱۵. $\iiint_T x^2\,dV$، که در اینجا T چهاروجهی با رأسهای $(0,0,0)$، $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ است.

۱۶. $\iiint_T xyz\,dV$، که در اینجا T چهاروجهی با رأسهای $(0,0,0)$، $(1,0,0)$، $(1,1,0)$ و $(1,0,1)$ است.

۱۷. $\iiint_E x\,dV$، که در اینجا E محدود به سهمی‌وار $x=4y^2+4z^2$ و صفحهٔ $x=4$ است.

۱۸. $\iiint_E z\,dV$، که در اینجا E محدود به استوانهٔ $y^2+z^2=9$ و صفحه‌های $x=0$، $y=3x$ و $z=0$ در یک هشتم اول است.

۱۹-۲۲ با استفاده از انتگرال سه‌گانه حجم جسم سه‌بعدی موردنظر را پیدا کنید.

۱۹. چهاروجهی محصور به صفحه‌های مختصات و صفحهٔ $2x+y+z=4$

۲۰. جسم سه‌بعدی محدود به استوانهٔ $y=x^2$ و صفحه‌های $z=0$، $z=4$ و $y=9$

۲۱. جسم سه‌بعدی محصور به استوانهٔ $x^2+y^2=9$ و صفحه‌های $z=1$ و $y+z=5$

۲۲. جسم سه‌بعدی محصور به سهمی‌وار $x=y^2+z^2$ و صفحهٔ $x=16$

۲۳. الف) حجم سه‌گوش در یک هشتم اول را که صفحه‌های $y=x$ و $x=1$ از استوانهٔ $y^2+z^2=1$ بریده‌اند به‌شکل انتگرالی سه‌گانه بنویسید.

CAS ب) با استفاده از جدول انتگرالها (در انتهای قسمت اول، جلد دوم) یا سیستمهای جبری کامپیوتری مقدار دقیق انتگرال سه‌گانهٔ قسمت (الف) را پیدا کنید.

۲۴. الف) در **قاعدهٔ میانگاهی برای انتگرالهای سه‌گانه** از مجموع ریمانی برای تقریب زدن انتگرال سه‌گانه روی جعبهٔ B، که در اینجا $f(x,y,z)$ در $(\bar{x}_i,\bar{y}_j,\bar{z}_k)$، مرکز جعبهٔ B_{ijk}، حساب می‌شود استفاده می‌کنیم. با استفاده از قاعدهٔ میانگاهی $\iiint_B\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ را، که در اینجا B مکعبی است که با $0\le x\le 4$، $0\le y\le 4$، $0\le z\le 4$ تعریف شده است، تخمین بزنید. B را به هشت مکعب با اندازهٔ برابر تقسیم کنید.

CAS ب) با استفاده از سیستمهای جبری کامپیوتری انتگرال قسمت (الف) را به نزدیکترین عدد صحیح به آن تقریب بزنید. پاسخ را با پاسخنان برای قسمت (الف) مقایسه کنید.

۲۵-۲۶ با استفاده از قاعدهٔ میانگاهی برای انتگرالهای سه‌گانه (تمرین ۲۴) مقدار انتگرال موردنظر را تخمین بزنید. B را به هشت زیرجعبه با اندازهٔ برابر تقسیم کنید.

۲۵. $\iiint_B\dfrac{1}{\ln(1+x+y+z)}\,dV$، که در اینجا

$$B=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 8,\ 0\le z\le 4\}$$

۲۶. $\iiint_B\sin(xy^2z^3)\,dV$، که در اینجا

$$B=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1\}$$

۲۷-۲۸ جسم سه‌بعدی را که حجمش با انتگرال مکرر داده‌شده مشخص شده است رسم کنید.

۲۷. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\,dz\,dx$

۲۸. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\,dz\,dy$

۲۹-۳۲ $\iiint_E f(x,y,z)\,dV$ را به شش طریق به‌شکل انتگرالی مکرر بنویسید، در اینجا E جسم سه‌بعدی است که محدود به رویه‌های داده‌شده است.

۲۹. $y = 4 - x^2 - 4z^2$، $y = 0$

۳۰. $y^2 + z^2 = 9$، $x = -2$، $x = 2$

۳۱. $y = x^2$، $z = 0$، $y + 2z = 4$

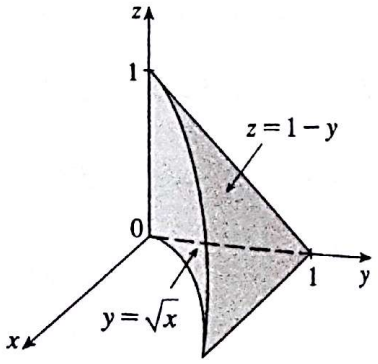
۳۲. $x = 2$، $y = 2$، $z = 0$، $x + y - 2z = 2$

---

۳۳. شکل زیر ناحیهٔ انتگرال‌گیری برای انتگرال

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

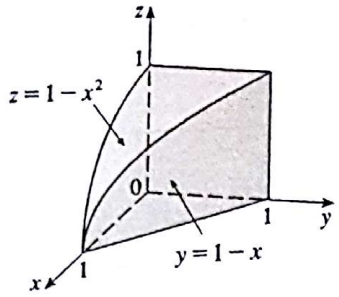
را نشان می‌دهد. این انتگرال را به‌شکل انتگرال مکرری معادلش با پنج ترتیب دیگر از نو بنویسید.



۳۴. شکل بالای ستون روبه‌رو ناحیهٔ انتگرال‌گیری برای انتگرال

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

را نشان می‌دهد. این انتگرال را به‌شکل انتگرال مکرری معادلش با پنج ترتیب دیگر از نو بنویسید.



۳۵-۳۶ پنج انتگرال مکرر دیگر را که معادل انتگرال مکرر داده شده است بنویسید.

۳۵. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

۳۶. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

۳۷-۴۰ جرم و مرکز جرم جسم سه‌بعدی E با تابع چگالی مفروض ρ را پیدا کنید.

۳۷. E جسم سه‌بعدی تمرین ۱۱ است؛ $\rho(x,y,z) = 2$

۳۸. E محدود به استوانهٔ سهموی $z = 1 - y^2$ و صفحه‌های $x + z = 1$، $x = 0$ و $z = 0$ است؛ $\rho(x,y,z) = 4$

۳۹. E مکعبی است که با $0 \le x \le a$، $0 \le y \le a$، $0 \le z \le a$ مشخص شده است؛ $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

۴۰. E چهاروجهی محدود به صفحه‌های $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$، $x + y + z = 1$ است؛ $\rho(x,y,z) = y$

۴۱-۴۴ فرض کنید که چگالی جسم سه‌بعدی موردنظر مقدار ثابت k است.

۴۱. گشتاور لختی مکعبی به‌طول ضلع L را پیدا کنید، به‌شرطی که یک رأسش در مبدأ قرار داشته باشد و سه یالش روی محورهای مختصات باشند.

۴۲. گشتاور لختی آجری مستطیلی با ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید، به‌شرطی که مرکز آجر در مبدأ باشد و یالهایش موازی محورهای مختصات باشند.

۴۳. گشتاور لختی حول محور z استوانهٔ $x^2 + y^2 \le a^2$، $0 \le z \le h$ را پیدا کنید.