۲.۱۶ تمرین

۲.۱ $\int_0^5 f(x,y)\,dx$ و $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ را پیدا کنید.

۱. $f(x,y) = 12x^2y^3$

۲. $f(x,y) = y + xe^y$

۳.۱۴ انتگرال مکرر موردنظر را حساب کنید.

۳. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\,dx\,dy$

۴. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dy\,dx$

۵. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y\,dy\,dx$

۶. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^{5} \cos y\,dx\,dy$

۷. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8\,dx\,dy$

۸. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\,dy\,dx$

۹. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\,dx$

۱۰. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

۱۱. $\int_0^1 \int_0^1 (u-v)^5 \, du\, dv$

۱۲. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

۱۳. $\int_0^2 \int_0^\pi r\sin^2\theta \, d\theta\, dr$

۱۴. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t}\, ds\, dt$

۱۵-۲۲ انتگرال دوگانهٔ موردنظر را حساب کنید.

۱۵. $\iint_R (6x^2y^2 - 5y^4)\, dA$، $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1\}$

۱۶. $\iint_R \cos(x+2y)\, dA$، $R = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

۱۷. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\, dA$، $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -3 \le y \le 3\}$

۱۸. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\, dA$، $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

۱۹. $\iint_R x\sin(x+y)\, dA$، $R = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

۲۰. $\iint_R \frac{x}{1+xy}\, dA$، $R = [0,1] \times [0,1]$

۲۱. $\iint_R xye^{x^2y}\, dA$، $R = [0,1] \times [0,2]$

۲۲. $\iint_R \frac{x}{x^2+y^2}\, dA$، $R = [1,2] \times [0,1]$

۲۳-۲۴ جسم سه‌بعدی را رسم کنید که حجمش با انتگرال مکرر داده شده مشخص شده است.

۲۳. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\, dx\, dy$

۲۴. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

۲۵. حجم جسم سه‌بعدی را که زیر صفحهٔ $2x + 2y + z = 12$ و بالای مستطیل $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 3\}$ قرار دارد پیدا کنید.

۲۶. حجم جسم سه‌بعدی را که زیر سهمی‌وار هذلولوی $z = 4 + x^2 - y^2$ و بالای مربع $R = [-1,1] \times [0,2]$ قرار دارد پیدا کنید.

۲۷. حجم جسم سه‌بعدی را که زیر سهمی‌وار بیضوی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ و بالای مستطیل $R = [-1,1] \times [-2,2]$ قرار دارد پیدا کنید.

۲۸. حجم جسم سه‌بعدی را که محصور به رویهٔ $z = 1 + e^x \sin y$ و صفحه‌های $x = \pm 1$، $y = 0$، $y = \pi$ و $z = 0$ است پیدا کنید.

۲۹. حجم جسم سه‌بعدی را که محصور به رویهٔ $z = x\sec^2 y$ و صفحه‌های $z = 0$، $x = 0$، $x = 2$، $y = 0$ و $y = \frac{\pi}{4}$ است پیدا کنید.

۳۰. حجم جسم سه‌بعدی را که در یک هشتم اول محدود به استوانهٔ $z = 16 - x^2$ و صفحهٔ $y = 5$ است پیدا کنید.

۳۱. حجم جسم سه‌بعدی را که محصور به سهمی‌وار $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$ و صفحه‌های $z = 1$، $x = 1$، $x = -1$، $y = 0$ و $y = 4$ است پیدا کنید.

۳۲. جسم سه‌بعدی را که بین رویهٔ $z = \frac{2xy}{x^2+1}$ و صفحهٔ $z = x + 2y$ قرار دارد و محدود به صفحه‌های $x = 0$، $x = 2$، $y = 0$ و $y = 4$ است رسم کنید. سپس حجمش را پیدا کنید.

۳۳. CAS با استفاده سیستمهای جبری کامپیوتری مقدار دقیق انتگرال $\iint_R x^5y^3e^{xy}\, dA$ را که در اینجا $R = [0,1] \times [0,1]$ پیدا کنید. سپس با استفاده از این سیستم جبری کامپیوتری جسم سه‌بعدی را که حجمش با این انتگرال مشخص شده است بکشید.

۳۴. CAS جسم سه‌بعدی را که بین رویه‌های $z = e^{-x^2}\cos(x^2+y^2)$ و $z = 2 - x^2 - y^2$ قرار دارد به‌ازای $|x| \le 1$ و $|y| \le 1$ رسم کنید. با استفاده از سیستمهای جبری کامپیوتری حجم این جسم سه‌بعدی را با دقت چهار رقم اعشار تقریب بزنید.

۳۵-۳۶ مقدار متوسط f را روی مستطیل داده‌شده پیدا کنید.

۳۵. $f(x,y) = x^2y$، رأسهای R، $(0,-1)$، $(5,-1)$، $(5,1)$ و $(0,1)$اند.

