

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad a_1 = 2$$

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n \quad .۳۶ \qquad a_n = \frac{\cos^n n}{n} \quad .۳۵$$

$$a_n = \sqrt[3]{2^{1+2n}} \quad .۳۸ \qquad a_n = n \sin \frac{1}{n} \quad .۳۷$$

$$a_n = \frac{\sin 2n}{1 + \sqrt{n}} \quad .۴۰ \qquad a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \quad .۳۹$$

$$a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1) \quad .۴۱$$

$$a_n = \frac{(\ln n)^2}{n} \quad .۴۲$$

$$\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots\} \quad .۴۳$$

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots\right\} \quad .۴۴$$

$$a_n = \frac{(-3)^n}{n!} \quad .۴۶ \qquad a_n = \frac{n!}{n^n} \quad .۴۵$$

۴۷-۵۳ با استفاده از نمودار دنباله موردنظر مشخص کنید که دنباله موردنظر همگراست یا واگرا. اگر این دنباله همگرا بود، مقدار حدش را از روی نمودارش حدس بزنید و سپس حدستان را ثابت کنید. (یادداشت حاشیه صفحه ۸۹۳ را برای راهنمایی شدن درباره ترسیم دنباله‌ها ببینید.)

$$a_n = \sqrt{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \quad .۴۸ \qquad a_n = 1 + \left(-\frac{2}{e}\right)^n \quad .۴۷$$

$$a_n = \sqrt[3]{3^n + 5^n} \quad .۵۰ \qquad a_n = \sqrt{\frac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}} \quad .۴۹$$

$$a_n = \frac{n^2 \cos n}{1 + n^2} \quad .۵۱$$

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{n!} \quad .۵۲$$

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{(2n)^n} \quad .۵۳$$

۵۴. الف) مشخص کنید دنباله‌ای که به شکل زیر تعریف شده است همگراست یا واگرا:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4 - a_n, \quad n \geq 1$$

ب) اگر $a_1 = 2$ چه پیش می‌آید؟

۵۵. اگر ۱۰۰۰ دلار را با بهره ۶٪ که مرکب سالانه است سرمایه‌گذاری کنیم، پس از n سال ارزش سرمایه‌مان برحسب دلار می‌شود $a_n = 1000(1.06)^n$

الف) پنج جمله اول دنباله $\{a_n\}$ را پیدا کنید.

۱۴۹. دستوری برای جمله عمومی دنباله موردنظر، a_n ، با این فرض که لگوی چند جمله اول ادامه پیدا می‌کند، پیدا کنید.

$$\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\} \quad .۱۰ \qquad \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\} \quad .۹$$

$$\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots\} \quad .۱۲ \qquad \{2, 7, 12, 17, \dots\} \quad .۱۱$$

$$\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\} \quad .۱۴ \qquad \{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots\} \quad .۱۳$$

۱۵. شش جمله اول دنباله‌ای را که با

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

تعریف شده است بنویسید. آیا به نظر می‌رسد که این دنباله حد دارد؟ اگر چنین است، آن را پیدا کنید.

۱۶. نه جمله اول دنباله $\left\{\cos \frac{n\pi}{3}\right\}$ را بنویسید. آیا به نظر می‌رسد که این دنباله حد دارد؟ اگر چنین است، آن را پیدا کنید، اگر این طور نیست، بگویید چرا؟

۱۷-۴۶ مشخص کنید که دنباله موردنظر همگراست یا واگرا. اگر همگراست حد آن را پیدا کنید.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \quad .۱۸ \qquad a_n = 1 - (0.2)^n \quad .۱۷$$

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} \quad .۲۰ \qquad a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2} \quad .۱۹$$

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{5^n} \quad .۲۲ \qquad a_n = e^{1/n} \quad .۲۱$$

$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{9n+1}} \quad .۲۴ \qquad a_n = \tan \frac{2n\pi}{1+8n} \quad .۲۳$$

$$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 2n^2 + 1} \quad .۲۶ \qquad a_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1} \quad .۲۵$$

$$a_n = \cos \frac{2}{n} \quad .۲۸ \qquad a_n = \cos \frac{n}{2} \quad .۲۷$$

$$\{\arctan 2n\} \quad .۳۰ \qquad \left\{\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\} \quad .۲۹$$

$$\left\{\frac{\ln n}{\ln 2n}\right\} \quad .۳۲ \qquad \left\{\frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\} \quad .۳۱$$

$$\{n \cos n\pi\} \quad .۳۴ \qquad \{n^2 e^{-n}\} \quad .۳۳$$

(الف) به استقرا یا طریقی دیگر، نشان دهید که $\{a_n\}$ صعودی و کران بالایی اش ۳ است. با استفاده از قضیه دنباله یکنوا نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود دارد.

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ را پیدا کنید.

۶۹. نشان دهید دنباله‌ای که به شکل

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

تعریف شده است صعودی است و به ازای هر $n, a_n < 3$. نتیجه بگیرید که $\{a_n\}$ همگراست و حدش را پیدا کنید.

۷۰. نشان دهید دنباله‌ای که به شکل

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

تعریف شده در $0 < a_n \leq 2$ صدق می‌کند و نزولی است. نتیجه بگیرید که این دنباله همگراست و حدش را پیدا کنید.

۷۱. (الف) فیبوناتچی مسأله زیر را پیشنهاد کرده است: فرض کنید

خرگوشها جاودانه زندگی می‌کنند و هر ماه هر جفت یک زوج جدید به دنیا می‌آورند که در ۲ ماهگی می‌توانند تولید مثل کنند. اگر در آغاز یک زوج تازه متولد شده داشته باشیم، در ماه n ام چند جفت خرگوش داریم؟ نشان دهید که پاسخ این مسأله f_n است، که در اینجا $\{f_n\}$ دنباله فیبوناتچی است که در مثال ۳ (ج) تعریف شده است.