۳۶. $f(x,y) = e^y\sqrt{x+e^y}$، $R = [0,4] \times [0,1]$

۱-۶ انتگرال مکرر موردنظر را حساب کنید.

۱. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{y}} xy^{2}\,dx\,dy$

۲. $\int_{0}^{1}\int_{2x}^{2}(x-y)\,dy\,dx$

۳. $\int_{0}^{1}\int_{x^{2}}^{x}(1+2y)\,dy\,dx$

۴. $\int_{0}^{2}\int_{y}^{2y} xy\,dx\,dy$

۵. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta} e^{\sin\theta}\,dr\,d\theta$

۶. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{v}\sqrt{1-v^{2}}\,du\,dv$

۷-۱۸ انتگرال دوگانهٔ موردنظر را حساب کنید.

۷. $\iint_{D} y^{2}\,dA$،

$D=\{(x,y)\mid -1\le y\le 1,\ -y-2\le x\le y\}$

۸. $\iint_{D}\frac{y}{x^{5}+1}\,dA$،

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^{2}\}$

۹. $\iint_{D} x\,dA$،

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \sin x\}$

۱۰. $\iint_{D} x^{3}\,dA$،

$D=\{(x,y)\mid 1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$

۱۱. $\iint_{D} y^{2}e^{xy}\,dA$،

$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4,\ 0\le x\le y\}$

۱۲. $\iint_{D} x\sqrt{y^{2}-x^{2}}\,dA$،

$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

۱۳. $\iint_{D} x\cos y\,dA$، D محدود به $y=0$، $y=x^{2}$ و $x=1$ است.

۱۴. $\iint_{D}(x+y)\,dA$، D محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=x^{2}$ است.

۱۵. $\iint_{D} y^{3}\,dA$، D ناحیهٔ مثلثی با رأسهای $(0,2)$، $(1,1)$ و $(3,2)$ است.

۱۶. $\iint_{D} xy^{2}\,dA$، D محصور به $x=0$ و $x=\sqrt{1-y^{2}}$ است.

۱۷. $\iint_{D}(2x-y)\,dA$، D ناحیهٔ محدود به دایرهٔ به مرکز مبدأ و

شعاع ۲ است.

۱۸. $\iint_D 2xy\,dA$، D ناحیهٔ مثلثی با رأسهای $(0,0)$، $(1,2)$ و $(0,3)$ است.

۱۹-۲۸ حجم جسم سه‌بعدی موردنظر را پیدا کنید.

۱۹. زیر صفحهٔ $x+2y-z=0$ و بالای ناحیهٔ محدود به $y=x$ و $y=x^4$

۲۰. زیر رویهٔ $z=2x+y^2$ و بالای ناحیهٔ محدود به $x=y^2$ و $x=y^3$

۲۱. زیر رویهٔ $z=xy$ و بالای مثلث با رأسهای $(1,1)$، $(4,1)$ و $(2,1)$

۲۲. محصور به سهمی‌وار $z=x^2+3y^2$ و صفحه‌های $x=0$، $y=1$، $y=x$، $z=0$

۲۳. محدود به صفحه‌های مختصات و صفحهٔ $3x+2y+z=6$

۲۴. محدود به صفحه‌های $z=x$، $y=x$، $x+y=2$ و $z=0$

۲۵. محصور به استوانه‌های $z=x^2$، $y=x^2$ و صفحه‌های $z=0$، $y=4$

۲۶. محدود به استوانهٔ $y^2+z^2=4$ و صفحه‌های $x=2y$، $x=0$، $z=0$ در یک هشتم اول

۲۷. محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و صفحه‌های $y=z$، $x=0$، $z=0$ در یک هشتم اول

۲۸. محدود به استوانه‌های $x^2+y^2=r^2$ و $y^2+z^2=r^2$

---

۲۹. با استفاده از ماشین‌حساب رسام یا کامپیوتر مختص x نقطهٔ برخورد منحنیهای $y=x^4$ و $y=3x-x^2$ را تخمین بزنید. اگر D ناحیهٔ محدود به این منحنیها باشد، $\iint_D x\,dA$ را تخمین بزنید.

۳۰. حجم تقریبی جسم سه‌بعدی در یک هشتم اول را که محدود به صفحه‌های $x=y$، $z=0$ و $z=x$ و استوانهٔ $y=\cos x$ است پیدا کنید. (از ابزار رسامی برای تخمین زدن نقطه‌های برخورد استفاده کنید.)

۳۱-۳۲ حجم جسم سه‌بعدی موردنظر را با کم‌کردن دو حجم از هم پیدا کنید.

۳۱. جسم سه‌بعدی محصور به استوانه‌های سهموی $y=1-x^2$، $y=x^2-1$ و صفحه‌های $x+y+z=2$، $2x+2y-z+10=0$

۳۲. جسم سه‌بعدی محصور با استوانهٔ سهموی $y=x^2$ و صفحه‌های $z=3y$، $z=2+y$

۳۳-۳۴ جسم سه‌بعدی را که حجمش با انتگرال مکرر داده‌شده مشخص شده است رسم کنید.