(ب) فرض کنید $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ و نشان دهید که

$$a_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-2}}$$

با فرض اینکه $\{a_n\}$ همگراست، حدش را پیدا کنید.

۷۲. (الف) فرض کنید

$$a_1 = a, \quad a_2 = f(a),$$

$$a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \dots, a_{n+1} = f(a_n)$$

که در اینجا f تابعی پیوسته است. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ نشان دهید که $f(L) = L$.

(ب) فرض کنید $f(x) = \cos x$ و $a = 1$ و درستی حکم قسمت (الف) را نشان دهید، و مقدار L را تا پنج رقم اعشار تخمین

بزنید.

(ب) این دنباله همگراست یا واگرا؟ توضیح دهید.

۵۶. جمله اول دنباله‌ای را که به شکل

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3} a_n & \text{اگر } a_n \text{ عددی زوج بود} \\ 3a_n + 1 & \text{اگر } a_n \text{ عددی فرد بود} \end{cases}$$

و $a_1 = 11$ تعریف شده است پیدا کنید. اگر $a_1 = 25$ همین کار را تکرار کنید. در مورد دنباله‌هایی از این نوع حدسی بزنید.

۵۷. به ازای چه مقدارهایی از n دنباله $\{n^n\}$ همگراست؟

۵۸. (الف) اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد، نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(ب) دنباله $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_1 = 1$ و به ازای $n \geq 1$ $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. با این فرض که $\{a_n\}$ همگراست، حدش را پیدا کنید.

۵۹. فرض کنید که می‌دانید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی است و همه جمله‌هایش بین ۵ و ۸ اند. توضیح دهید که چرا این دنباله حد دارد. درباره مقدار این حد چه می‌توانید بگویید؟

۶۰-۶۶ مشخص کنید که دنباله موردنظر صعودی است، نزولی است یا اصلاً یکنوا هست یا نه. آیا دنباله موردنظر کراندار است؟

۶۰. $a_n = (-2)^{n+1}$

۶۲. $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$

۶۴. $a_n = ne^{-n}$

۶۶. $a_n = n + \frac{1}{n}$

۶۱. $a_n = \frac{1}{2n+3}$

۶۳. $a_n = n(-1)^n$

۶۵. $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

۶۷. حد دنباله

$$\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\}$$

را پیدا کنید.

۶۸. دنباله $\{a_n\}$ به شکل $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ تعریف شده است.

تمرین

۲.۱۲

۱. الف) فرق میان دنباله و سری چیست؟

ب) سری همگرا چیست؟ سری واگرا چیست؟

۲. معنی اینکه بگوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$ را توضیح دهید.

۳. جمله دستکم 10^6 مجموع جزئی سری موردنظر را پیدا کنید. دنباله جمله‌ها دنباله مجموعهای جزئی را روی یک صفحه نمایش رسم کنید. به نظر می‌رسد که سری همگراست یا واگرا؟ اگر همگراست، مجموعش را پیدا کنید. واگراست، بگویید چرا.

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (0,6)^{n-1}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan n$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$.۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

۹. فرض کنید $a_n = \frac{2n}{3n+1}$

الف) مشخص کنید که $\{a_n\}$ همگراست یا خیر.

ب) مشخص کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست یا خیر.

۱۰. الف) فرق میان

$\sum_{j=1}^n a_j$ و $\sum_{i=1}^n a_i$

را توضیح دهید.

۳۵-۴۰ با نوشتن s_n به شکل مجموعی ادغامی (مانند مثال ۶) مشخص کنید که سری موردنظر همگراست یا واگرا. اگر همگراست، مجموعش را پیدا کنید.

۳۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$ ۳۵. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

۳۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ ۳۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

۳۹. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

۴۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

۴۱-۴۶ عدد موردنظر را به شکل نسبت دو عدد صحیح بنویسید.

۴۱. $0.\overline{2} = 0,2222\dots$

۴۲. $0.\overline{73} = 0,73737373\dots$

۴۳. $3,\overline{417} = 3,417417417\dots$

۴۴. $6,\overline{254} = 6,2545454\dots$

۴۵. $1,\overline{5342} = 1,53424242\dots$

۴۶. $7,\overline{12345} = 7,123454545\dots$

۴۷-۵۱ مقدارهایی از x را پیدا کنید که سری موردنظر به ازای آنها همگراست. به ازای این مقدارهای x مجموع سری را پیدا کنید.

۴۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$ ۴۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

۵۰. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ ۴۹. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

۵۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

۵۲. دیدیم که سری همساز سری واگراست که جمله‌هایش به 0 میل می‌کنند. نشان دهید که

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

سری دیگر با این ویژگی است.

(ب) فرق میان

$\sum_{i=1}^n a_j$ و $\sum_{i=1}^n a_i$

را توضیح دهید.

۱۱-۲۰ مشخص کنید که سری هندسی موردنظر همگراست یا واگرا. اگر همگراست، مجموعش را پیدا کنید.

۱۱. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{9} + \dots$

۱۲. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \dots$

۱۳. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \dots$

۱۴. $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \dots$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} 6(0,9)^{n-1}$ ۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ ۱۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

۱۹. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$ ۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

۲۱-۳۴ مشخص کنید که سری موردنظر همگراست یا واگرا. اگر همگراست، مجموعش را پیدا کنید.

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$

۲۳. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$ ۲۴. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2^n}$ ۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ ۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} ((0,8)^{n-1} - (0,3)^n)$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)$ ۳۰. $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right)$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ ۳۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$