۳۳. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx$

۳۴. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x^2}(1-x)\,dy\,dx$

CAS **۳۵-۳۸** با استفاده از سیستمهای جبری کامپیوتری حجم دقیق جسم سه‌بعدی موردنظر را پیدا کنید.

۳۵. زیر رویهٔ $z=x^3y^4+xy^2$ و بالای ناحیهٔ محدود به منحنیهای $y=x^3-x$ و $y=x^2+x$ به‌ازای $x\ge 0$

۳۶. بین سهمی‌وارهای $z=2x^2+y^2$ و $z=8-x^2-2y^2$ و درون استوانهٔ $x^2+y^2=1$

۳۷. محصور به $z=1-x^2-y^2$ و $z=0$

۳۸. محصور به $z=x^2+y^2$ و $z=2y$

۳۹-۴۴ ناحیهٔ انتگرال‌گیری را رسم کنید و ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید.

۳۹. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$

۴۰. $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^4 f(x,y)\,dy\,dx$

۴۱. $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

۴۲. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y}} f(x,y)\,dx\,dy$

۴۳. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\,dx$

۴۴. $\displaystyle\int_0^1\int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x,y)\,dy\,dx$

۴۵-۵۰ انتگرال موردنظر را با عوض‌کردن ترتیب انتگرال‌گیری حساب کنید.

۴۵. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$

۴۶. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\,dx\,dy$

۴۷. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\,dy\,dx$

۴۸. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx$

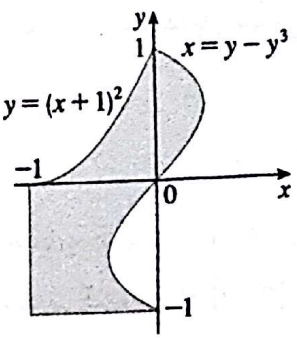
۴۹. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$

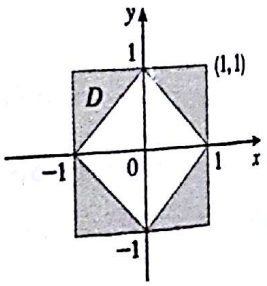
۵۰. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy$

۵۱-۵۲ D را به‌شکل اجتماع ناحیه‌هایی از نوع اول یا نوع دوم بنویسید و انتگرال موردنظر را حساب کنید.

۵۱. $\iint_D x^2\,dA$

۵۲. $\iint_D y\,dA$





۵۳-۵۴ با استفاده از ویژگی ۱۱ مقدار انتگرال موردنظر را تخمین بزنید.

۵۳. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\,dA$، Q ربع دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{1}{2}$ در ربع اول است.

۵۴. $\iint_T \sin^4(x+y)\,dA$، T مثلث محصور به خطهای $y=0$، $y=2x$ و $x=1$ است.

۵۵-۵۶ مقدار متوسط f روی D را پیدا کنید.

۵۵. $f(x,y)=xy$، D مثلث با رأسهای $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,3)$ است.

۵۶. $f(x,y)=x\sin y$، D محصور به منحنیهای $y=0$، $y=x^2$ و $x=1$ است.

۵۷. ویژگی ۱۱ را ثابت کنید.

۵۸. هنگام محاسبهٔ انتگرالی دوگانه روی ناحیه‌ای مانند D مجموعی از انتگرالهای مکرر به‌شکل زیر به‌دست آمده است:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

ناحیهٔ D را رسم کنید و انتگرال دوگانهٔ موردنظر را به‌شکل انتگرالی مکرر که ترتیب انتگرال‌گیریش برعکس شده است بنویسید.

۵۹. مقدار

$$\iint_D (x^2\tan x + y^3 + 4)\,dA$$

را، که در اینجا

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2\}$$

حساب کنید. (راهنمایی: از اینکه D نسبت به هر دو محور متقارن است استفاده کنید.)

۶۰. با استفاده از تقارن،

$$\iint_D (2-3x+4y)\,dA$$

را، که در اینجا D ناحیهٔ محدود به مربع با رأسهای $(\pm 5, 0)$ و $(0, \pm 5)$ است، حساب کنید.

۶۱. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA$ را، که در اینجا D قرص $x^2+y^2\le 1$ است، با تعبیر این انتگرال به حجم جسمی سه‌بعدی حساب کنید.

۶۲ CAS. جسم سه‌بعدی محدود به صفحهٔ $x+y+z=1$ و سهمی‌وار $z=4-x^2-y^2$ را رسم کنید و حجم دقیقش را پیدا کنید. (با استفاده از سیستم جبری کامپیوتری‌تان رسامی کنید، معادلهٔ منحنیهای مرزی ناحیهٔ انتگرال‌گیری را پیدا کنید و انتگرال دوگانهٔ موردنظر را حساب کنید.)